Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica
Esame di Geometria 1 con Elementi di Storia (Prof. F. Tovena) 30 gennaio 2015

Le risposte vanno giustificate con chiarezza.

1) *Nello spazio vettoriale V delle matrici 2×2 a coefficienti reali, considera le matrici*

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considera l'applicazione lineare $f : V \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(\mathbf{A}_1) = (0,0,1)$, $f(\mathbf{A}_2) = (1,1,-1)$, $f(\mathbf{A}_3) = (1,1,0)$, $f(\mathbf{A}_4) = (1,1,1)$.

a) *Verifica che $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ formano una base di V.*

b) *Determina la dimensione e una base di Ker f e Im f, rispettivamente.*

c) *Scrivi la matrice che rappresenta f rispetto alla base standard di V nel dominio e alla base canonica in $\mathbf{R}^3$ nel codominio.*

Cenni di soluzione

a) *Verifica che $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ formano una base di V.*

Piché V ha dimensione 4, le quattro matrici $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ formano una base di V se e solo se sono linearmente indipendenti. Equivalentemente, è possibile verificare se sono linearmente indipendenti le componenti $\mathbf{A}_1(1,1,-1,-1)$, $\mathbf{A}_2(0,1,1,1)$, $\mathbf{A}_3(1,0,1,0)$, $\mathbf{A}_4(0,2,0,1)$ rispetto alle base standard di V. Applicando il metodo di riduzione di Gauss, si vede che

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

si ottiene la tesi.

b) *Determina la dimensione e una base di Ker f e Im f, rispettivamente.*

Il sottospazio Im f è generato dalle immagini (tramite f) di una base di V. Dunque, Im$f = <(0,0,1),(1,1,-1),(1,1,0),(1,1,1)>$. Poiché $(1,1,-1) = -(0,0,1)+(1,1,0)$ e $(1,1,1) = (0,0,1)+(1,1,0)$, ricaviamo che Im$f = <(0,0,1),(1,1,0)>$. Poiché, inoltre, i vettori $(0,0,1)$ e $(1,1,0)$ sono linearmente indipendenti (perché non nulli e non proporzionali tra loro), ricaviamo che $(0,0,1)$ e $(1,1,0)$ formano una base di Im f e che dim Im $f = 2$.

Per il teorema fondamentale dell'algebra lineare, dim Ker f = dim $V-$ dim Im f = 4-2 = 2, e una base di ker f è dunque formata da due matrici linearmente indipendenti.

Le due relazioni lineari prima trovate, permettono di individuare una base del nucleo: l'uguaglianza $(1,1,-1) = -(0,0,1)+(1,1,0)$ comporta che $f(\mathbf{A}_2) = (1,1,-1) = -(0,0,1)+(1,1,0) = -f(\mathbf{A}_1)+f(\mathbf{A}_3)$, cioè $f(\mathbf{A}_2)+f(\mathbf{A}_1)-f(\mathbf{A}_3)=\mathbf{0}$; per la linearità di f, $f(\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_3)=\mathbf{0}$ e

$$\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{ Ker } f.$$

Analogamente, da $(1,1,1) = (0,0,1)+(1,1,0)$ si ricava che $f(\mathbf{A}_4) = f(\mathbf{A}_1)+f(\mathbf{A}_3)$ e dunque $\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in$ Ker f. Una base di Ker f è dunque data dalle due matrici linearmente indipendenti $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) *Scrivi la matrice che rappresenta f rispetto alla base standard di V nel dominio e alla base canonica in $\mathbf{R}^3$ nel codominio.*

La matrice che rappresenta f, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$ in V e alla base canonica $\mathcal{E}'$ in $\mathbf{R}^3$ ha per colonne le immagini rispettive dei vettori di $\mathcal{B}$, ed è pertanto:

$$M_{\mathcal{E}'\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare la matrice richiesta, devo cambiare base nel dominio; se C è la matrice che rappresenta l'identità di V (rispetto alla base standard $\mathcal{E} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio), la matrice richiesta è data dal prodotto $M_{\mathcal{E}'\mathcal{B}}(f)\,C$.

La matrice C ha per colonne (ordinatamente), le componenti delle matrici in $\mathcal{E}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Può essere calcolata

a) in modo diretto,

b) oppure osservando che l'inversa della matrice C^{-1} le cui colonne sono date dalle componenti delle matrici in $\mathcal{E}$ rispetto alla base standard $\mathcal{E}$. Si ricava che $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolo l'inversa, tramite trasformazioni elementari:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) ->$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) ->$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) -> \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Dunque $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ e la matrice cercata è

$$M_{\mathcal{E}'\mathcal{B}}(f)\,C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

2) *Nel piano euclideo reale di dimensione 2, sia fissato un sistema di riferimento monometrico ortonormale* $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ *con coordinate* (x_1, x_2). *Considera la retta* s_1 *di equazioni parametriche*

$$x_1 = 1 - 2t, x_2 = 2t \quad (t \in \mathbf{R}),$$

la retta s_2 *di equazione cartesiana* $x_1 - 2x_2 + 1 = 0$ *e la retta* s_3 *di equazione cartesiana* $2x_1 + x_2 - 2 = 0$.

a) *Determina una equazione cartesiana per* s_1.

b) *Determina una equazione cartesiana della retta r parallela a s_3 e passante per $P_0 = s_1 \cap s_2$.*

c) *Determina equazioni parametriche per la retta l per $P_1 = s_1 \cap s_3$ e ortogonale a s_3.*

d) *Determina la distanza dell'origine O dalla retta s_2.*

e) *Discuti se esiste un punto $B \in s_2$ tale che il triangolo di vertici O, B, P_0 abbia area 100.*

f) *Determina il luogo dei punti a distanza 1 da s_1.*

Cenni di soluzione

a) *Determina una equazione cartesiana per s_1.*

Poiché $x_2 = 2t$, come equazione cartesiana di s_1 è possibile considerare $x_1 + x_2 - 1 = 0$.

b) *Determina una equazione cartesiana della retta r parallela a s_3 e passante per $P_0 = s_1 \cap s_2$.*

Le coordinate del punto P_0 sono della forma $x_1 = 1 - 2t, x_2 = 2t$ (poiché P_0 sta su s_1), per un opportuno t tale che le coordinate soddisfino anche l'equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 + 1 = 0$ di s_2. Sostituendo, si ricava che $1 - 2t - 2\,(2t) + 1 = -6t + 2 = 0$, cioè $t = 1/3$. Sostituendo nelle equazioni parametriche di s_1, si ritrovano le coordinate di $P_0(1/3, 2/3)$.

Ogni retta parallela a s_3 ha equazione cartesiana $2x_1 + x_2 + c = 0$. Imponendo il passaggio per P_0, ricavo che $2\,(1/3) + \,(2/3) + c = 0$, cioè $c = -4/3$; l'equazione cartesiana della retta r è dunque $2x_1 + x_2 - 4/3 = 0$.

c) *Determina equazioni parametriche per la retta l per $P_1 = s_1 \cap s_3$ e ortogonale a s_3.*

Le coordinate del punto P_1 sono della forma $x_1 = 1 - 2t, x_2 = 2t$ (poiché P_1 sta su s_1), per un opportuno t tale che le coordinate soddisfino anche l'equazione cartesiana $2x_1 + x_2 - 2 = 0$ di s_3. Sostituendo, si ricava che $2(1 - 2t) + 2t - 2 = 0$, cioè $t = 0$. Sostituendo nelle equazioni parametriche di s_1, si ritrovano le coordinate di $P_1(1, 0)$.

La retta s_3 è parallela al vettore di componenti $(1, -2)$ (poiché la sua giacitura ha equazione $2x_1 + x_2 = 0$). La retta l cercata ha dunque equazione parametrica data da $x_1 = 1 + h$, $x_2 = -2h$ al variare di $h \in \mathbf{R}$.

d) *Determina la distanza dell'origine O dalla retta s_2.*

La distanza cercata può essere calcolata mediante la formula della distanza tra punto e iperpiano, ed è uguale a $\frac{|1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

e) *Discuti se esiste un punto $B \in s_2$ tale che il triangolo di vertici O, B, P_0 abbia area 100.*

Come mostrato nel punto d), la distanza $d(O, s_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ è positiva (ed è uguale all'altezza rispetto al lato OB di un qualsiasi triangolo con le proprietà cercate. Un tale triangolo esiste quindi sicuramente. Anzi, ne esistono esattamente due: ricordando la formula dell'area di un triangolo, il vertice mancante B è uno qualsiasi dei due punti su s_2 che abbia distanza da P_0 pari a $2 \cdot 100 \cdot \sqrt{5}$.

f) *Determina il luogo dei punti a distanza 1 da* s_1.

Il luogo cercato è formato da una coppia di rette parallele a s_1, ciascuna a distanza 1 da s_1. L'equazione complessiva di tale luogo (ricordando la formula della distanza punto-iperpiano e l'equazione cartesiana di s_1 trovata in a)) è : $\frac{|x_1+x_2-1|}{\sqrt{1+4}} = 1$, cioè $(x_1 + x_2 - 1) = \pm\sqrt{5}$.

3) a) Considera il sistema lineare reale $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ in 4 indeterminate, ove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e sia W il sottospazio affine formato dalle soluzioni.

a) Determina una descrizione parametrica e la dimensione di W.

b) Discuti se esiste una matrice quadrata non nulla reale $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$. In caso di risposta positiva, determina il massimo rango che una tale $\mathbf{B}$ può avere.

Cenni di soluzione

a) *Determina una descrizione parametrica e la dimensione di* W.

Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ è compatibile se e solo se matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango. Applico il metodo di Gauss di riduzione per righe per calcolare il rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & | & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & | & 10 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema è quindi compatibile, perché matrice completa e incompleta hanno lo stesso rango, e le soluzioni dipendono da $numero\, incognite - rg(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$ parametri liberi.

Le soluzioni sono paramentrizzate da $x_1 = -h-k+3$, $x_2 = -h+k+1$, $x_3 = h$, $x_4 = k$ $(h, k \in \mathbf{R})$ e dim W=2.

b) *Discuti se esiste una matrice quadrata non nulla reale* $\mathbf{B}$ *tale che* $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$. *In caso di risposta positiva, determina il massimo rango che una tale* $\mathbf{B}$ *può avere.*

Per quanto visto al punto precedente, la matrice $\mathbf{A}$ ha rango 2. Il prodotto $\mathbf{BA}$ può essere interpretato come la matrice associata alla composizione di due endomorfismi di $\mathbf{R}^4$. Denotiamo con $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare associato alla matrice $\mathbf{A}$ in base canonica e $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare associato alla matrice $\mathbf{B}$ in base canonica. Affinché $g \circ f$ (la cui matrice associata è $\mathbf{BA}$) sia l'applicazione nulla, occorre e basta che Im f sia contenuta in Ker g: in particolare, dim Ker $g \geq 2$. Poichè rg $(\mathbf{B})$ = dim Im g = dim $\mathbf{R}^4$ - dim Ker g = 4 - dim Ker $g \leq 2$. Sia $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ una base di Im f, e sia $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ un suo completamento a base di $\mathbf{R}^4$; sia g l'applicazione lineare tale $g(\mathbf{v}_1) = g(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$, $g(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3$, $g(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_4$. La matrice $\mathbf{B}$ associata all'applicazione g ha rango 2 (il massimo possibile) e verifica $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$.