6.1) Nel piano proiettivo numerico reale, considera i punti $A[1,0,1]$ e $B[3,6,-3]$. Considera, inoltre, la proiettività φ associata all'applicazione $\varphi_l : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\varphi_l(X_0, X_1, X_2) = (2X_0 + X_1, X_0 - X_1 + X_2, X_0 + X_1)$.

a) Determina equazione omogenea ed equazioni parametriche della retta r passante per $A[1,0,1]$ e $B[3,6,-3]$.

b) Determina l'equazione del fascio di rette per A.

c) Determina l'immagine di A, B, r rispetto alla proiettività φ e equazioni parametriche dell'immagine di r tramite φ.

d) Determina l'equazione omogenea dell'immagine tramite φ della retta s di equazione $X_0 + X_1 + X_2 = 0$.

6.2) a) In $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, verifica che sono in posizione generale i punti: $P_1[2,1,4]$, $P_2[0,1,1]$, $P_3[1,3,1]$, $P_4[1,-1,1]$.

b) Determina equazioni per la proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che $\varphi([1,0,0]) = P_1$, $\varphi([0,1,0]) = P_2$, $\varphi([0,0,1]) = P_3$, $\varphi([1,1,1]) = P_4$.

6.3) Nel piano proiettivo numerico $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, considera le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_0 - 2X_2 = 0$ e $s : X_0 + 5X_1 = 0$ rispettivamente. Determina un cambio di coordinate omogenee $[\vec{Y}] = [M\vec{X}]$ rispetto al quale la retta r abbia equazione omogenea $Y_1 = 0$, mentre la retta s abbia equazione omogenea $Y_0 = 0$.

6.4) Determina le equazioni di una proiettività non identica $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che il punto $P[1,0,1]$ sia fisso e la retta r di equazione $X_1 + X_2 = 0$ sia fissa punto a punto.

6.5) Nella retta proiettiva numerica $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$, fissa i punti $A[1,-1]$, $B[2,1]$, $C[1,3]$, $D[3,1]$.

Determina le equazioni del cambio di coordinate omogenee necessario per ottenere il riferimento nel quale A, B, C sono i punti fondamentali e il punto unità. Inoltre, calcola le coordinate omogenee del punto D nel nuovo riferimento.

6.6) Nella retta proiettiva reale, siano $A[1,0]$, $B[0,1]$, $C[1,1]$, $D[d_0,d_1]$.

a) Determina il birapporto $(BACD)$ e confrontalo con $(ABCD)$.

b) Discuti se è possibile che (A,B,C,D) e (B,A,C,D) siano quaterne proiettive.

6.7) Nel piano proiettivo $\mathbf{P}^2_K$, considera i punti $A[1,0,7]$, $B[2,-1,5]$, $C[4,-3,1]$, $D[3,-1,12]$.

Verifica che i punti A, B, C, D sono allineati e calcola il birapporto $(ABCD)$.

6.8) Nella retta proiettiva numerica, fissa i punti $A[1,2]$, $B[3,-1]$, $C[2,1]$, $D[2,-5]$. Determina il birapporto $(ABCD)$.

6.9) a) In $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, verificare che i seguenti punti sono in posizione generale: $A'[2,0,7]$, $B'[2,1,1]$, $C'[1,1,0]$, $D'[0,0,1]$.

b) Determinare la matrice della proiettività $\omega : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che $\omega([1,0,0]) = A'$, $\omega([0,1,0]) = B'$, $\omega([0,0,1]) = C'$, $\omega([1,1,1]) = D'$.

Cenni di soluzione

6.1) La retta r passante per A e per B ha equazione omogenea

$$det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

ed equazioni parametriche: $\rho\mathbf{X} = (\lambda + \mu, 2\mu, \lambda - \mu)$, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Il fascio di rette per il punto A è costituito da tutte le rette di equazione omogenea $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ tale che le coordinate omogenee di A soddisfano l'equazione, cioè $a+c = 0$. Le equazioni cercate sono dunque tutte e sole della forma: $\lambda(X_0 - X_2) + \mu X_1 = 0$, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Completare la parte rimanente.

6.2) a) Occorre controllare che i punti non siano a tre a tre allineati, cioè che sia non nullo il determinante delle matrici quadrate aventi per righe (o per colonne) le coordinate omogenee di 3 distinti tra essi. Si denotino con $\vec{p}_1 = (2, 1, 4)^t$, $\vec{p}_2 = (0, 1, 1)^t$, $\vec{p}_3 = (1, 3, 1)^t$ e $\vec{p}_4 = (1, -1, 1)^t$ i vettori colonna di coordinate omogenee per P_1, P_2, P_3 e P_4 rispettivamente. Si verifica facilmente che det $(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3) = -7$, det $(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_4) = 1$, det $(\vec{p}_1\vec{p}_3\vec{p}_4) = -8$, det $(\vec{p}_2\vec{p}_3\vec{p}_4) = -4$. Si conclude che i punti sono in posizione generale.

b) Cerchiamo la matrice M che rappresenta, rispetto alla base canonica, l'applicazione φ_l associata alla proiettività φ. Le condizioni $\varphi([1, 0, 0]) = P_1$, $\varphi([0, 1, 0]) = P_2$, $\varphi([0, 0, 1]) = P_3$ assicurano che la matrice M sia della forma $M = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & \nu \\ \lambda & \mu & 3\nu \\ 4\lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}$ con $\lambda\mu\nu \neq 0$. La condizione $\varphi([1, 1, 1]) = P_4$ impone che (λ, μ, ν) siano parte di una soluzione $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ a entrate non nulle del sistema $\begin{cases} 2\lambda + \nu = \rho \\ \lambda + \mu + 3\nu = -\rho \\ 4\lambda + \mu + \nu = \rho \end{cases}$. In base alla teoria dei sistemi lineari omogenei (e ricordando che l'ultima colonna della matrice dei coefficienti è l'opposto delle coordinate omogenee di P_4), le soluzioni di tale sistema sono tutti e soli i vettori che sono proporzionali a $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \rho_0)$ ove $\lambda_0 =$ - det $(\vec{p}_2\vec{p}_3\vec{p}_4) = 4$, $\mu_0 =$ det $(\vec{p}_1\vec{p}_3\vec{p}_4) = -8$, $\nu_0 =$ -det $(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_4) = -1$, $\rho_0 =$ det $(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3) = -7$. Si ricava la matrice $M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 4 & -8 & -3 \\ 16 & -8 & -1 \end{pmatrix}$. La proiettività $\varphi([\vec{X}]) = [\vec{Y}]$ è definita dall'equazione matriciale $\tau\vec{Y} = M\vec{X}$ $(\tau \neq 0)$.

6.3) Per mostrare che le rette sono distinte, basta controllare che le equazioni omogenee di r e s non siano proporzionali, il che è vero perché rg $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Le coordinate omogenee del loro punto di intersezione si determinano, ad esempio, prendendo i minori, a segno alterno, ottenuti cancellando a turno le colonne della matrice dei coefficienti. Risulta $H = [det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, -det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}] = [10, -2, 5]$.

b) **Primo modo** Si fissi $P_1 = H$ e si scelgano $P_2 \neq P_1$ in r, $P_3 \neq P_1$ in s e P_4 esterno a r e s (in tal modo i punti P_1, P_2, P_3 e P_4 risultano in posizione generale). Il cambio di coordinate cercato può essere ottenuto imponendo che l'immagine di P_1 sia l'intersezione $Q_1[0, 0, 1]$ (è l'intersezione tra le immagini richieste), l'immagine di P_2 sia un punto $Q_2 \neq Q_1$ con $X_2 = 0$, l'immagine di P_3 sia un punto $Q_3 \neq Q_1$ con $X_1 = 0$, l'immagine di P_4 sia un punto Q_4 con prima e seconda coordinata entrambe non nulle. Ad esempio, è possibile scegliere $P_1[10, -2, 5] = H$, $P_2[0, 1, 0]$, $P_3[0, 0, 1]$ e $P_4[1, 1, 1]$ siano due punti distinti $Q_1[0, 0, 1]$, $Q_2[1, 0, 0]$, $Q_3[0, 1, 0]$ e $Q_4[1, 1, 1]$.

Cerchiamo, per semplicità il cambio inverso $[\mathbf{X}] = [N\mathbf{Y}]$. La matrice N sarà della forma

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10\nu \\ \lambda & 0 & -2\nu \\ 0 & \mu & 5\nu \end{pmatrix} \quad \lambda\mu\nu \neq 0$$

con la condizione che esista $\rho \neq 0$ tale che $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ siano soluzione di

$$\begin{cases} 10\nu - \rho = 0 \\ \lambda - 2\nu - \rho = 0 \\ \mu + 5\nu - \rho = 0 \end{cases}.$$

Una soluzione particolare $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \rho_0)$ si trova considerando i minori 3×3, con segni alterni, ottenuti cancellando le colonne della matrice dei coefficienti del sistema. Risulta $\lambda_0 = -12$, $\mu_0 = -5$, $\nu_0 = -1$, $\rho_0 = 10$, di modo che

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -12 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

La matrice M cercata è un qualsiasi multiplo scalare non nullo dell'inversa di N. Ad esempio,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Secondo modo Il cambio può essere ottenuto scegliendo due punti distinti P_1 e P_2 in r e due punti distinti P_3 e P_4 in s in modo tale che punti P_1, P_2, P_3 e P_4 siano in posizione generale e imponendo che le immagini di P_1 e P_2 siano due punti distinti Q_1 e Q_2 di $Y_2 = 0$, mentre le immagini di P_3 e P_4 siano due punti distinti Q_3 e Q_4 di $Y_1 = 0$ (e assicurandosi che Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 siano in posizione generale). Ad esempio, è possibile scegliere $P_1[2,0,1]$, $P_2[0,1,0]$, $P_3[5,-1,0]$ e $P_4[0,0,1]$ e $Q_1[1,0,0]$, $Q_2[1,0,1]$, $Q_3[0,1,0]$ e $Q_4[0,1,1]$.

6.4) La retta r è generata dai due punti $A = [1,0,0]$ e $B = [0,1,-1]$. Poniamo $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$, $\vec{e}_3 = (1,0,1)$ e definiamo $W =< \vec{e}_1, \vec{v}_2 >$ e $U =< \vec{v}_3 >$. L'applicazione lineare φ_l associata alla proiettività cercata deve essere tale che $\vec{v}_3$ sia un autovettore e W sia contenuto in un autospazio di φ_l. Poichè U e W sono in somma diretta (perchè $P \notin r$) e la loro somma ha dimensione 3, se si vuole che φ non sia l'identità occorre che W coincida esattamente con un autospazio e l'autovalore ad esso relativo sia differente dall'autovalore di $\vec{v}_3$. Ad esempio, possiamo scegliere 1 come autovalore di $\vec{v}_3$ e 2 come autovalore di autospazio W. L'applicazione φ_l è allora individuata dalle condizioni: $\varphi_l(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1$, $\varphi_l(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$, $\varphi_l(\vec{v}_3) = \vec{v}_3$. Denotando con M la matrice che ha per colonne (nell'ordine) le componenti di $\vec{e}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ in base canonica, risulta che la corrrispondente φ ha matrice A con $A = M \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Osserviamo che scelte diverse degli autovalori avrebbero prodotto proiettività differenti.

6.5) Seguire la dimostrazione del teorema fondamentale delle proiettività e riflettere sulla definizione di birapporto.

6.6) a) $(BACD) = [d_1, d_0]$: si osservi che si sono scambiati i ruoli delle due entrate delle coordinate omogenee.

Per capire cosa è successo, possiamo ragionare come segue. Se considero A come punto improprio, l'insieme $\mathbf{P}^1 \setminus A$ viene identificato con una retta affine tramite la posizione:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{P}^1 \setminus A & \to & \mathbf{R} \\ [X_0, X_1] & \mapsto & X_0/X_1 = x \end{array}$$

Rifacciamo la stessa procedura assegnando a B le coordinate $[1,0]$, ad A le coordinate $[0,1]$ e a C le coordinate $[1,1]$. Il cambio di coordinate è $\rho Y_0 = X_1$, $\rho Y_1 = X_0$ con $\rho \neq 0$. L'applicazione corrispondente risulta:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{P}^1 \setminus B & \to & \mathbf{R} \\ [Y_0, Y_1] & \mapsto & Y_0/Y_1 = X_1/X_0 = 1/x. \end{array}$$

c) Le due quaterne sono proiettive se e solo se hanno lo stesso birapporto. Devo chiedermi se esiste $D[d_0, d_1] \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $[d_0, d_1] = [d_1, d_0]$: ciò accade se e solo se $det \begin{pmatrix} d_0 & d_1 \\ d_1 & d_0 \end{pmatrix} = 0$, cioè se $d_0 = \pm d_1$; ciò corrisponde a due possibili scelte per D: $D_+ = C[1,1]$ oppure $D_-[1,-1]$.

Rivedo l'esercizio in un'altro modo. Determino esplicitamente la matrice della proiettività $\omega : \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $\omega(A) = B$, $\omega(B) = A$, $\omega(C) = C$. Ricavo che $\omega([X_0, X_1]) = [X_1, X_0]$, cioè ω è associata alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora devo scegliere D tale che $\omega(D) = D$: le coordinate (d_0, d_1) devono soddisfare

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

Dunque come rappresentante delle coordinate di D devo scegliere un autovettore di M. Si verifica facilmente che M è diagonalizzabile e D_+ e D_- corrispondono ad una base di autovettori.

Notare inoltre che $\omega \circ \omega = id$: se compongo ω con se stessa, trovo l'identità (riscambiando i primi due punti, A e B ritornano nella posizione originaria). Si dice che ω è una involuzione.

6.7) Per controllare che i punti sono allineati, basta osservare che i vettori $(1,0,7)$, $(2,-1,5)$, $(4,-3,1)$, $(3,-1,12)$ generano un sottospazio di dimensione 2 in $\mathbf{R}^3$, che è la retta di equazione

$$det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

Uso $(1,0,7)$, $(2,-1,5)$ come base del sottospazio vettoriale corrispondente alla retta e parametrizzo i punti della retta utilizzando questi vettori. Il punto A ha coordinate omogenee $[1,0]$, mentre B ha coordinate $[0,1]$. Ricavo $(4,-3,1) = -2(1,0,7) + 3(2,-1,5)$ e dunque C ha coordinate omogenee $[-2,5]$. Infine, $(3,-1,12) = (1,0,7) + (2,-1,5)$, dunque D ha coordinate $[1,1]$. Ora calcolo il birapporto utilizzando le coordinate omogenee introdotte sulla retta. Ricavo $(ABCD) = [-3,2] = [3,-2]$.