Verso la forma normale di Birkhoff.

Stiamo considerando

$$H(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{2}\left(x_j^2 + y_j^2\right) + \sum_{\ell=3}^{+\infty} f_\ell(\underline{x},\underline{y})$$

dove $f_\ell(\underline{x},\underline{y}) \in \mathcal{P}_\ell$, cioè $f_\ell(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{|\underline{j}|+|\underline{m}|=\ell} c_{\underline{j},\underline{m}}\, \underline{x}^{\underline{j}} \cdot \underline{y}^{\underline{m}}$

dove $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$), $c_{\underline{j},\underline{m}} \in \mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$) e

Forma normale di Birkhoff

Proviamo a rimuovere la dipendenza dagli angoli

1. con le serie di Lie
- rimuovendo i termini perturbativi a gradi via via crescenti.

nelle variabili complesse significa avere la dipendenza solo da $z_j i\bar{z}_j$

Introduciamo $\forall j$ $z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + i y_j)$ dove $(\underline{x}, \underline{y})$ sono coord. can.

momenti coord.

Oss.: $\begin{cases} z_j = \dfrac{\sqrt{\cancel{2}I_j}}{\sqrt{\cancel{2}}}\left(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j\right) = \sqrt{I_j}\, e^{i\varphi_j} \\ i\bar{z}_j = i\sqrt{I_j}\, e^{-i\varphi_j} \end{cases}$

A: è canonica!

$$\Rightarrow I_j = \frac{x_j^2 + y_j^2}{2} = \sqrt{I_j}\, e^{i\varphi_j} \cdot \sqrt{I_j}\, e^{-i\varphi_j} = z_j \bar{z}_j$$

Procedimento di costruzione della forma normale

$$(\square)\quad H^{(0)}(\underline{z}, i\underline{\bar{z}}) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j (z_j \bar{z}_j) + \sum_{l=1}^{+\infty} f_l^{(0)}(\underline{z}, i\underline{\bar{z}})$$

indice del "passo di normalizzazione"

dove $f_r^{(r-1)}(\underline{z}, i\underline{\bar{z}}) = \sum_{|\underline{\ell}|+|\underline{\bar{\ell}}|=r+2} c_{\underline{\ell},\underline{\bar{\ell}}}\, \underline{z}^{\underline{\ell}} (i\underline{\bar{z}})^{\underline{\bar{\ell}}}$

e $\mathcal{Z}_r(\underline{z}, i\underline{\bar{z}}) = \sum_{2|\underline{\ell}|=r+2} c_{\underline{\ell},\underline{\ell}}\, \underline{z}^{\underline{\ell}} (i\underline{\bar{z}})^{\underline{\ell}}$ $\leftarrow = 0$ se r è dispari

---

Proposizione: $H^{(r)} = \exp L_{\chi_r} H^{(r-1)}$ (dove $H^{(0)}$ è dato da $(\square)$) è della forma

$H^{(r)} = \mathcal{Z}^{(r)} + R^{(r)}$ dove la parte di forma normale

$\mathcal{Z}^{(r)} = \sum_{s=0}^{r} Z_s(z_1 \cdot \bar{z}_1, \ldots, z_n \cdot \bar{z}_n)$ e il resto $R^{(r)} = \sum_{s=r+1}^{+\infty} f_s^{(r)}(\underline{z}, i\underline{\bar{z}})$

con $Z_s \in \mathcal{P}_{s+2}$, $f_s^{(r)} \in \mathcal{P}_{s+2}$, questo è vero se

$Z_0 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j z_j \bar{z}_j$ con $\underline{\omega}$ non risonante ($\underline{k} \cdot \underline{\omega} \neq 0 \; \forall \underline{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$)

Dim.: $\exp L_{\chi_r} H^{(r-1)}$ con χ_r che soddisfa l'eq. omologica $L_{\chi_r} Z_0 + f_r^{(r-1)} = Z_r \Rightarrow \chi_r \in \mathcal{P}_{r+2}$

$$\Rightarrow H^{(r)} = \exp L_{\chi_r} H^{(r-1)} = \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} Z_s + \sum_{s=r}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} f_s^{(r-1)}$$

Introduciamo $f_s^{(r)} = f_s^{(r-1)} \; \forall s \geq r$ e poi li ridefiniremo (tante volte) con il simbolo $\overset{+}{\leftarrow}$ che significa che $a \overset{+}{\leftarrow} b$ è ridefivisto come $a = a + b$

Per induzione $f_s^{(r)} = f_s^{(r-1)} \in \mathcal{P}_{s+2}$, dopo aver ricordato $L_{\chi_2} f_s^{(r-1)} \in \mathcal{P}_{r+s+2}$ e $L_{\chi_2} Z_s \in \mathcal{P}_{r+s+2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{j!} L^j_{\chi_2} f_s^{(r-1)} \in \mathcal{P}_{s+jr+2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{j!} L^j_{\chi_2} Z_s \in \mathcal{P}_{s+jr+2}.$$

Ne segue $\forall j \geq 1$

$$f^{(r)}_{s+jr} \hookleftarrow \frac{1}{j!} L^j_{\chi_2} Z_s \quad \text{e} \quad f^{(r)}_{s+jr} \hookleftarrow \frac{1}{j!} L^j_{\chi_2} f_s^{(r-1)}$$

In modo più classico diamo le definizioni con una sola formula dei nuovi termini

$$f_s^{(2)} = \frac{1}{\left[\frac{s}{2}\right]!} L_{\chi_2}^{\left[\frac{s}{2}\right]} Z_m + \sum_{j=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} \frac{1}{j!} L_{\chi_2}^j f_{s-j2}^{(2-1)} \quad \forall s \geq 2 -$$

dove $s = \left[\frac{s}{2}\right] \cdot 2 + m$

$$\Rightarrow R^{(2)} := \sum_{s=2+1}^{+\infty} f_s^{(2)}$$ definiti come sopra

e $f_2^{(2)}$ è il nuovo termine di forma normale. Infatti, $f_2^{(2)} = \frac{1}{1!} L_{\chi_2} Z_0 + f_2^{(2-1)} = Z_2$

per l'eq. omologica, dove $Z_2(z_1\bar{z}_1, \ldots, z_n\bar{z}_n)$. C.V.D.

Verso uno studio analitico delle proprietà della forma normale di Birkhoff

Sia $g = \sum_{|\underline{e}|+|\underline{\bar{e}}|=s+2} c_{\underline{e},\underline{\bar{e}}} \, \underline{z}^{\underline{e}} (i\underline{\bar{z}})^{\underline{\bar{e}}}$, allora

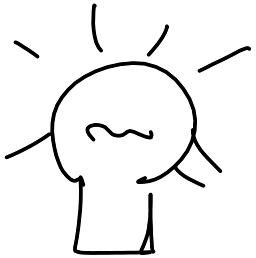
$$\|g\| = \sum_{|\underline{e}|+|\underline{\bar{e}}|=s+2} |c_{\underline{e},\underline{\bar{e}}}| \Rightarrow \sup_{\underline{z}\in B_\rho(\underline{0})} |g(\underline{z}, i\underline{\bar{z}})| \leq \|g\| \rho^{s+2}$$

Lemma: Siano $f \in \mathcal{P}_{r+2}$, $g \in \mathcal{P}_{s+2}$

$$\|L_g f\| = \|\{f, g\}\| \leq (r+2)\cdot(s+2)\,\|f\|\cdot\|g\|$$

Lemma: Sia $\underline{\omega}$ diofanteo, cioè t.c. $|\underline{k}\cdot\underline{\omega}| \geq \frac{\gamma}{|\underline{k}|^{\tau}}$
$\forall\, \underline{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ con $\gamma > 0$, $\tau \geq n-1$, allora

$$\|\chi_r\| \leq \frac{\|f_r^{(r-1)}\|}{\gamma}(r+2)^{\tau}, \quad \text{dove } L_{\chi_r} Z_0 + f_r^{(r-1)} = Z_r$$



Si vede che le serie generate dalla forma normale di Birkhoff divergono per $r \to +\infty$ su ogni $B_\rho(\underline{0})$ con $\rho > 0$.

$$\|\chi_r\| \simeq r^{\tau}\|f_r^{(\tau-1)}\| \Rightarrow f_{r+1}^{(\tau)} \approx L_{\chi_r} Z_1$$

$$\Rightarrow \|f_{r+1}^{(\tau)}\| \lesssim r^{\tau}\cdot r\|\chi_r\| \lesssim r^{\tau+1}\|f_r^{(\tau-1)}\|$$

$$\cdots \lesssim \big(r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdot\ldots\cdot 1\big)^{\tau+1}\|f_1^{(0)}\|$$

$$= O\big((r!)^{\tau+1}\|f_1^{(0)}\|\big)$$

costanti

$$\sup_{\underline{z}\in B_\rho(0)} |R^{(r)}| \gtrsim (r!)^{\tau+1}\cdot C^{r}\cdot\rho^{r+3} \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$$

$$\forall \rho>0 \,.$$

È conveniente effettuare l'$\tau+1$-esimo passo di normalizzazione se

$$\frac{\sup_{z\in B_\rho(0)} \left|R^{(\tau+1)}\right|}{\sup_{z\in B_\rho(0)} \left|R^{(\tau)}\right|} \sim \frac{\left[(\tau+1)!\right]^{\tau+1}\cdot \cancel{C^{\tau+1}}\cdot \cancel{\rho^{\tau+4}}}{(\tau!)^{\tau}\cdot \cancel{C^{\tau}}\cdot \cancel{\rho^{\tau+3}}} \sim (\tau+1)^{\tau+1} C\rho$$

$$< 1 \Longrightarrow \tau_{opt} \simeq \frac{1}{(C\rho)^{1/(\tau+1)}}$$

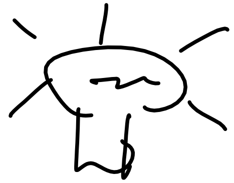
$$\Longrightarrow \sup_{z\in B_\rho(0)} \left|R^{(\tau_{opt})}\right| \lesssim \left[(\tau_{opt}!)^{\tau}\cdot C^{\tau_{opt}}\cdot \rho^{\tau_{opt}}\right]\rho^3$$

Stirling $\longrightarrow$

$$\simeq \frac{\left[(\tau_{opt})^{\tau} C\rho\right]^{\tau_{opt}}}{e^{\tau_{opt}}}\cdot\rho^3 = \rho^3 \exp\left[\left(-\frac{\rho^*}{\rho}\right)^{1/(\tau+1)}\right],$$

dove $\rho^* = \dfrac{1}{C} > 0$.

Oss. Il resto della forma normale di B. soddisfa una stima in cui è esp. piccolo rispetto a $1/\rho$.

Traduciamo questa  in uno schema rigoroso di stime.

Abbiamo
$$f^{(r)}_{kr+m} = \frac{1}{k!} L^k_{\chi_r} Z_m + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} L^j_{\chi_r} f^{(r-1)}_{(k-j)r+m}$$
$\forall k \geq 1,\ m = 1, \dots, r-1$

$$e\ \forall k\geq 2,\ f_{k2}^{(r)} = \frac{1}{k!} L_{\chi_2}^{k-1}\left(L_{\chi_2} Z_0 + f_2^{(r-1)}\right) + \frac{(k-1)}{k!} L_{\chi_2}^{k-1} f_2^{(r-1)} + \sum_{j=0}^{k-2} \frac{1}{j!} L_{\chi_2}^{j} f_{(k-j)2}^{(r-1)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k!} L_{\chi_2}^{k-1} Z_2 + \frac{(k-1)}{k!} L_{\chi_2}^{k-1} f_2^{(r-1)}}_{\text{si stima con } \left\| \frac{1}{(k-1)!} L_{\chi_2}^{k-1} f_2^{(r-1)} \right\|} + \sum_{j=0}^{k-2} \frac{1}{j!} L_{\chi_2}^{j} f_{(k-j)2}^{(r-1)}$$

Possiamo quindi scrivere le formule iterative per le stime (dell'r-esimo passo):

$$\|\chi_r\| \le \frac{\|f_r^{(r-1)}\|}{\gamma}(3r)^{\tau}$$

$\forall k \geq 1$, $m = 1, \dots, r-1$

$$\|f^{(r)}_{kr+m}\| \le \frac{1}{k!}\left[\prod_{i=0}^{k-1} 3(ir+m)\right]\left[(3r)\,\|\chi_r\|\right]^k \|Z_m\| + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}\left(\prod_{i=0}^{j-1} 3\left[(k-j+i)r+m\right]\right)\left[3r\|\chi_r\|\right]^j \|f^{(r-1)}_{(k-j)r+m}\|$$

$\forall k \geq 2$,

$$\|f^{(r)}_{kr}\| \le \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}\left(\prod_{i=0}^{j-1}\left[3(k-j+i)r\right]\right)\left[3r\|\chi_r\|\right]^j \|f^{(r-1)}_{(k-j)r}\|$$

Consideriamo a parte i coef. delle $\prod$.

$$\frac{\left(\prod_{i=0}^{j-1} 3\left[(k-j+i)z+m\right]\right)\cdot z^{2j}}{j!\, z^{2j}} \leq \left(\prod_{i=0}^{j-1}\left[\frac{(k-j+i+1)}{z}\right]\right)\frac{3^j z^{2j}}{j!}$$

$$\leq \left[\prod_{i=1}^{j}(k-j+i)\cdot\frac{1}{z^j}\right]\frac{3^j z^{2j}}{j!}$$

$$= \left[\frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-j+1)}{j!}\cdot\frac{1}{z^j}\right]\cdot 3^j z^{2j}$$

$$= \left[\binom{k}{j}\cdot\frac{1}{z^j}\right]3^j z^{2j} \longrightarrow$$ e li "accoppiamo" con $\|X_z\|^j$.

Oss: $H^{(0)}$ conv. su $B_\varrho(\underline{0})$ con $\varrho < 1/a$

$[H^{(0)}] = [E]$

$\|f_s\| \le E(a\varrho)^{s+2}$

$[f_s] = [E]\cdot 1$

$\Rightarrow E$ è un'energia

Lemma: Sia $H^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j z_j \bar{z}_j + \sum_{s=1}^{+\infty} f_s^{(0)}$ t.c.

$f_s^{(0)} \in \mathcal{P}_{s+2}$, $\underline{\omega}$ diofanteo, $\|f_s^{(0)}\| \le E a^{s+2} =: F_s^{(0)}$ con E, a positivi, e con $F_0^{(0)} = 0$

allora $\|f_s^{(r)}\| \le F_s^{(r)}$ e $(3r)^{3}\|\chi_r\| \le G_r$

dove le maggioranti $F_s^{(r)}$ e G_r sono def. dalle formule seguenti $\forall\, r \ge 1$:

$$G_r = \frac{(3r)^{\tau+3}}{\gamma} F_r^{(r-1)}, \qquad F_{kr+m}^{(r)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{G_r^{j} F_{(k-j)r+m}^{(r-1)}}{r^{j}}$$

$\forall\, k \ge 0,\ m = 0, \dots, r-1$.

Dim.: Per induzione su r.

Evidentemente le stime sono corrette x ipotesi quando $r=0$. Supponiamo siano vere per $r-1$. passo di ind.

$$\|\chi_r\| \le \frac{(3r)^{\tau}}{\gamma}\|f_r^{(r-1)}\| \le \frac{(3r)^{\tau} F_r^{(r-1)}}{\gamma}$$

$$\Rightarrow (3r)^3\|\chi_r\| \le \frac{(3r)^{\tau+3} F_r^{(r-1)}}{\gamma} \doteq G_r .$$

Consideriamo il caso con $m=0$ (è analogo per $m=1,\dots,r-1$)

$$\|f_r^{(kr)}\| \le \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\cdot\frac{1}{r^j}\left[(3r)^3\|\chi_r\|\right]^j\|f_{(k-j)r}^{(r-1)}\| \le \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\cdot\frac{1}{r^j}\,G_r^j\,F_{(k-j)r}^{(r-1)}$$

C.V.D.

Lemma: Valgono le seguenti stime per le maggioranti $F_s^{(r)} \le E a^{s+2} C^{s-1} \left(3r^{\tau+3}\right)^{s-1} e^{s\sigma_r}$,

dove $r \ge 1$, $s \ge 0$, $C = \max\left\{1, \frac{3^{\tau+3} E a^2}{\gamma}\right\}$, $\sigma_r = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j^2} \le \frac{\pi^2}{6}$.

Dim.: Per induzione sul passo di normalizzazione (il passo con $r=1$ si fa analogamente). Supponiamo vero l'asserto con $r-1 \ge 1$. $g_r = \frac{(3r)^{\tau+3}}{\gamma} F_r^{(r-1)} \le \frac{E a^{r+2}}{\gamma} C^{r-1} \left(3r^{\tau+3}\right)^r e^{r\sigma_{r-1}}$

$$\Rightarrow g_r \le \left(\frac{E a^2}{\gamma} \cdot C^{r-1}\right) \cdot a^r (3r)^{(\tau+3)r} e^{r\sigma_{r-1}} = (aC)^r (3r)^{(\tau+3)r} e^{r\sigma_{r-1}}$$

$$F^{(r)}_{kr+m} \le \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \frac{1}{r^j} \cdot (aC)^{jr} (3r)^{(\tau+3)jr} e^{jr\sigma_{r-1}} \cdot E a^{(k-j)r+m+2} \cdot C^{(k-j)r+m-1} \cdot (3r)^{(\tau+3)\cdot(k-j)r+m-1} e^{[(k-j)r+m]\sigma_{r-1}}$$

$$= E a^{kr+m+2} \cdot C^{kr+m-1} (3r)^{(\tau+3)kr+m-1} e^{(kr+m)\sigma_{r-1}} \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{1}{r^j} \le E a^3 \left[aC(3r)^{\tau+3}\right]^{kr+m-1} e^{(kr+m)\left[\sigma_{r-1}+1/r^2\right]}$$

C.V.D.

Proposizione: $\forall\, \tau$ la forma normale di Birkhoff rappr. da $H^{(\tau)} = Z^{(\tau)} + R^{(\tau)}$ converge

su $\rho < \frac{1}{2} \frac{1}{A(3\tau)^{(\tau+3)\tau}}$ (dove $A = a \cdot C \cdot e^{\pi^2/6}$)

e vale la seguente stima $\sup_{z \in B_\rho(0)} |R^{(\tau)}| \le 2F_a^3 \rho^3 \left(A(3\tau)^{\tau+3}\rho\right)^\tau$

Dim.: Basta ricordare che $\sup_{z \in B_\rho(0)} |R^{(\tau)}| \le \sum_{s=\tau+1}^{+\infty} F_s^{(\tau)} \rho^{s+3}$

cost.

$$\le \underline{\quad\quad} \cdot \sum_{s=\tau+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

Oss. $R^{(r)} \sim \exp\left[\left(\frac{\rho_*}{\rho}\right)^{1/(\tau+3)}\right]$

si rapiscon come all'inizio, cioè r_{opt} t.c. $\frac{\sup|R^{(r+1)}|}{\sup|R^{(r)}|} = 1$

si valuta $R^{(r_{opt})}$