

Illustrazione di tavola 2

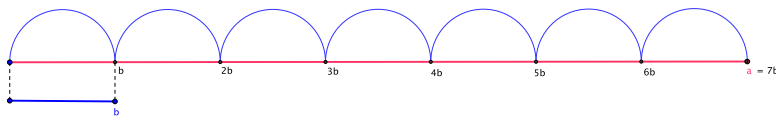
La nozione di massimo comune divisore tra una coppia di numeri naturali viene meglio compresa, se è introdotta e studiata analizzandone il significato in connessione alle proprietà della divisibilità. Nella tavola, viene messa in evidenza una interpretazione geometrica del MCD, che offre spunti di riflessione sulla definizione stessa di MCD e, contemporaneamente, offre un sostegno tramite immagini e materiali, di preparazione al metodo di calcolo del MCD tramite sottrazioni successive.

Come approfondimento (o per studenti della secondaria di secondo grado) il metodo delle sottrazioni successive può essere reso più efficiente utilizzando le divisioni.

Si consiglia di introdurre il calcolo del MCD tramite la scomposizione in fattori primi solo in un una fase successiva.

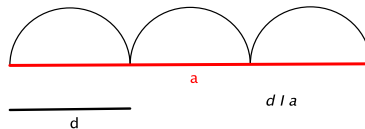
Definizione di multiplo e divisore

Sia d un numero naturale non nullo. Per ogni numero naturale q , il numero $m = q d$ viene detto **multiplo** di d . Il numero d viene detto **divisore** di $m = q d$ mentre il numero q viene detto **fattore di moltiplicazione**, oppure **rapporto di omotetia**, oppure **quoziente**



(o quoto) di m diviso d .

Se $d = 0$, ogni numero naturale è suo divisore (con quoziente nullo) e 0 è multiplo solo di se stesso.



Quindi:

- Un numero naturale m è un *multiplo* di un numero naturale d se esiste un numero naturale q tale che $m = qd$. Il fattore q individua ‘quante volte d sta dentro m ’.
- Un numero naturale d è *divisore* di un numero naturale m se m è un multiplo di d , cioè se esiste un numero naturale q tale che $m = qd$.
- Un numero naturale q è *quoziente* di un numero naturale m nella divisione per d se $m = qd$. Diciamo anche che q è un d -simo di m (e scriviamo $q = \frac{m}{d}$) e che d è un q -simo di m (e scriviamo $d = \frac{m}{q}$)

Se un numero naturale a è multiplo di un numero naturale d , cioè d è un divisore di a , per brevità e per maggiore efficacia grafica, scriviamo talora:

$$d \mid a$$

Prime proprietà

- Se $a \neq 0$ e d è un divisore di a , allora $d \leq a$
- Se $a \neq 0$ e d è un divisore di a , è univocamente individuato il quoziente q tale che $a = q d$.

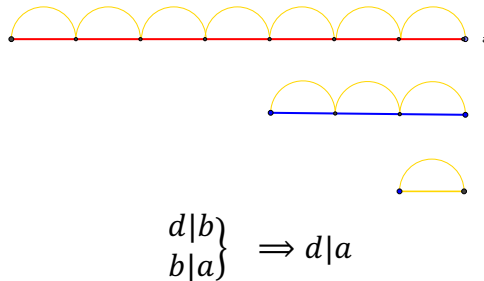
La divisibilità è una relazione tra coppie di numeri e è una relazione d’ordine sull’insieme dei numeri naturali.

Proprietà della divisibilità

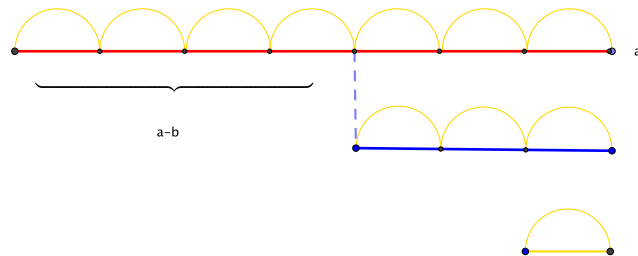
- **Riflessiva:** d è divisore di d
- **Antisimmetrica:** se d è divisore di a e a è divisore di d allora $a = d$

$$\left. \begin{matrix} d|a \\ a|d \end{matrix} \right\} \Rightarrow d = a$$

- **Transitiva:** siano $a, b, d \neq 0$; se d è divisore b e b è divisore di a allora d è divisore di a



- Se d è divisore di a e d è divisore di b , allora d è divisore di $(a + b)$ e di $(a - b)$



- **L'insieme dei divisori comuni di a e b coincide con l'insieme dei divisori comuni di $a-b$ e b**

Definizione Siano dati due numeri naturali non nulli a e b . Un loro **massimo comun divisore** è un numero naturale non nullo d , tale che

1. d divide a e d divide b (cioè d è un divisore comune)
2. d è il numero più grande con tale proprietà.

Se a e b non sono entrambi nulli, l'insieme dei loro divisori comuni è non vuoto (contenendo almeno 1) e finito (perchè i divisori di un numero non nullo non possono essere maggiori del numero stesso). Poichè i numeri naturali formano un insieme ordinato, il massimo comune divisore esiste sempre, ed è unico: esso viene indicato con il simbolo $MCD(a,b)$.

Due numeri naturali non nulli a, b tali che $MCD(a,b) = 1$ si dicono *coprimi* o *relativamente primi*.

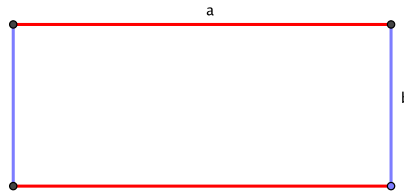
ILLUSTRAZIONE GEOMETRICA DEL CALCOLO DEL MCD TRAMITE SOTTRAZIONI RIPETUTE

Consideriamo due numeri naturali non nulli a e b , con $a > b$. Per quanto osservato prima, l'insieme dei divisori comuni di a e b **coincide** con l'insieme dei divisori comuni di $a-b$ e b : dunque

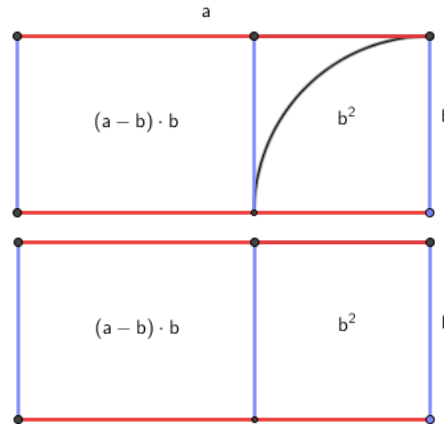
$$MCD(a,b) = MCD(a-b, b).$$

Multipli e divisori
 Con la mente e con le mani – Lincei Roma 2018-2019

Il prodotto $a \cdot b$ rappresenta l'area di un rettangolo di lati a , b .



Il numero b^2 rappresenta l'area di un quadrato di lato b : è possibile disegnare questo quadrato nel rettangolo $a \cdot b$ ripiegando il lato corto sul lato lungo



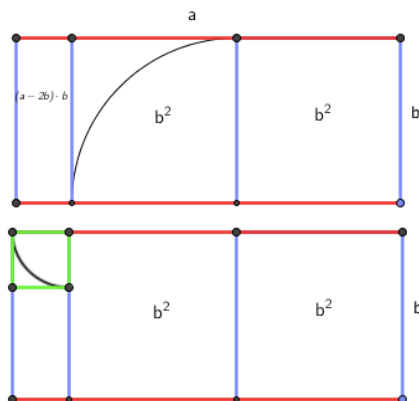
Ritagliando il quadrato b^2 (o semplicemente ripiegandolo in modo da nascondarlo) otteniamo un nuovo rettangolo di lati $a-b$ e b : **nel passaggio dal rettangolo iniziale al rettangolo ritagliato, il MCD tra i lati del rettangolo è rimasto invariato.**

Ripetiamo, sul rettangolo così ottenuto, la stessa operazione: confrontiamo la lunghezza dei lati $a-b$ e b :

- se $a-b = b$, allora $a = 2b$ e $b = \text{MCD}(a, b)$.
- se $a-b \neq b$, allora ripiego il lato più corto sul lato più lungo, per togliere un quadrato avente per lato il lato più corto del rettangolo. Ritaglio il quadrato così ottenuto.

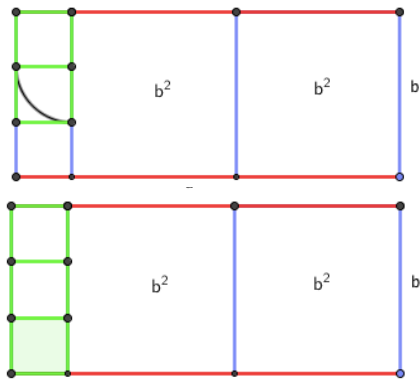
Nelle figure, procediamo da destra verso sinistra quando il lato più lungo del rettangolo è 'orizzontale', dall'alto verso il basso quando il lato più lungo è 'verticale'.

Man mano, la lunghezza dei lati diminuisce, ma resta sempre di lunghezza intera (ho operato solo sottrazioni). A un certo punto, devo quindi trovare un quadrato.



Nel rettangolo a sinistra, il lato b è il lato più lungo

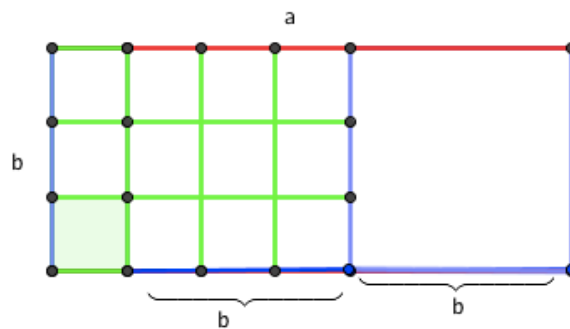
Multipli e divisori
 Con la mente e con le mani – Lincei Roma 2018-2019



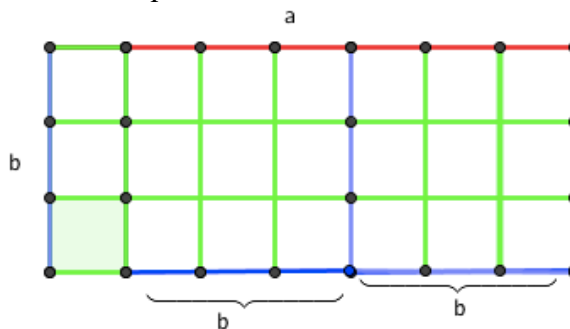
Chiamo d il lato del quadratino verde colorato.

Il rettangolo ‘verticale’ a sinistra è formato da quadratini uguali a quello colorato (in particolare, nella figura, $b = 3d$).

Il quadratino verde può quindi ‘piastrellare’ anche il quadrato di lato b .



E questo vale per ciascuno dei quadrati di lato b .



Procedendo a ritroso, si vede che (per transitività) il quadrettino verde ‘piastrella’ tutti i quadrati ritagliati. In particolare, d divide sia a che b e è quindi un divisore comune di a e b .

Ricordando che, ogni volta che abbiamo rimosso un rettangolo, il MCD di a e b coincideva con il MCD dei lati del rettangolo rimasto, segue che

$$\text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(d, d) = d$$

E il lato del quadratino verde è proprio il MCD di a e b .

Esempio: Il procedimento illustrato può essere tradotto in un procedimento algebrico per calcolare il MCD. Per calcolare il MCD di una coppia di numeri, si modifica a ogni passo tale coppia fino a ottenere una coppia di numeri uguali: se uno dei due numeri è maggiore dell’altro, lo si sostituisce sottraendo da esso il numero minore.

Ad esempio, se vogliamo calcolare $\text{MCD}(44880, 5292)$, possiamo riportare in tabella tutte le trasformazioni. In ogni riga, controlliamo se i numeri sono uguali: se così è, abbiamo terminato e tale numero coincide con il MCD cercato.

Altrimenti, individuiamo il numero maggiore e aggiungiamo una nuova riga, in cui ricopiamo il numero minore. Al numero maggiore, sottraiamo il numero minore e riportiamo il risultato nella riga successiva. Ora che la riga successiva è completa, si ricomincia l’analisi, confrontando i numeri ottenuti.

Multipli e divisori

Con la mente e con le mani – Lincei Roma 2018-2019

Se si vuole, si può evitare di ricopiare da una riga alla successiva il numero minore: in questo modo risulta messo in maggiore evidenza quante volte sottraiamo lo stesso numero, suggerendo l'utilizzo della divisione al posto di una sottrazione ripetuta.

L'esempio riportato è volutamente lungo. Cerchiamo $\text{MCD}(44880, 5292)$

44880	>	5292
$44880 - 5292 = 39588$	>	
$39588 - 5292 = 34296$	>	
$34296 - 5292 = 29004$	>	
$29004 - 5292 = 23712$	>	
$23712 - 5292 = 18420$	>	
$18420 - 5292 = 13128$	>	
$13128 - 5292 = 7836$	>	
$7836 - 5292 = 2544$	<	
	<	$5292 - 2544 = 2748$
2544	>	$2748 - 2544 = 204$
$2544 - 204 = 2340$	>	
$2340 - 204 = 1932$	>	
$1932 - 204 = 1728$	>	
$1728 - 204 = 1524$	>	
$1524 - 204 = 1320$	>	
$1320 - 204 = 1116$	>	
$1116 - 204 = 912$	>	
$912 - 204 = 708$	>	
$708 - 204 = 504$	>	
$504 - 204 = 300$	>	
$300 - 204 = 96$	<	
	<	$204 - 96 = 108$
	>	$108 - 96 = 12$
$96 - 12 = 84$	>	
$84 - 12 = 72$	>	
$72 - 12 = 60$	>	
$60 - 12 = 48$	>	
$48 - 12 = 36$	>	
$36 - 12 = 24$	>	
$24 - 12 = 12$	=	$12 = \text{MCD}(44880, 5292)$

Poiché vengono operate sottrazioni in modo ripetuto, è possibile riformulare tramite una sequenza di divisioni il procedimento prima illustrato. La divisione tra numeri naturali può essere riletta nel modo seguente:

Proposizione Siano a, b numeri naturali non nulli. Allora esistono e sono univocamente determinati due interi q e r tali che

$$a = b \cdot q + r \quad \text{con } 0 \leq r < b$$

In quest'operazione a è detto *dividendo*, b *divisore*, q *quoziente* e r *resto*.

Il numero b divide a se e solo se il resto r è uguale a zero.

Moltiplico per b entrambi i membri dell'equazione $a = b \cdot q + r$ e trovo

$$a \cdot b = b^2 \cdot q + r \cdot b$$

Come prima, il prodotto $a \cdot b$ rappresenta l'area di un rettangolo di lati a, b .

Il numero b^2 rappresenta l'area di un quadrato di lato b .

Il prodotto $r \cdot b$ rappresenta l'area del rettangolo 'verticale' di lati b e r che resta a sinistra quando ho ritagliato dal rettangolo iniziale il massimo numero possibile di quadrati di lato b .

Per proseguire il lavoro, ora devo togliere dal rettangolo $b \cdot r$ quadrati di lato r , cioè operare una divisione di b con divisore r

$$b = r \cdot q_2 + r_2 \quad \text{con } 0 \leq r_2 < r$$

da cui (moltiplicando per r) si trova

$$b \cdot r = r^2 \cdot q_2 + r_2 \cdot r.$$

Eliminati il maggior numero possibile di quadrati di lato r , il rettangolo residuo avrà dimensioni $r_2 \cdot r$ (e mi aspetto di dover dividere r con divisore r_2).

Non appena il rettangolo residuo è un quadrato (cioè la divisione ha resto zero), l'ultimo resto non nullo coincide con il MCD dei lati del rettangolo iniziale; se la prima divisione ha resto zero, $\text{MCD}(a, b) = b$.

MASSIMO COMUNE DIVISORE E ALGORITMO DI EUCLIDE

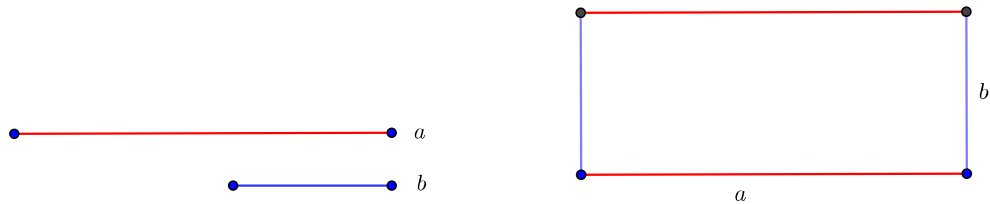
Riformuliamo algebricamente la procedura precedente, evidenziandone la struttura algoritmica: essa viene detta **algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD**. L'algoritmo di Euclide permette di calcolare il massimo comun divisore tra due numeri, anche se questi sono molto grandi, senza aver bisogno di fattorizzarli come prodotto di fattori primi.

Talora viene chiamato anche **metodo delle divisioni successive**, ma tale terminologia si confonde con altre procedure. E' possibile rappresentare geometricamente la procedura tramite la sequenza di ritagli di quadrati appena descritti, oppure tramite segmenti.

Una rappresentazione alternativa può essere svolta con segmenti: la rappresentazione grafica è più rapida da fare, ma è necessaria una maggiore capacità di astrazione e autonomia da parte dei ragazzi. Mentre nella rappresentazione tramite rettangoli e quadrati il rettangolo ritagliato individua i lati con cui si deve lavorare, la descrizione puramente algebrica e la rappresentazione tramite segmenti richiedono la capacità di individuare con quali numeri si deve operare.

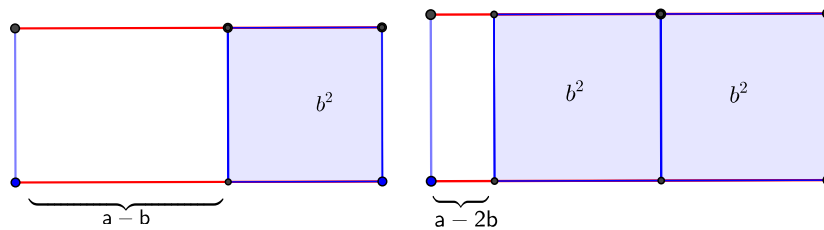
Rappresentiamo i numeri come lunghezza, e supponiamo $a > b$ e formiamo il rettangolo avente per lati i due numeri

Multipli e divisori
 Con la mente e con le mani – Lincei Roma 2018-2019

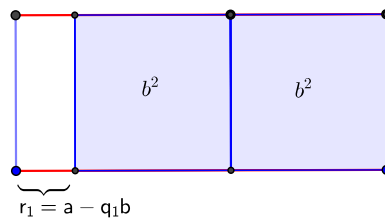


Si inizia dividendo a per b e si ottengono un quoziente q_1 e un resto r_1 , tali che

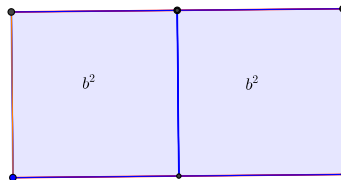
$$a = b \cdot q_1 + r_1.$$



Inseriamo nella figura le lettere per raffigurare la situazione generica:

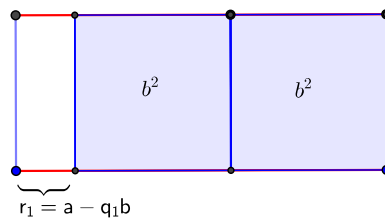


Possono accadere solo due distinti casi: o il resto r_1 è nullo, oppure non è nullo. Se $r_1 = 0$, allora b divide a e la figura è della forma:



quindi $\text{MCD}(a,b) = b$ e ci si ferma;

Se, invece, $r_1 \neq 0$, la figura più corretta è la precedente

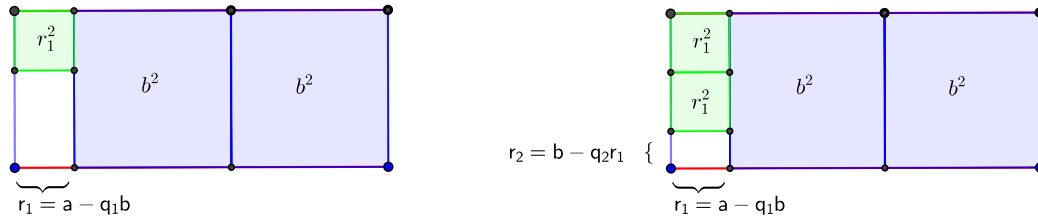


Nella quale risulta disegnato anche il segmento r_1 (che coloriamo in verde). Dobbiamo immaginare che la parte colorata sia già stata ritagliata, e abbiamo in mano solo il rettangolo non colorato, di lati b e r_1 . Ora b è il lato più lungo e r_1 il lato più corto. Procedo dividendo quindi b per r_1 e otteniamo q_2 e r_2 tali che

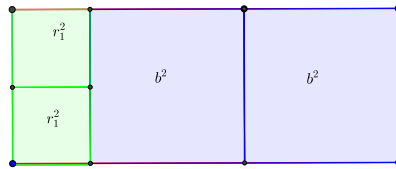
$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2.$$

Multipli e divisori

Con la mente e con le mani – Lincei Roma 2018-2019



Nuovamente, si presentano due casi: $r_2 = 0$ oppure $r_2 \neq 0$.
 se $r_2 = 0$, la figura è della forma



Sappiamo che r_1 divide b , perché $r_2 = 0$. Ma allora r_1 divide anche a (perché divide b , quindi divide i multipli di b ; inoltre, coincide con la parte di differenza tra a e $b \cdot q_1$). Dunque, r_1 è un divisore comune di a e b . Ma qualsiasi divisore comune di a e b deve dividere r_1 . Concludiamo che

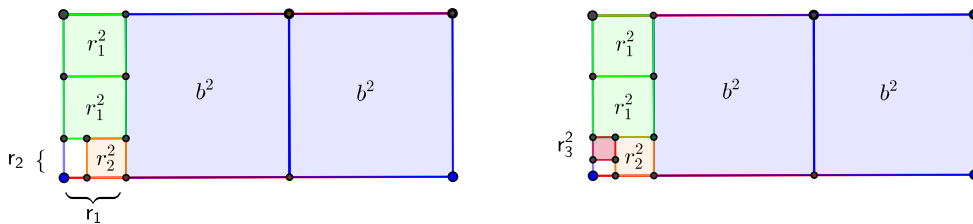
$$r_1 = \text{MCD}(a, b)$$

Osserviamo che r_1 è l'ultimo resto non nullo e che abbiamo ottenuto la risposta cercata.

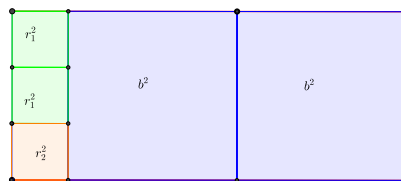
Se, invece, $r_2 \neq 0$, si ripete il ragionamento precedente:

- il rettangolo bianco su cui lavorare ha lati r_1 e r_2
- divido il segmento precedente r_1 per r_2 , ottenendo q_3 e r_3 tali che

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 .$$



- se $r_3 = 0$, allora r_2 divide r_1 .



Ma allora r_2 divide anche $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$. Concludiamo che r_2 divide $a = b \cdot q_1 + r_1$. Dunque, r_2 è un divisore comune di a e b . Ma qualsiasi divisore comune di a e b deve dividere $r_1 = a - b \cdot q_1$ e quindi anche $r_2 = b - r_1 \cdot q_2$. Concludiamo che

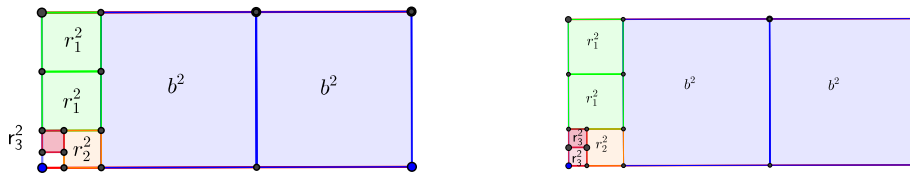
$$r_2 = \text{MCD}(a, b)$$

Osserviamo che il MCD r_2 è l'ultimo resto non nullo e che abbiamo ottenuto la risposta cercata.

Multipli e divisori

Con la mente e con le mani – Lincei Roma 2018-2019

Se, invece, $r_3 \neq 0$, si aggiunge un nuovo segmento e si ripete il ragionamento precedente.



L'algoritmo termina quando troviamo resto nullo (cioè il rettangolo rimasto è un quadrato) e il MCD è l'ultimo resto diverso da zero. La procedura ha sicuramente termine perché il resto si riduce a ogni passo.

Esempio: Il procedimento è illustrato di seguito, calcolando MCD (44880,5292).

$$a = b \cdot q + r$$

$$a = 44880$$

$$b = 5292$$

$$44880 = 5292 \cdot 8 + 2544$$

$$r_1 = 2544$$

$$5292 = 2544 \cdot 2 + 204$$

$$r_2 = 204$$

$$2544 = 204 \cdot 12 + 96$$

$$r_3 = 96$$

$$204 = 96 \cdot 2 + 12$$

$$r_4 = 12$$

$$96 = 12 \cdot 8 + 0$$

MCD

MCD (44880,5292) = 12 (=ultimo resto non nullo)

Esempio

1) Calcola MCD (1637,31)

$$1637 = 31 \cdot 52 + 25$$

$$31 = 25 \cdot 1 + 6$$

$$25 = 6 \cdot 4 + 1$$

$$6 = 1 \cdot 6 + 0$$

MCD

MCD (1637,31) = 1 (=ultimo resto non nullo)

2) Calcola MCD (1763,51)

$$1763 = 51 \cdot 34 + 29$$

$$51 = 29 \cdot 1 + 22$$

$$29 = 22 \cdot 1 + 7$$

$$22 = 7 \cdot 3 + 1$$

$$7 = 1 \cdot 7 + 0$$

MCD

MCD (1763,51) = 1 (=ultimo resto non nullo)

3) Calcola MCD (1547,560)

$$1547 = 560 \cdot 2 + 427$$

$$560 = 427 \cdot 1 + 133$$

$$427 = 133 \cdot 3 + 28$$

$$133 = 28 \cdot 4 + 21$$

$$28 = 21 \cdot 1 + 7$$

MCD

MCD (1547, 560) = 7 (=ultimo resto non nullo)

$$21 = 7 \cdot 1 + 0$$

Esercizi Calcola, con il metodo di Euclide, i seguenti numeri:

$$\text{MCD}(2337, 1482) = \dots$$

$$\text{MCD}(16717, 8249) = \dots$$

$$\text{MCD}(4891, 1541) = \dots$$