

Compito di Geometria per ingegneria medica

Trapani 4-2-2019 compito B

February 3, 2019

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + (1 - \alpha)y - \alpha z = \alpha \\ \alpha x + (\alpha - 1)y - z = \alpha^2 \\ x - \alpha z = 1 \end{cases}$$

dipendente dal parametro reale α .

Determinare per quali valori del parametro α il sistema e' compatibile,

Determinare per ogni tale α la dimensione dello spazio affine delle soluzioni del sistema

Per i valori di α (se esistono) per i quali la dimensione dello spazio delle soluzioni e' strettamente positiva, determinare esplicitamente equazioni parametriche dello spazio delle soluzioni

Esercizio 2

Si consideri nello spazio a tre dimensioni la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Determinare equazioni cartesiane del piano Π ortogonale ad r e passante per il punto P di coordinate $(1, 1, 1)$.

Provare che il punto Q di coordinate $(1, 0, 1)$ appartiene alla retta r .

Determinare equazioni parametriche della retta r_1 passante per P e Q .

Determinare equazioni cartesiane del piano contenente le rette r ed r_1 .

Esercizio 3 Sia $V(k)$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di una variabile di grado minore o uguale a 3. Sia $L : V(2) \rightarrow V(4)$ l'applicazione definita da $L(P) = x^2P + P(1) - P(0)$.

Provare che L e' lineare, determinare una base di $\text{Ker}(L)$,

Determinare la dimensione dell'immagine di L .

Determinare la matrice associata ad L rispetto alle basi

$\{1, x, x^2\}$ su $V(2)$ e $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ su $V(4)$.

1B 4-2-19

SOLUZIONI COMPITO B IN GEOMETRIA PERICLA TRAMPONK

ESERCIZIO 1B 04-02-2019

LA MATRICE DEL SISTEMA È

$$\begin{pmatrix} 1 & (1-x) & -x \\ x & (x-1) & -1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ x^2 \\ 1 \end{matrix}$$

A b

~~Il sistema è compatibile ed ammette una ed una sola soluzione, cioè la dimensione dello spazio delle soluzioni in questo caso è 0. Se $x=1$ abbiamo~~

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} (x-1) & -1 \\ 0 & -x \end{pmatrix} - (1-x) \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} - x \det \begin{pmatrix} x & (x-1) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$1(x-1)(-x) - (1-x)(-x^2+1) - x(-x) =$$

$$(x-1)[-x - x^2 + 1 + x] = (x-1)(1-x^2). \text{ Quindi}$$

$$\det(A) = 0 \iff x=1 \text{ oppure } x=-1. \text{ Quindi se } x \neq 1 \text{ e } x \neq -1$$

IL SISTEMA È COMPATIBILE ED AMMETTE UNA ED UNA SOLA SOLUZIONE, cioè LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI IN QUESTO CASO È 0. Se $x=1$ ABBIAMO

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{ Quindi } \text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = 1, \text{ IL SISTEMA È COMPATIBILE.}$$

PERCÌ ~~LA~~ LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È 3-1=2, IL SISTEMA DIVENTA $x-z=1, x=z+1$.

PARAMETRI LIBERI y, z , SOLUZIONE PARTICOLARE $y=z=0, x=1$.

PARAMETRI LIBERI y, z , SOLUZIONE PARTICOLARE $y=z=0, x=1$.
 SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO $\begin{cases} x-z=0. \text{ Base } y=1, z=0 \end{cases}$

SI TROVA $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ PER $y=0, z=1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ EQUAZIONE PARAMETRICA

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ PER } x=-1 \text{ SI TROVA } (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

RIDUCENDO CON GAUSS. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \implies y=1 \\ -2y=-2 \\ x+z=-3 \end{cases}$$

PARAMETRO LIBERO z , SOLUZIONE PARTICOLARE $z=0$,

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO $y=0, x+z=0$,
 BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI $z=1$, BASE

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLO SPAZIO DELLE
 SOLUZIONI $X = t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

~~ESERCIZIO 2 B~~
~~ESERCIZIO 2 B~~
~~ESERCIZIO 2 B~~

ESERCIZIO 2 B

CERCHIAMO UN VETTORE DIRETTORE DELLA RETTA r
 CIOE' UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI
 DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$
 CIOE' $z = x+2y$, $x - y + (x+2y) = 0$, $2x+y=0$, $y = -2x$
 $z = x - 4x = -3x$, base $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. FASCIO DI PIANI

ORTOGONALE AD π , $x-2y-3z+d=0$, IL PASSAGGIO PER P
 IMPONE $d=4$, π HA EQUAZIONE $x-2y-3z+4=0$
 $1+0-1=0$
 $1-0+1=2 \Rightarrow Q \in \pi$. r_1 HA EQUAZIONI PARAMETRICHE

$X = t(P-Q) + Q$ CIOE' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DEL PIANO CONTENENTE π ED r_1
 SONO $X = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, CORRISPONDENTE
 AL SISTEMA

$\begin{cases} s = x-1 \\ x-2s = y \\ -3s = z-1 \end{cases}$ CON MATRICE $\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & x-1 \\ 1 & -2 & | & y \\ 0 & -3 & | & z-1 \end{pmatrix}$

RIIDUCENDO CON GAUSS OTTIENIAMO $\begin{pmatrix} 1 & -2 & y \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & -3 & z-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & y \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & 3x+z-4 \end{pmatrix}$

L'EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO E' QUINDI $3x+z-4=0$
ESERCIZIO 3 B

$L(P+Q) = x^2(P+Q) + (P+Q)(1) - (P+Q)(0) = (x^2P + P(1)) - P(0) + (x^2Q + Q(1)) - Q(0)$
 $= L(P) + L(Q)$. $L(\lambda P) = x^2(\lambda P) + \lambda P(1) - \lambda P(0) = \lambda(x^2P + P(1)) - \lambda P(0) = \lambda L(P)$
 QUINDI L'E' LINEARE. $L(1) = x^2 \cdot 1 + 1 - 1 = x^2$, $L(x) = x^2 \cdot x + 1 - 0 = x^3 + 1$, $L(x^2) = x^2 \cdot x^2 + 1 - 0 = x^4 + 1$. QUINDI LA MATRICE
 ASSOCIATA RISPETTO ALLE BASI DATI E'

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$K[x] L = \{ P = a_0 + a_1x + a_2x^2 : L(P) = 0 \} \Rightarrow$

~~CONTINUAZIONE DELL'ESERCIZIO 3. COMP. 10 B~~

~~LA MATRICE ASSOCIATA AD L RISPETTO ALLE BASI~~
 ~~$\{1, x, x^2\}$ $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$~~



~~$S_{\mathbb{R}} P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$~~

~~10 B~~ CONTINUAZIONE DELL'ESERCIZIO 3: B.

$$\text{Ker } L = \left\{ P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \begin{array}{l} x^2 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \\ + a_0 + a_1 + a_2 = a_0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_2 x^4 + a_1 x^3 + a_0 x + a_1 + a_2 = a_0 \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Ker } L = \{0\} \quad \dim \text{Im } L + \dim \text{Ker } L = 3 \Rightarrow$$

$$\dim \text{Im } L = 3$$