Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica -Geometria 2

Nello spazio euclideo $\mathbf{E}$, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, R = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$, con coordinate (x_1, x_2, x_3). Considera lo spazio complessificato $\mathbf{E_C}$.

3.a.1) Determina equazioni cartesiane a coefficienti reali di una retta reale r passante per $P(2, 3-i, 6i)$.

3.a.2) La retta r ha equazioni cartesiane: $3ix_1 + x_2 + (5+18i)x_3 - (7+27i) = 0$, $x_1 + ix_2 + (6+5i)x_3 - 9 - 7i = 0$. Determina un vettore direttore di r e discuti se la giacitura di r è reale.

3.a.3) Sia π il piano di equazione cartesiana $3ix_1 - 5x_2 + (2-i)x_3 + 5 = 0$.

i) Determina una base della giacitura e equazioni parametriche per π.

ii) Determina una descrizione parametrica di $\pi \cap \overline{\pi}$, discutendo se il piano π è reale.

3.a.4) Considera i piani $\alpha : x_1 - x_2 + ix_3 + 5 = 0$ e β: $x_1 + ix_2 + ix_3 + 3 = 0$.

i) Usando i minori, determina un vettore direttore per la retta $r = \alpha \cap \beta$.

ii) Determina la posizione relativa tra r e la coniugata $\overline{r}$.

3.a.5) Siano fissati il punto $P(3+i, 2-i, -3+2i)$ e i piani α e β di equazione cartesiana, rispettivamente,

$$\alpha : (2i-3)x_1 + ix_2 + x_3 - 4i + 1 = 0, \quad \beta : -3ix_1 + ix_3 + 1 = 0.$$

i) Determina equazioni cartesiane reali di una retta reale s passante per P, se essa esiste.

ii) Determina equazioni cartesiane reali di un piano reale che contiene la retta $r = \alpha \cap \beta$. Se tale piano non esiste, motivare la risposta.

iii) Determina l'equazione del fascio di piani paralleli a α.

iv) Discuti se il piano α è reale e determina un vettore parallelo sia ad α che ad $\overline{\alpha}$.

v) Discuti se la giacitura di β è reale. Qual'è l'intersezione tra β e il coniugato $\overline{\beta}$?

3.a.6) Determina la matrice associata (rispetto alla base canonica) all'applicazione bilineare $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definito da $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + 5x_1y_3 + x_2y_1 + 5x_3y_1 + 4x_3y_3$. L'applicazione φ è un prodotto scalare?

3.a.7) Considera il prodotto scalare su $\mathbf{R}^3$ definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}$, ove: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Determina la dimensione ed una base per ciascuno dei sottospazi $< \vec{e}_1 = (1,0,0) >^\perp$, $< \vec{v} = (1,1,1) >^\perp$ e $< \vec{e}_3 = (0,0,1) >^\perp$. Determina, inoltre, una base ortogonale per φ.

3.a.8) Considera il prodotto scalare su $V = \mathbf{R}^4$ definito da $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}$, ove: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Determina la dimensione ed una base di sottospazi U e W tali che $V = U \oplus^\perp W$, dim W = rango (φ) e la restrizione di φ a W sia non degenere.

3.a.9) Sia V lo spazio delle matrici quadrate reali di ordine 2. Considera l'applicazione $\varphi : V \times V \to \mathbf{R}$ definita da $\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = traccia(\mathbf{AB})$. Mostra che $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ è un prodotto scalare e calcolane il rango. Determina un vettore non nullo ortogonale a se stesso. Posso trovare un sottospazio di dimensione 2 sul quale φ induce il prodotto scalare nullo?

3.a.10) Sia W un sottospazio invariante per un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V. Mostra che, per se $U \leq W$, l'applicazione $\overline{f} : V/U \to V/W$, $[v]_U \mapsto [f(v)]_W$ è ben definita a lineare.

Altri Esercizi

3.b.1) Controlla se i vettori $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

3.b.2) Siano $\vec{u} = (1-i, 4+i, i)$, $\vec{w}_1 = (2+i, 3, 1-3i)$, $\vec{w}_2 = (3+i, 3+3i, -2+4i)$. Discuti se il sottospazio $U = Span(\vec{u})$ (risp., $W = Span(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$) è reale.

3.b.3) Considera i punti $A(7+i, 1-i, 3)$, $B(3-2i, 5+i, 4i)$, $C(1-i, 6+2i, 1+i)$, $D(-3-4i, 10+8i, -2+5i)$.

i) Discuti se i vettori applicati (A, B) e (C, D) sono equipollenti.

ii) Discuti se i vettori applicati (A, B) e (C', D') sono equipollenti ove $C'(3-i, 2i, 7+3i)$, $D'(-1-4i, 3-i, 1+i)$.

iii) Verifica se (A, B) (rispettivamente, (C, D) e (C', D')) individua un vettore che può essere rappresentato da una coppia di punti di $\mathbf{E}$.

3.b.4) Denota con $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori liberi di $\mathbf{E_C}$. Siano $\mathbf{v}$ un vettore di componenti (x_1, x_2, x_3) e $\mathbf{w}$ un vettore di componenti (y_1, y_2, y_3) in $\mathcal{R}$.

i) Se $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ è il cambio di coordinate tra $\mathcal{R}$ e un altro riferimento reale $\mathcal{R}'$, quali sono le compomenti di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}'$?

ii) Posto $\mathbf{u}$ il vettore che ha componenti $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ in $\mathcal{R}$, dimostra che in ogni riferimento reale le componenti di $\mathbf{u}$ sono la somma delle componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nello stesso riferimento. Osserva che in tal modo è possibile definire $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u}$ in modo che la posizione non dipenda dalla scelta del riferimento.

3.b.5) Considera un punto P. Mostra che è ben definito il punto $\overline{P}$ che, in un qualsiasi riferimento reale, ha come coordinate il vettore coniugato delle coordinate di P. Mostra, inoltre, che i punti di $\mathbf{E}$ sono esattamente i punti P per i quali $P = \overline{P}$.

3.b.6) Sia r l'insieme dei punti di coordinate $(1+i+t(-i), 5+t(2-6i), t)$, al variare di $t \in \mathbf{C}$. Descrivi l'immagine di r rispetto al coniugio.

3.b.7) Fissati i punti $L(3+i, 2i, 9-3i)$ e $M(3, -1+i, -i)$, determinare le componenti del vettore $\mathbf{LM}$.

3.b.8) Controlla se il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e quello generato da $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

3.b.9) Determina una descrizione parametrica dell'insieme delle soluzioni in $\mathbf{C}^3$ del sistema lineare:

$$\begin{cases} (2-i)x - 3y + z = 0 \\ 3x + (1+i)y + iz = 0 \end{cases}$$

3.b.10) Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$x_1 + (2i-3)x_2 + 2ix_3 + i = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 + 1 - i = 0.$$

i) Discuti la posizione relativa di r e della sua coniugata.

ii) Discuti se r ha punti reali.

3.b.11) Il piano π di equazione cartesiana $x_1 - x_2 - x_3 + i = 0$ ha punti reali?

3.b.12) Considera fissati i punti $A(2-7i,5,i+4)$, $B(1,12-4i,9i)$, $D(1-7i,-17,i+9)$, $G(14i-1,26-12i,25i-8)$, $H(-4+i,2+11i,16-3i)$.

i) Determina equazioni cartesiane e parametriche per la retta r passante per A e B (e, rispettivamente, della retta s passante per C e D). Discutere la mutua posizione di r e s.

ii) Controlla se i punti A, B, G sono allineati (cioè se esiste una retta che li contiene tutti e tre).

iii) Determina un vettore parallelo alla retta s di equazioni: $3x-(2+i)y+iz=0, 5ix+4z+i=0$. Discuti se la giacitura di s è un sottospazio reale dello spazio dei vettori complessi.

iv) Determina equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per $P(1,1,1)$ e parallela a $\mathbf{v}_1(2+i,1+4i,-1+3i)$. Qual è l'intersezione tra r e l'immagine $\overline{r}$ di r rispetto al coniugio?

v) Determina una equazione cartesiana ed equazioni parametriche per un piano α passante per A, B, H. Tale piano è unico? Determina inoltre la giacitura del piano α e discutere se tale giacitura è un sottospazio reale dello spazio dei vettori liberi.

vi) Determina le coordinate del vettore libero $\mathbf{v}$ individuato dalla coppia ordinata (A,B). Determinare, inoltre, le coordinate del vettore coniugato $\overline{\mathbf{v}}$. Infine, determinare parte reale e parte immaginaria di $\mathbf{v}$.

vii) Considera l'inclusione naturale ι dell'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi dello spazio euclideo nell'insieme $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ dei vettori liberi dello spazio complesso. La coppia ordinata (A,D) rappresenta un vettore appartenente all'immagine di ι?

3.b.13) Sia r la retta di equazioni parametriche $x=2+7i\,t, y=3-(1+i)\,t, z=2$.

i) Discuti se la retta r è reale e la mutua posizione con $\overline{r}$.

ii) Discuti l'esistenza di un piano reale contenente r.

3.b.14) Sia r la retta di equazioni cartesiane $ix-(5+6i)\,y+z+4=0, (5+5i)\,y-(1+i)\,z=-1-i$. Determina equazioni cartesiane reali di un piano reale passante per r, se tale piano esiste.

3.b.15) Determina la matrice simmetrica associata (rispetto alla base canonica) alla forma quadratica $\Phi:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ definito da $\Phi(\mathbf{x})=x_1x_2+5x_2^2+3x_1x_3+8x_2x_3+x_3^2$. La forma quadratica è definita? è degenere?

Soluzione. La matrice cercata ha

- come elemento di posto (i,i), il coefficiente di x_i^2 nell'espressione di Φ;
- come elemento di posto (i,j), la metà del coefficiente di x_ix_j nell'espressione di Φ.

Risulta $M(\Phi)=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 5 & 4 \\ 3/2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

La forma quadratica non è definita, perchè $\Phi(1,0,0)$=0. La forma quadratica è non degenere, perchè det $M(\Phi)\neq 0$.

Segna tutte e sole le risposte giuste:

Test 1 *La retta di equazioni parametriche:*

$$x_1=4+t, x_2=-t, x_3=3+2t, \quad t\in\mathbf{R}$$

(a) passa il punto $(1,-1,1)$*;*

(b) è ortogonale al piano di equazione $x_1-x_2+2x_3=100$*;*

(c) ha distanza $\sqrt{73}/3$ *dall'origine;*

(d) *è contenuta nel piano di equazione* $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Test 2 *Si consideri la retta* r *dello spazio di equazioni*

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 + 1 = 0$$

e la retta s *passante per i punti* $(1, 1, 1)$ *e* $(-1, 0, 2)$.

(a) r *e* s *sono parallele;*

(b) r *e* s *appartengono al piano di equazione* $x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 1 = 0$.

(c) r *e* s *sono sghembe.*

Test 3 *La rotazione di* $\pi/4$ *in senso orario attorno al punto* $(1, 1)$:

(a) *ha equazioni* $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + 1 - \sqrt{2}$;

(b) *ha equazioni* $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 2) + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + 1$;

(c) *ha una retta di punti fissi.*

Test 4 *Quali delle seguenti affermazioni sono vere riguardo ai tre piani dello spazio aventi equazioni:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 1 \quad x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 :$$

(a) *i tre piani sono paralleli;*

(b) *i tre piani sono paralleli ad una stessa retta;*

(c) *i tre piani appartengono ad una stella impropria;*

(d) *l'intersezione dei tre piani è vuota;*

(e) *il terzo piano è ortogonale alla retta intersezione dei primi due.*

Test 5 *L'affinità di equazioni:*

$$y_1 = x_1 - x_2 + 1, y_2 = x_1 + 2x_2$$

(a) *ha un unico punto fisso (cioè un punto che viene mandato in se stesso) che è il punto* $(-1, 1)$;

(b) *non ha punti fissi;*

(b) *non muta in sè alcuna retta del piano;*

(d) *muta in sè almeno una retta del piano;*

(e) *ha il punto fisso* $(1, -1)$.