

**PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2 CON ELEMENTI DI  
STORIA 2, MATEMATICA, 19/01/2016**

Nome .....

Matricola .....

Per ogni risposta, segnare V se è vera, F se è falsa. Ogni test viene valutato 3 punti se vengono date tutte e sole le risposte corrette. Altrimenti, la valutazione è 0. Le coordinate dei punti e i vettori numerici sono scritti come vettori righe.

**Test 1.** Nel piano euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera il punto  $P(2 + i, 1 - i)$ .

VF (a) ogni retta isotropa per  $P$  contiene un punto reale;

VF (b) la retta per  $P$  ortogonale alla retta  $ix - 2y = 0$  contiene il punto  $Q(2i, -1)$ ;

VF (c) non esiste una retta reale per  $P$ .

**Test 2.** Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta  $r$  di equazioni

$$ix_1 - 3ix_2 - 2i + 1 = 0, x_2 + x_3 - i = 0.$$

VF (a) la retta  $r$  non ha punti reali;

VF (b) esiste un piano reale che contiene  $r$  e  $\bar{r}$ ;

VF (c) nel fascio di piani per  $r$  c'è almeno un piano isotropo.

**Test 3.** Nello spazio proiettivo numerico reale  $\mathbb{P}^3$ , considera i punti  $A[1, -1, 0, -1]$ ,  $B[2, -1, 1, 1]$ ,  $C[1, 0, 1, 0]$ ,  $D[3, -3, 0, 1]$ .

VF (a) i punti  $A, B, C, D$  sono complanari;

VF (b) le rette  $A \vee B$  e  $C \vee D$  sono sghembe;

VF (c) la stella di piani di centro  $A$  ha dimensione proiettiva 2.

**Test 4.** Considera la proiettività  $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  definita da

$$\varphi[x_0, x_1, x_2] = [4x_0 + x_1 - x_2, -3x_0 + x_2, 2x_0 + x_1 + x_2].$$

VF (a) il punto  $P[1, -1, 1]$  è fisso per  $\varphi$ ;

VF (b) la retta per  $P$  e per  $Q[-1, 1, -2]$  è globalmente fissa per  $\varphi$ ;

VF (c) I punti fissi di  $\varphi$  sono contenuti in una unica retta.

**Test 5.** Nello spazio proiettivo numerico reale  $\mathbb{P}^5$ , sia  $r$  la retta per  $A[-1, 1, 0, 1, 0, 0]$  e  $B[1, 0, 1, 0, 1, 1]$ .

- V F (a) l'iperpiano di  $\mathbb{P}^5$  di equazione  $x_0 + x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0$  contiene la retta  $r$ ;  
 V F (b) il sottospazio duale di  $r$  ha dimensione 4;  
 V F (c) il sottospazio duale di  $r$  contiene il punto dello spazio duale di coordinate duali  $[1, 0, -1, 1, 0, 0]$ .

**Test 6.** Considera l'inclusione del piano affine reale nel piano proiettivo numerico reale data da  $(x, y) \mapsto [1, x, y]$ , con retta all'infinito  $r_\infty = \{x_0 = 0\}$ . Considera la retta  $r$  di equazione  $2x + 3y - 2 = 0$ .

- V F (a) la parte affine della retta proiettiva di equazione  $x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0$  è parallela ad  $r$ ;  
 V F (b) il completamento proiettivo  $\mathbb{P}(r)$  di  $r$  ha equazione omogenea  $3x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$ ;  
 V F (c) il birapporto dei punti  $A = r \cap \{x = 0\}$ ,  $B = r \cap \{y = 0\}$ ,  $C = [1/2, 1/3]$ ,  $D = \mathbb{P}(r) \cap r_\infty$  è  $[1, -1]$ .

**Test 7.** Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee  $[x_0, x_1, x_2]$  e la conica  $\Gamma$  di equazione  $x_2^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$ .

- V F (a) la conica  $\Gamma$  contiene la retta di equazione  $x_0 + x_1 = 0$ ;  
 V F (b) la conica  $\Gamma$  ha rango 2;  
 V F (c) il punto  $P[1, -1, 0]$  è doppio per  $\Gamma$ .

**Test 8.** Nel piano euclideo complessificato, sia  $\gamma$  la circonferenza di centro il punto  $(1, 1)$  e passante per l'origine:

- V F (a)  $\gamma$  ha equazione  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ;  
 V F (c) la retta tangente a  $\gamma$  nell'origine ha equazione  $x + y = 0$ .  
 V F (d) l'area del triangolo di vertici l'origine e i due punti di intersezione di  $\gamma$  con gli assi  $x$  e  $y$  ha area 1.

**Test 9.** Nel piano euclideo, la conica di equazione  $x^2 - 4y^2 - 2 = 0$ :

- V F (a) è una conica non degenera;  
 V F (c) è tangente alla retta di equazione  $x = -1$ .  
 V F (d) ha per diametro la retta  $x - 4y = 0$ .

**Test 10.** Nel piano euclideo, la conica di equazione  $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 6x - 8y = 0$ :

- V F (a) è una iperbole con centro  $(3, -4)$ ;  
 V F (b) è una iperbole con asse  $2x + y + 10 = 0$ ;  
 V F (c) ha un asintoto parallelo alla retta  $3x = y$  e passante per  $(0, 5)$ .