L'algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD tra due numeri naturali permette anche di determinare

- un'espressione di un qualsiasi numero razionale, in forma di frazione continua limitata
- una soluzione esplicita per equazioni lineari diofantee risolubili in due indeterminate.

**NUMERI RAZIONALI E FRAZIONI CONTINUE SEMPLICI FINITE**

Consideriamo la frazione $\frac{1763}{51}$ e ricordiamo le divisioni svolte per calcolare MCD (1763,51) =1 mediante l'algoritmo di Euclide:

$1763 = 51 \cdot 34 + 29$ (*)
$51 = 29 \cdot 1 + 22$
$29 = 22 \cdot 1 + 7$
$22 = 7 \cdot 3 + \mathbf{1}$
$7 = 1 \cdot 7 + 0$

In ciascuna espressione, dividiamo entrambi i termini per il divisore:

$1763 = 51 \cdot 34 + 29$ ----------> $\frac{1763}{51} = 34 + \frac{29}{51}$ (**)
$51 = 29 \cdot 1 + 22$ ---------> $\frac{51}{29} = 1 + \frac{22}{29}$
$29 = 22 \cdot 1 + 7$ ---------> $\frac{29}{22} = 1 + \frac{7}{22}$
$22 = 7 \cdot 3 + \mathbf{1}$ ---------> $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$
$7 = 1 \cdot 7 + 0$ ---------> $\frac{7}{1} = 7$

In tal modo, le frazioni nel primo termine risultano decomposte come somma della loro parte intera e della loro parte frazionaria.
Consideriamo ora la prima espressione in (**)

$$\frac{1763}{51} = 34 + \frac{29}{51}$$

La frazione $\frac{29}{51}$ è inversa della frazione descritta nella seconda espressione in (**). Inverto quindi la frazione, poi sostituisco l'espressione ricavata da (**) e ripeto la procedura utilizzando, man mano, le espressioni successive in (**):

$$\frac{1763}{51} = 34 + \frac{29}{51} =$$
$$= 34 + \frac{1}{\frac{51}{29}} = 34 + \frac{1}{1 + \frac{22}{29}} =$$
$$= 34 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{29}{22}}} = 34 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{22}}}$$
$$= 34 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{22}{7}}}} = 34 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}}} =$$
$$= 34 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{7}{1}}}}} = 34 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}}}$$

Concludiamo che

$$\frac{1763}{51} = 34 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}}} \qquad (\blacklozenge).$$

Il termine destro in ($\blacklozenge$) è detto una *frazione continua* e è univocamente individuato dalla successione dei quozienti delle divisioni in (*). Introduciamo un nuovo simbolo e scriviamo $\frac{1763}{51} = [34; 1,1,3,7]$ mettendo in evidenza che 34 è la parte intera della frazione $\frac{1763}{51}$.
La procedura può essere applicata per ogni numero razionale. Iniziamo introduciamo in modo più esplicito la notazione che verrà utilizzata:

**Definizione**. Una ***frazione continua finita*** è una espressione della forma

$$a_o + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}} \qquad (\lozenge)$$

ove $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono numeri complessi. La frazione è detta ***semplice*** se i coefficienti$a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono interi. I coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono chiamati *termini della frazione continua* o ***quozienti parziali*** della frazione continua.
La frazione ($\lozenge$) viene indicata con il simbolo

$$[\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Utilizzeremo quasi sempre frazioni continue semplici, assumendo che $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.
Osserviamo che **ogni frazione continua semplice finita descrive un numero razionale (che è detto il *valore* della frazione continua):** per individuare tale numero razionale, è sufficiente svolgere le operazioni come nell'esempio:

$$\begin{aligned}[19; 7, 3, 5] &= 19 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}} = 19 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\frac{5*3+1}{5}}} = 19 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\frac{16}{5}}} = \\ &= 19 + \cfrac{1}{7 + \frac{5}{16}} = 19 + \cfrac{1}{\frac{16*7+5}{16}} = 19 + \cfrac{1}{\frac{117}{16}} = \\ &= 19 + \frac{16}{117} = \frac{117*19+16}{117} = \\ &= \frac{2239}{117}\end{aligned}$$

Nello svolgere i calcoli, vengono calcolati, nell'ordine,

$3 + \frac{1}{5} = [3; 5]$

$7 + \frac{5}{16} = [7; 3, 5]$

e poi il complessivo [19; 7, 3, 5]

**Osservazioni**

1) $a_0$ è la parte intera della frazione semplice $[\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$
2) $[\, a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 * a_1 + 1}{a_1}$
3) $[\, a_0; a_1, a_2] = [\, a_0; [a_1; a_2]] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \cfrac{1}{\frac{a_1 * a_2 + 1}{a_2}} = \frac{a_0 * a_1 * a_2 + a_2 + a_0}{a_1 * a_2 + 1}$
4) $[\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, [a_{n-1}; a_n]]$
5) $[\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [\, a_0; [a_1; a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]]$
6) $[\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [\, a_0; a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, [a_m; a_{m+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n]]$ per ogni $0<m\leq n$

**Mostriamo ora che, viceversa, ogni numero razionale può essere espresso in forma di frazione continua semplice finita**. Per descrivere la frazione $\frac{a}{b}$ in forma di frazione continua, operiamo la successione di divisioni prevista dall'algoritmo di Euclide per il calcolo di MCD($a$,$b$):

$a(= r_{-1}) = b \cdot q_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b = r_0$

$b = r_1 \cdot q_2 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 \qquad 0 \leq r_3 < r_2$

………

$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n \qquad 0 \leq r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + 0$

Ora, per ciascuna delle divisioni operate, dividiamo per il quoziente entrambi i termini:

$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} \qquad 0 \leq r_1 < b \qquad (**)$

$\frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} \qquad 0 \leq r_2 < r_1$

$\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2} \qquad 0 \leq r_3 < r_2$

………

$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n + \frac{r_n}{r_{n-1}} \qquad 0 \leq r_n < r_{n-1}$

$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_{n+1} + 0$

A partire dalla prima delle espressioni così ottenute

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b}$$

invertiamo la frazione che ha per numeratore il resto e sostituiamo l'espressione della frazione inversa ricavata dalla divisione successiva in (**). Ripetiamo la procedura fino a esaurire tutte le espressioni:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= q_1 + \frac{r_1}{b} = \\
&= q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}} = \\
&= q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{r_3}{r_2}}} = \\
&= \ldots\ldots \\
&= q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{q_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}}}}}} = \\
&= q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{q_n + \frac{1}{q_{n+1}}}}}}}
\end{aligned}$$

Ricavando l'espressione $\frac{a}{b} = [q_1; q_2, q_3, \ldots, q_n, q_{n+1}]$

Dunque, **ogni numero razionale può essere espresso in forma di frazione continua semplice finita**, ove i quozienti parziali sono (nell'ordine) i quozienti delle divisioni operate nell'algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD.

Si osservi che i quozienti parziali possono ripetersi e, a differenza della successione dei resti delle divisioni, non sono necessariamente decrescenti.

**Esempio**

Consideriamo la frazione $\frac{44880}{5292}$ e ricordiamo le divisioni svolte per calcolare MCD (44880, 5292) = 12 mediante l'algoritmo di Euclide:

44880 = 5292 · 8+2544 (*)
5292 = 2544 · 2 +204
2544 = 204 · 12 + 96
204 = 96 · 2 + **12**
96 = 12 · 8 + 0

In ciascuna espressione, dividiamo entrambi i termini per il divisore:

44880 = 5292 · 8+2544 ---------> $\frac{44880}{5292} = 8 + \frac{2544}{5292}$ (**)

5292 = 2544 · 2 +204 ---------> $\frac{5292}{2544} = 2 + \frac{204}{2544}$

2544 = 204 · 12 + 96 ---------> $\frac{2544}{204} = 12 + \frac{96}{204}$

204 = 96 · 2 + **12** ---------> $\frac{204}{96} = 2 + \frac{12}{96}$

96 = 12 · 8 + 0 ---------> $\frac{96}{12} = 8$

In tal modo, le frazioni nel primo termine risultano decomposte come somma della loro parte intera e della loro parte frazionaria.

Consideriamo ora la prima espressione in (**)

$$\frac{44880}{5292} = 8 + \frac{2544}{5292}$$

La frazione $\frac{2544}{5292}$ è inversa della frazione descritta nella seconda espressione in (**). Inverto quindi la frazione, poi sostituisco l'espressione ricavata da (**) e ripeto la procedura utilizzando, man mano, le espressioni successive in (**):

$$\frac{44880}{5292} = 8 + \frac{2544}{5292} = 8 + \frac{1}{\frac{5292}{2544}} =$$

$$= 8 + \frac{1}{\frac{5292}{2544}} = 8 + \frac{1}{2 + \frac{204}{2544}} =$$

$$= 8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{2544}{204}}} = 8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{96}{204}}}$$

$$= 8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{\frac{204}{96}}}} = 8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2 + \frac{12}{96}}}} =$$

$$= 8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{96}{12}}}}} = 8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8}}}}$$

Concludiamo che

$$\frac{44880}{5292} = 8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8}}}} = [8; 2,12,2,8] \qquad (\blacklozenge).$$

**Esercizi**

1) Verifica le seguenti uguaglianze

$$\frac{128}{37} = [3; 2,5,1,2] \quad ; \quad \frac{1637}{31} = [52; 1,4,6] \; ; \quad \frac{1547}{560} = [2; 1,3,4, 1, 1]$$

2) Determina il valore delle seguenti frazioni continue [23; 5, 4, 3] , [5; 11, 2, 6]