10.1) Senza fare conti, individua le matrici con determinante nullo nel seguente elenco.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.2) Calcola i determinanti richiesti.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$det(A) = \ldots$; $det(B) = \ldots$; $det(3A) = \ldots$; $det(A + B) = \ldots$; $det(AB) = \ldots$.

10.3) Calcola il determinante della matrice B utilizzando la riduzione della matrice.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione (le procedure corrette sono molte):

$$det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4.$$

10.4) Calcola il determinante di ciascuna matrice utilizzando lo sviluppo di Laplace. Poi calcolalo nuovamente utilizzando la riduzione della matrice e le proprietà del determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & 6 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad [detA = 6, detB = 0, detC = 15]$$

10.5) Determina i valori del parametro reale k per i quali i vettori $(3k, 1)$ e $(2, k)$ di $\mathbf{R}^2$ sono linearmente dipendenti.

10.6) Calcola il determinante della seguente matrice. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10.7) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ su $\mathbf{R}$ siano fissati i vettori $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 2, 1)$. Determina una equazione cartesiana per il sottospazio W generato da $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, osservando che un vettore $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3)$ è combinazione lineare di $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ se e solo se ha determinante nullo la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10.8) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ su $\mathbf{R}$ siano fissati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0, 1)$. Utilizzando il determinante, determina una equazione cartesiana per il sottospazio W generato da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

10.9) Nello spazio vettoriale reale $V = M(2, 2, \mathbf{R})$ su $\mathbf{R}$ sia fissata la base standard. Rispetto a tale base, determina un sistema di equazioni per il sottospazio generato dalle matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.