UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2011-12 seconda settimana

Consideriamo $\mathbf{C}^3$ come la complessificazione dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Su $\mathbf{C}^3$ considera il prodotto scalare indotto.

2.1) Discuti se il sottospazio W generato da $\mathbf{v}_1 = (1+i, 1+2i, 3-i)$ è reale (analoga domanda per il sottospazio U generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 = (-2i, -1-3i, 4-2i)$). In caso positivo, determina un riferimento reale per il sottospazio.

2.2) Considerai vettori $\mathbf{v}_1 = (-2+i, 2i, 2+i)$ e $\mathbf{v}_2 = (1+i, 0, 1-i)$. Discuti se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono isotropi e determina il prodotto scalare $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$.

Nello spazio euclideo $\mathbf{E}$, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = \{O, R = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$, con coordinate x, y, z. Considera lo spazio complessificato $\mathbf{E}_{\mathbf{C}}$.

2.4) Fissati i punti $A(3+i, 2i, 9-3i)$ e $B(3, -1+i, -i)$, determinare le componenti in $\mathcal{R}$ del vettore $\mathbf{AB}$ dato dalla classe di equipollenza di (A, B).

2.5) Determina una coppia ordinata (A, B) di punti immaginari che individua un vettore che ha componenti reali in $\mathcal{R}$.

2.6) Considera i punti $A(7+i, 1-i, 3, 1+i)$, $B(3-2i, 5+i, 4i, 12-3i)$, $C(1-i, 6+2i, 1+i, 5)$, $D(-3-4i, 10+8i, -2+5i, 16-4i)$.

a) Discuti se i vettori applicati (A, B) e (C, D) sono equipollenti.

b) Discuti se i vettori applicati (A, B) e (C', D') sono equipollenti ove $C'(3-i, 2i, 7+3i)$, $D'(-1-4i, 3-i, 1+i, -4+i)$.

c) Verifica se (A, B) (rispettivamente, (C, D) e (C', D')) individua un vettore che pu essere rappresentato da una coppia di punti di $\mathbf{E}$.

2.7) Denota con $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori liberi di $\mathbf{E}_{\mathbf{C}}$. Siano $\mathbf{v}$ un vettore di componenti (x_1, x_2, x_3) e $\mathbf{w}$ un vettore di componenti (y_1, y_2, y_3) in $\mathcal{R}$.

a) Se $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ è il cambio di coordinate tra $\mathcal{R}$ e un altro riferimento reale $\mathcal{R}'$, quali sono le compomenti di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}'$?

b) Posto $\mathbf{u}$ il vettore che ha componenti $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ in $\mathcal{R}$, dimostra che in ogni riferimento reale le componenti di $\mathbf{u}$ sono la somma delle componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nello stesso riferimento. Osserva che in tal modo è possibile definire $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u}$ in modo che la posizione non dipenda dalla scelta del riferimento.

2.8) Considera un punto P. Mostra che è ben definito il punto $\overline{P}$ che, in un qualsiasi riferimento reale, ha come coordinate il vettore coniugato delle coordinate di P. Mostra, inoltre, che i punti di $\mathbf{E}$ sono esattamente i punti P per i quali $P = \overline{P}$.

2.1) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ una applicazione lineare. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$ un vettore tale che $f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ ma $f(f(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$. Mostra che $\mathbf{v}$ e $f(\mathbf{v})$ sono linearmente indipendenti.