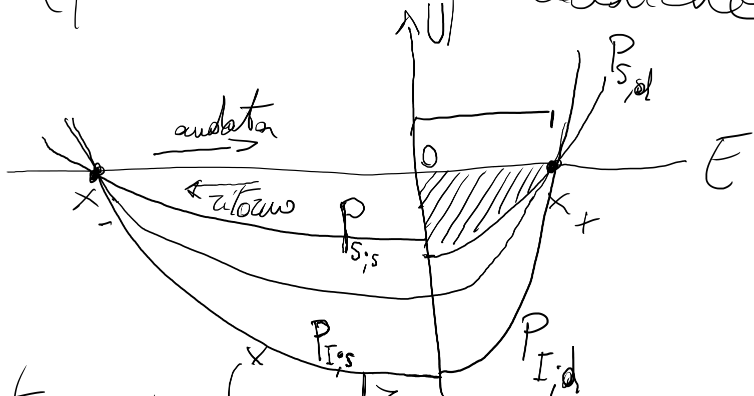
Stime di periodo
(per orbite periodiche)



$$t-t_0=\pm\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(\xi)\right)}}$$

$$T_{andata}=\int_{x_-}^{x_+}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}}$$

$$T_{ritorno}=+\int_{x_-}^{x_+}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}}$$

$$\boxed{T=2\int_{x_-}^{x_+}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\cancel{m}}\,\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\,\dot{x}^2}$$

altro non è che l'integrale di $dt=\dfrac{dx}{v}$

Proposizione: Siano l'energia potenziale U, il livello di energia E e un intorno $B(0)\subseteq\mathbb{R}$ t.c.

- $U: B(0)\to\mathbb{R}$, $U\in\mathcal{C}^1(B(0))\cap\mathcal{C}^2(B(0)\setminus\{0\})$;
- $\exists\, x_\pm\in B(0)$, $U(x_\pm)=E$, $U'(x_-)<0$, $U'(x_+)>0$; $\underline{U'(0)=0}$, 0 p.to di minimo;

allora vale sempre la seguente minorazione

$$T(E)\geq 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sup\limits_{x\in(x_-,0]\cup[0,x_+)}U''(x)}}\,;$$

inoltre, vale la seguente maggiorazione

$$T(E)\leq 2\pi\sqrt{\frac{m}{\inf\limits_{x\in(x_-,0]\cup[0,x_+)}U''(x)}}\,,$$ purché il radicando sia >0.

Lemma: nelle stesse ipotesi della proposizione, si considerino le seguenti 4 parabole:

$$P_{S,s}(x) = \frac{1}{2}B_s x^2 + E - \frac{1}{2}B_s x_-^2; \quad P_{S,d}(x) = \frac{1}{2}B_d x^2 + E - \frac{1}{2}B_d x_+^2$$

$$P_{I,s}(x) = \frac{1}{2}A_s x^2 + E - \frac{1}{2}A_s x_-^2; \quad P_{I,d}(x) = \frac{1}{2}A_d x^2 + E - \frac{1}{2}A_d x_+^2$$

dove $B_s = \inf_{x\in(x_-,0)} U''(x)$, $B_d = \inf_{x\in(0,x_+)} U''(x)$,

$A_s = \sup_{x\in(x_-,0)} U''(x)$, $A_d = \sup_{x\in(0,x_+)} U''(x)$;

allora valgono le catene di disuguaglianze

$$P_{I,s}(x) \le U(x) \le P_{S,s}(x) \quad \forall x\in[x_-,0],$$

$$P_{I,d}(x) \le U(x) \le P_{S,d}(x) \quad \forall x\in[0,x_+].$$

Per semplicità, ci limitiamo a provare che

$$U(x) \le P_{S,d}(x) \quad \forall x\in[0,x_+].$$

Introduciamo, $g(x) = P_{S,d}(x) - U(x)$. Supponiamo per assurdo che esista $\hat{x}\in[0,x_+)$ tale che

$$g(\hat{x}) < 0.$$

Applichiamo il teorema di Lagr. all'intervallo $[\hat{x}, x_+]$. Siccome in x_+, $g(x_+)=0$, allora $\exists\, x^*\in(\hat{x},x_+)$ t.c. $g'(x^*)>0$. Ricordiamo che $U'(0)=0 \Rightarrow g'(0)=0$.

Applichiamo il teor. di Lagrange a g' in $[0,x^*] \Rightarrow$ $\exists\, \bar{x}\in(0,x^*)\subseteq(0,x_+)$ t.c. $g''(\bar{x})>0$, assurdo poiché da $g''(\bar{x}) = P''_{S,d}(\bar{x}) - U''(\bar{x}) = B_d - U''(\bar{x}) > 0$ seguirebbe che $\inf_{x\in(0,x_+)} U''(x) > U''(\bar{x})$ (ASSURDO!).

$$\Rightarrow g(x)\ge 0 \quad \forall x\in[0,x_+] \Rightarrow P_{S,d}(x)\ge U(x) \quad \forall x\in[0,x_+]$$

Analogamente si dimostrano le altre tre disuguaglianze. C.V.D. (del Lemma).

Dim. (della proposizione): dal Lemma segue che

$$E - P_{I;d}(x) \geq E - U(x) \geq E - P_{S;d}(x) \quad \forall x \in [0, x_+]$$

e quindi

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - P_{I;d}(x)\right)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - P_{S;d}(x)\right)}}$$

Analogamente, si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - P_{I;S}(x)\right)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - P_{S;S}(x)\right)}} \quad \forall x \in [x_-, 0]$$

$$2\left[\int_{x_-}^{0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - P_{I;S}(x)\right)}} + \int_{0}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - P_{I;d}(x)\right)}}\right] \leq T(E) = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}$$

Calcoliamo

$$2\int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\cancel{E} - \frac{1}{2}A_d x^2 - \cancel{E} + \frac{1}{2}A_d x_+^2\right)}} = 2\int_0^{x_+} \sqrt{\frac{m}{A_d}} \frac{dx}{\sqrt{x_+^2 - x^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{m}{A_d}} \int_0^{x_+} \frac{1}{x_+} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_+}\right)^2}} = 2\sqrt{\frac{m}{A_d}} \arcsin\left(\frac{x}{x_+}\right)\Bigg|_0^{x_+} = \pi\sqrt{\frac{m}{A_d}}$$

$$\Rightarrow \quad \pi\sqrt{\frac{m}{A_S}} + \pi\sqrt{\frac{m}{A_d}} \leq T(E)$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi\sqrt{\frac{m}{\max\{A_S, A_d\}}} \leq T(E)$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sup_{x \in (x_-, 0) \cup (0, x_+)} U''}} \leq T(E).$$

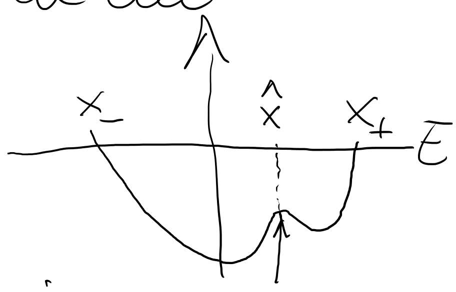
Analogamente si dimostra che

$$T(E) \le 2\pi \sqrt{\frac{m}{\inf\limits_{x\in(x_-,0)\cup(0,x_+)} U''(x)}}$$

che ha senso purché l'inf di U'' sia > 0.

C.V.D.

Esempio di situazione in cui l'inf di U'' è < 0:



Corollario: Assumiamo quasi le stesse ipotesi della proposizione precedente, ma rafforziamo la regolarità dell'energia potenziale, cioè $U \in C^2(B(0))$ (ricordiamo $x_\pm \in B(0)$), allora

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{\max\limits_{x\in[x_-,x_+]} U''(x)}} \le T(E) \le 2\pi\sqrt{\frac{m}{\min\limits_{x\in[x_-,x_+]} U''(x)}}$$

dove la minorazione vale sempre e la maggiorazione è valida quando $\min\limits_{x\in[x_-,x_+]} U''(x) > 0$.

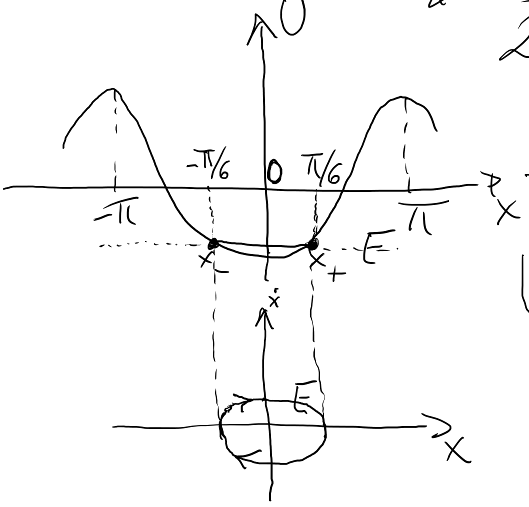
— o —

La dimostrazione segue immediatamente dalla proposizione (precedentemente dimostrata) riguardante la stima del periodo.

Esercizio: si stimi il periodo per un'orbita periodica del pendolo matematico che ha un'ampiezza di librazione di 60°.
Si effettui tale stima con un errore relativo non superiore al 50%.

— o —

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E, \text{ con } U(x) = -\omega^2 \cos x$$



$$\frac{2\pi}{\sqrt{\max\limits_{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} \omega^2\cos x}} \le T(E) \le \frac{2\pi}{\sqrt{\min\limits_{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} \omega^2\cos x}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{2\pi}{\omega} \le T(E) \le \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{1}{\cos(\pi/6)}}$$

$$T_- = \frac{2\pi}{\omega} \le T(E) \le \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} = T_+$$

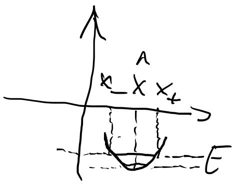
def. come errore relativo della stima la seguente quantità: $\frac{(T_+ - T_-)/\cancel{2}}{(T_+ + T_-)/\cancel{2}} = \frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} - 1}{\sqrt{2/\sqrt{3}} + 1} < \frac{0.2}{2} = 10\%$

— o —

Teorema (delle piccole oscillazioni): Sia $U: B(\hat{x}) \to \mathbb{R}$ t.c. $\hat{x}$ è p.to di minimo (stretto) assoluto di U in $B(\hat{x})$ e $U \in C^2(B(0))$, allora vale la seguente eq.

$$\lim_{E \to U(\hat{x})^+} T(E) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(\hat{x})}}, \text{ quando } U''(\hat{x}) > 0$$

Dim. Si osservi che per $E \to U(\hat{x})^+$



$x_\pm \to \hat{x}$, quindi si applichino le stime

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{\max\limits_{x\in[x_-,x_+]} U''(x)}} \le T(E) \le 2\pi\sqrt{\frac{m}{\min\limits_{x\in[x_-,x_+]} U''(x)}}$$

per il teorema del confronto segue la tesi. C.V.D.

Proposizione: Si consideri la famiglia di potenziali

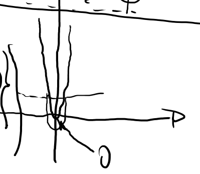
$$U_\alpha(x)=\frac{1}{2}k|x|^\alpha \quad \text{con } \alpha>1,$$ allora il limite delle piccole oscillazioni nei pressi dell'origine è t.c.

$$\lim_{E\to 0^+} T(E)=\begin{cases} 0 & \text{per } \alpha\in(1,2) \\ 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} & \text{per } \alpha=2 \\ +\infty & \text{per } \alpha>2. \end{cases}$$

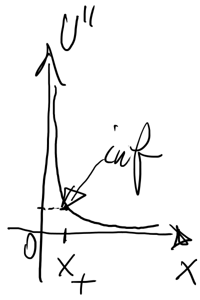
Verifica: per $\alpha=2$, $U_2(x)=\frac{1}{2}kx^2$, caso dell'oscillatore armonico: $T(E)=\frac{2\pi}{\omega}$ con $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T(E)=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Caso $1<\alpha<2$; $U'_\alpha(x)=\frac{\alpha}{2}x^{\alpha-1}$. Sfruttiamo la parità, limitiamoci a $x>0$

$U''_\alpha(x)=\frac{1}{2}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{x^{2-\alpha}}$. Si osservi che $U\in C^1(\mathbb{R})\cap C^2(\mathbb{R}\setminus\{0\})$



$$T(E)\geq 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sup_{x\in(0,x_+)}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{x^{2-\alpha}}}}$$



dove $\frac{1}{2}kx_\pm^\alpha=E \Rightarrow \boxed{x_\pm=\pm\left(\frac{2E}{k}\right)^{1/\alpha}}$

$$\Rightarrow \sup_{x\in(0,x_+)} U''(x)=+\infty \Rightarrow T(E)\geq 0.$$

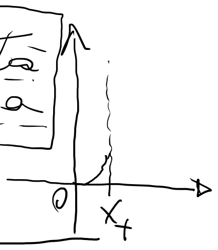
$$T(E)\leq 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{\left(\frac{2E}{k}\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}}}=2\pi\sqrt{\frac{m\left(\frac{2E}{k}\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}}{\alpha\cdot(\alpha-1)}} \xrightarrow{E\to0^+} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{E\to0^+}T(E)=0.$$

Caso con $\alpha>2$

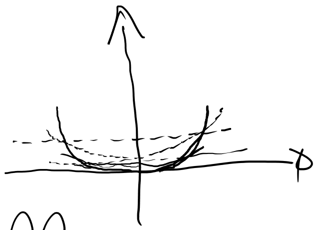
$U''(x)=\frac{1}{2}k\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, $\alpha-2>0$

Per la parità ci limitiamo a $x>0$



$$\Rightarrow T(E)\geq 2\pi\sqrt{\frac{m}{\max_{x\in[0,x_+]} k\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k\alpha(\alpha-1)\left(\frac{2E}{k}\right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}}} \xrightarrow{E\to0^+} +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{E \to 0^+} T(E) = +\infty .$$



Aggiunta al teorema delle piccole oscillazioni: se $U \in C^2(B(\hat{x}))$ con $\hat{x}$ p.to di minimo assoluto, quando $U''(0)=0$, allora $\displaystyle\lim_{E \to U(\hat{x})^+} T(E) = +\infty$.

Teorema (l'oscillatore armonico come unico sistema M.U.P. tale che il periodo NON dipende dalle condizioni iniziali): Sia l'energia potenziale U tale che

- $U \in C^2(\mathbb{R})$
- $\displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} U(x) = +\infty$
- $U'(0)=0 \quad (e\ U(0)=0)$
- $U(x) = U(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Se $\underbrace{\frac{d}{dE} T(E) = 0}$, allora $\exists\, k>0$ t.c.

$$\underbrace{U(x) = \frac{1}{2} k x^2}.$$

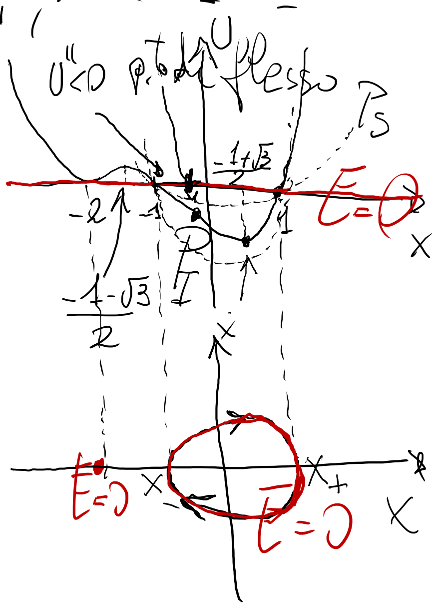
Per la dimostrazione, si vedano le note del prof. Esposito, proposizione 4.7.

Esercizio: si consideri un problema M.U.P. con $m=1$ e $\underline{U(x) = x^4+4x^3+3x^2-4x-4}$. Si determinino T_- e $T_+ \in \mathbb{R}_+$ che consentono di stimare l'orbita periodica di livello di energia $E=0$, cioè $T_- \leq T(0) \leq T_+$.

Svolgimento. Si osservi che

$$U(x)=(x+2)^2\cdot(x+1)(x-1)$$

$\Rightarrow U(x)=E=0$ solo t.c. $\underbrace{x=-2}_{\text{con molteplicità 2}}$, $x=\pm 1$



$$\lim_{|x|\to+\infty} U(x)=+\infty.$$

$$U'(x)=4x^3+12x^2+6x-4$$

P.ti stazionari: $U'(x)=0$ per

$$x=-2 \Rightarrow U'(x)=4(x+2)\underbrace{\left(x^2+x-\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$U'(x)=0 \iff x=-2,\quad x=\underbrace{\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}}$$

$$U''(x)=12x^2+24x+6=6(2x^2+4x+1)$$

$$U''(x)=0 \iff x=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2} \quad \begin{cases}\simeq -1.7\\ \simeq -0.3\end{cases}$$

$$U'''(x)=24(x+1),\quad U'''(x)=0 \text{ per } x=-1 \Rightarrow \boxed{U'''(x)>0 \text{ per } x>-1}$$

Osserviamo che in $x_-=-1$, $U''(-1)=-6$ (!!!)

$$T(0)\geq \frac{2\pi}{\sqrt{\max_{x\in[-1,1]} U''(x)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{U''(1)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{42}}.$$

T_-

$$T(0)\leq \frac{2\pi}{\sqrt{\min_{x\in[-1,1]} U''(x)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{U''(-1)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{-6}}$$

perde di senso!

Strategia: proviamo a "incastrare" il potenziale U tra una parabola superiore $P_S(x)$ e una inferiore $P_I(x)$ $\forall x\in[-1,1]$.

Definiamo: $P_S(x) := \frac{1}{2}B(x^2-1)$

$$P_I(x) := \frac{1}{2}A(x^2-1)$$

in modo t.c. $P_I(\pm 1) = P_S(\pm 1) = U(\pm 1) = 0$.

Vogliamo determinare A e B in modo t.c.

$$\frac{1}{2}A(x^2-1) \le U(x) \le \frac{1}{2}B(x^2-1) \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}A(x^2-1) \le (x^2-1)\cdot(x+2)^2 \le \frac{1}{2}B(x^2-1) \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}A \ge (x+2)^2 \ge \frac{1}{2}B \quad \forall x \in (-1,1).$$ (perché in $x = \pm 1$)

Poniamo $\frac{1}{2}A = \max_{x\in[-1,1]}\{(x+2)^2\} = 9 \Rightarrow A = 18$.

Poniamo $\frac{B}{2} = \min_{x\in[-1,1]}\{(x+2)^2\} = 1 \Rightarrow B = 2$.

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{18}} = \frac{2\pi}{\sqrt{P_I''}} \le T(0) \le 2\pi\sqrt{\frac{1}{P_S''}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

$T_- > \frac{2\pi}{\sqrt{42}}$ $\qquad T_- \gtrsim 1.48$ $\qquad T_+ \lesssim 4.45$

Un ulteriore "semplice" metodo per produrre delle minorazioni, quando si stima il periodo.

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$$

Oss. 1: $\left|\frac{dx}{v}\right| \ge \left|\frac{dx}{v_{max}}\right|$ dove $v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{min})}$

Oss. 2: $T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}} \geq 2\left(\frac{x_+ - x_-}{V_{max}}\right)$,

cioè $T \geq 2\,\frac{(x_+ - x_-)}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{min})}}$

Applicazione della strategia (appena discussa) per effettuare la minorazione del periodo nell'ambito dell'ultimo esercizio

$$U_{min} = U\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = \underbrace{-\frac{3}{4}\left(3+2\sqrt{3}\right)}\gtrsim -4.85$$

$$\Rightarrow V_{max} \lesssim \sqrt{2(0+4.85)} \lesssim \sqrt{9.7} \lesssim 3.12$$

$$\Rightarrow T(0) > \frac{2\cdot(1+1)}{3.12} \gtrsim 1.28$$

È più stringente l'ultima minorazione calcolata, cioè $T_- = \frac{2\pi}{\sqrt{18}} > 1.48$

Per la cronaca, nel caso di questo esercizio abbiamo un errore relativo per le stime che è

$$\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} \lesssim 50.1\%$$