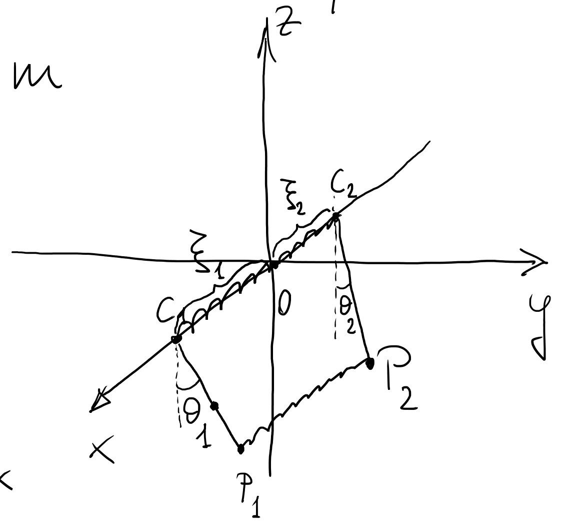
Tema d'esame del 16/1/2017

masse aste C_1P_1 e $C_2P_2 = m$

$\overline{C_1P_1} = \overline{C_2P_2} = R$



$C_1, C_2 \in$ asse x

$\vec{C_1P_1} \perp \underline{e}_x$, $\vec{C_2P_2} \perp \underline{e}_x$

aste omogenee.

Costanti elastiche molle $OC_1, OC_2, P_1P_2 = k$

(1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

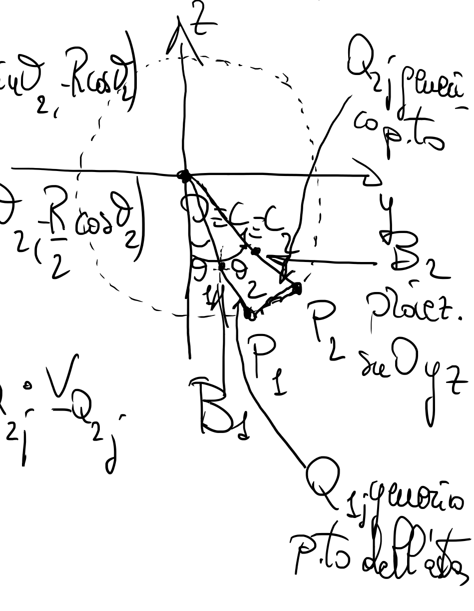
Coordinate libere o lagrangiane

$$(\xi_1, \xi_2, \theta_1, \theta_2)$$

Coord. di $C_1: (\xi_1, 0, 0)$, $C_2: (\xi_2, 0, 0)$

$P_1: (\xi_1, R\sin\theta_1, -R\cos\theta_1)$ $P_2: (\xi_2, R\sin\theta_2, -R\cos\theta_2)$

$B_1: (\xi_1, R/2 \sin\theta_1, -\frac{R}{2}\cos\theta_1)$ $B_2(\xi_2, \frac{R}{2}\sin\theta_2, -\frac{R}{2}\cos\theta_2)$



$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_1} m_j \underline{V}_{Q_{1j}} \cdot \underline{V}_{Q_{1j}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_2} m_j \underline{V}_{Q_{2j}} \cdot \underline{V}_{Q_{2j}}$$

Sia $\overline{C_1Q_{1j}} = \rho_{1j}$, $\overline{C_2Q_{2j}} = \rho_{2j}$

Coord. $Q_{1j}: (\xi_1, \rho_{1j}\sin\theta_1, -\rho_{1j}\cos\theta_1)$ $Q_{2j}: (\xi_2, \rho_{2j}\sin\theta_2, -\rho_{2j}\cos\theta_2)$

$\Rightarrow \underline{V}_{Q_{1j}} = (\dot\xi_1, \rho_{1j}\dot\theta_1\cos\theta_1, \rho_{1j}\dot\theta_1\sin\theta_1)$ $\underline{V}_{Q_{2j}} = (\dot\xi_2, \rho_{2j}\dot\theta_2\cos\theta_2, \rho_{2j}\dot\theta_2\sin\theta_2)$

$$T = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{j=1}^{N_1} m_j}_{\substack{\text{massa totale}\\ \text{della prima asta}\\ = m}} \dot\xi_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{j=1}^{N_1} m_j \rho_{1j}^2}_{\substack{\text{Inerzia rispetto}\\ \text{all'asse x della}\\ \text{prima asta}}} \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{j=1}^{N_2} m_j}_{\substack{\text{massa totale}\\ \text{della seconda}\\ \text{asta} = m}} \dot\xi_2^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{j=1}^{N_2} m_j \rho_{2j}^2}_{\substack{\text{Inerzia}\\ \text{rispetto}\\ \text{all'asse}\\ \text{x della seconda}\\ \text{asta}}} \dot\theta_2^2$$

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2\right)+\frac{1}{6}mR^2\left(\dot{\vartheta}_1^2+\dot{\vartheta}_2^2\right)$$

dove abbiamo calcolato l'inerzia di ciascuna delle aste rispetto alle rotazioni attorno all'asse x, cioè

$$I_1=\sum_{i=1}^{N_1} m_i \rho_{1i}^2=\delta\int_0^R d\rho\,\rho^2=\frac{m}{\cancel{R}}\frac{R^{\cancel{3}}}{3}=\frac{mR^2}{3},$$

analogamente si ha che $I_2=\frac{mR^2}{3}$.

L'energia cinetica poteva essere calcolata usando il teorema di König: $T=\frac{1}{2}m\underline{v}_{B_1}\cdot\underline{v}_{B_1}+\frac{1}{2}I_{B_1}\dot{\vartheta}_1^2+\frac{1}{2}m\underline{v}_{B_2}\cdot\underline{v}_{B_2}+\frac{1}{2}I_{B_2}\dot{\vartheta}_2^2$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2\right)+\frac{1}{2}m\frac{R^2}{4}\left(\dot{\vartheta}_1^2+\dot{\vartheta}_2^2\right)$$ inerzia calcolata rispetto al baricentro

$$+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{12}\left(\dot{\vartheta}_1^2+\dot{\vartheta}_2^2\right)=\frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2\right)+\frac{1}{6}mR^2\left(\dot{\vartheta}_1^2+\dot{\vartheta}_2^2\right)$$

Passiamo al calcolo di

$$U=mg\,z_{B_1}+mg\,z_{B_2}+\frac{1}{2}k\overline{OC}_1^2+\frac{1}{2}k\overline{OC}_2^2+\frac{1}{2}k\overline{P_1P_2}^2$$

in funzione delle coordinate $(\xi_1,\xi_2,\vartheta_1,\vartheta_2)$.

A questo scopo, calcoliamo preliminarmente $\overline{P_1P_2}^2 = (\xi_1-\xi_2)^2 + R^2(\sin^2\vartheta_1+\sin^2\vartheta_2-2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2)$

$$+R^2(\cos^2\vartheta_1+\cos^2\vartheta_2-2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2)$$

$$\Rightarrow \overline{P_1P_2}^2 = (\xi_1-\xi_2)^2 + 2R^2(1-\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)).$$

Abbiamo quindi che

$$U = -mg\frac{R}{2}(\cos\vartheta_1+\cos\vartheta_2)+\frac{1}{2}k(\xi_1^2+\xi_2^2)$$
$$+\frac{1}{2}k(\xi_1-\xi_2)^2 - kR^2\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)$$

dove è stata omessa l'inessenziale costante additiva kR^2.

$\Rightarrow$ Possiamo scrivere la lagrangiana, cioè $L = \frac{1}{2}m(\dot\xi_1^2+\dot\xi_2^2)+\frac{1}{6}mR^2(\dot\vartheta_1^2+\dot\vartheta_2^2)+\frac{mgR}{2}(\cos\vartheta_1+\cos\vartheta_2)$

$$-k(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_1\xi_2)+kR^2\cos(\vartheta_1-\vartheta_2).$$

Conseguentemente le eq. di Lagrange sono

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\xi_1}-\frac{\partial L}{\partial\xi_1} = m\ddot\xi_1+2k\xi_1+k\xi_2 = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\xi_2}-\frac{\partial L}{\partial\xi_2} = m\ddot\xi_2+k(2\xi_2+\xi_1) = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta_1}-\frac{\partial L}{\partial\vartheta_1} = \frac{mR^2}{3}\ddot\vartheta_1+\frac{mgR}{2}\sin\vartheta_1+kR^2\sin(\vartheta_1-\vartheta_2) = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta_2}-\frac{\partial L}{\partial\vartheta_2} = \frac{mR^2}{3}\ddot\vartheta_2+\frac{mgR}{2}\sin\vartheta_2+kR^2\sin(\vartheta_2-\vartheta_1) = 0 \end{cases}$$

(2) Cond. iniz. t.c. C_1 e C_2 nell'origine al tempo $t=0$ con $\underline{v}_{C_1} = \underline{v}_{C_2} = \underline{0}$.

$\Rightarrow (\xi_1(0), 0, 0) = (\xi_2(0), 0, 0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \xi_1(0) = \xi_2(0) = 0$.

$\Rightarrow (\dot{\xi}_1(0), 0, 0) = (\dot{\xi}_2(0), 0, 0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = 0$

Dobbiamo quindi considerare problemi di Cauchy del tipo seguente

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 + k(2\xi_1 + \xi_2) = 0 \\ m\ddot{\xi}_2 + k(2\xi_2 + \xi_1) = 0 \\ \frac{mR^2}{3}\ddot{\vartheta}_1 + \frac{mgR}{2}\sin\vartheta_1 + kR^2\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0 \\ \frac{mR^2}{3}\ddot{\vartheta}_2 + \frac{mgR}{2}\sin\vartheta_2 + kR^2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0 \\ \xi_1(0) = \xi_2(0) = 0, \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = 0 \\ \vartheta_1(0) = \vartheta_{10}, \ \vartheta_2(0) = \vartheta_{20}, \ \dot{\vartheta}_1(0) = \dot{\vartheta}_{10}, \ \dot{\vartheta}_2(0) = \dot{\vartheta}_{20} \end{cases}$$

$\Rightarrow \xi_1(t) = \xi_2(t) = 0$ e $t \mapsto \vartheta_1(t)$, $t \mapsto \vartheta_2(t)$ soluzione del prob. di Cauchy (che è ben posto)

$$\begin{cases} \dfrac{mR^2\ddot\vartheta_1}{3} + \underline{\dfrac{mgR}{2}\sin\vartheta_1 + kR^2\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)} = 0 \\ \dfrac{mR^2\ddot\vartheta_2}{3} + \underline{\dfrac{mgR}{2}\sin\vartheta_2 + kR^2\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)} = 0 \\ \vartheta_1(0)=\vartheta_{10},\ \vartheta_2(0)=\vartheta_{20},\ \dot\vartheta_1(0)=\dot\vartheta_{10},\ \dot\vartheta_2(0)=\dot\vartheta_{20} \end{cases}$$

che ammette 1! soluzione.

Siccome $\forall t$ $\xi_1(t)=\xi_2(t)=0$, allora il moto è nel piano Oyz.

Il suddetto problema di Cauchy è in forma di un prob. per eq. di Lagrange associate a

$$\mathcal{L}(\vartheta_1,\vartheta_2,\dot\vartheta_1,\dot\vartheta_2) = \frac{mR^2}{6}(\dot\vartheta_1^2+\dot\vartheta_2^2) - U(\vartheta_1,\vartheta_2)$$

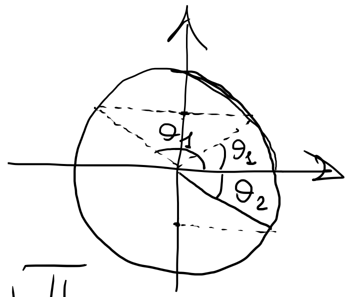
con $U(\vartheta_1,\vartheta_2) = -\dfrac{mgR}{2}(\cos\vartheta_1+\cos\vartheta_2) - kR^2\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)$

Cerchiamo i p.ti di equilibrio per $\mathcal{L}$, cioè

$$\begin{cases} \dfrac{mgR}{2}\sin\vartheta_1 + kR^2\sin(\vartheta_1-\vartheta_2) = 0 \\ \dfrac{mgR}{2}\sin\vartheta_2 + kR^2\sin(\vartheta_2-\vartheta_1) = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le 2 ultime eq. otteniamo

$$\frac{mgR}{2}\left(\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta_2\right) = 0$$



$$\Rightarrow \sin\vartheta_1 = -\sin\vartheta_2$$

$$\Rightarrow \vartheta_2 = -\vartheta_1 \text{ oppure } \vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi$$

$$\Downarrow \;\&\; \frac{\partial U}{\partial \vartheta_1} = 0$$

$$\frac{mgR}{2}\sin\vartheta_1 + kR^2\sin(2\vartheta_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin\vartheta_1 \cdot \left(mgR + 4kR^2\cos\vartheta_1\right) = 0$$

$\Downarrow$

$\vartheta_1 = 0, \pi$

$\Downarrow \;\&\; \vartheta_2 = -\vartheta_1$

$\vartheta_2 = 0, \pi$

$\Downarrow$

$\vartheta_1 = \pm\beta$

dove $\beta := \arccos\left(-\frac{mgR}{4kR^2}\right)$

che è definito sse $\frac{mg}{4kR} \leq 1$

$\Downarrow \;\&\; \vartheta_2 = -\vartheta_1$

$\vartheta_2 = \mp\beta$

Se $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi$, allora (da $\frac{\partial U}{\partial \vartheta_1} = 0$)

$\Rightarrow \sin \vartheta_1 = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = 0, \pi$

$\xrightarrow{\vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi} \vartheta_2 = \pi, 0$

Riassumendo abbiamo sol. di quiete in corrispondenza a

$$(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \{(0,0), (\pi,\pi), (0,\pi), (\pi,0), (\beta,-\beta), (-\beta,+\beta)\}$$

con $\beta = \arccos\left(-\frac{mg}{4kR}\right)$ che è def. quando $\frac{mg}{4kR} \leq 1$

Quando $m = g = k = R = 1$, allora $\frac{mg}{4kR} = 1/4$

$\Rightarrow \beta = \arccos(-1/4)$ e i p.ti di eq. sono comunque scritti come sopra.

Per discutere la stabilità dei p.ti di equilibrio, calcoliamo

$$\operatorname{Hess} U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\vartheta_1 + \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) & -\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ -\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) & \frac{1}{2}\cos\vartheta_2 + \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) \end{pmatrix}$$

Caso $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\vartheta_1=\vartheta_2=0} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Siccome $\det = \frac{9}{4} - 1 = 5/4$, $Tr = 3$ (dalla sol. di $\lambda^2 - Tr \cdot \lambda + \det = 0$), $\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.to di eq. STABILE

Caso $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\vartheta_1=\vartheta_2=\pi} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det = \frac{1}{4} - 1 = -3/4$, $Tr = 1$,

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 autoval. neg.

$\Rightarrow$ p.to di eq. INSTABILE.

Caso $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\substack{\vartheta_1=0 \\ \vartheta_2=\pi}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = -7/4 < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg.

$\Rightarrow$ INSTABILE

Caso $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta_1=\pi \\ \theta_2=0}} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det < 0$$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ INSTABILE

Casi $\theta_1 = \pm\beta$, $\theta_2 = \mp\beta$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta_1=\pm\beta \\ \theta_2=\mp\beta}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\beta + \cos(2\beta) & -\cos(2\beta) \\ -\cos(2\beta) & \frac{1}{2}\cos\beta + \cos(2\beta) \end{pmatrix}$$

$$\det = \frac{1}{4}\cos^2\beta + \cos\beta\cos(2\beta) = \frac{\cos\beta}{4}\left(\cos\beta + 4\cos(2\beta)\right)$$

$$= \frac{\cos\beta}{4}\left(\cos\beta + 8\cos^2\beta - 4\right) =$$

$$= -\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{16} - 4\right) = \frac{15}{64} > 0$$

$$\text{Tr} = \cos\beta + 2\cos(2\beta) = \cos\beta + 2(2\cos^2\beta - 1)$$

$$= \cos\beta + 4\cos^2\beta - 2 = \cancel{-1/4} + \cancel{1/4} - 2 < 0$$

Siccome $\det > 0$ e $\text{Tr} < 0 \Rightarrow$ 2 autoval. neg.

$\Rightarrow$ p.ti di equilibrio INSTABILI.

——— l_∞ ———

(3) $x_{P_1}(0) = x_{P_2}(0) = 0$, $y_{P_1}(0) = -y_{P_2}(0)$

$z_{P_1}(0) = z_{P_2}(0)$, $\dot{x}_{P_1}(0) = \dot{x}_{P_2}(0)$,

$\dot{y}_{P_1}(0) = \dot{y}_{P_2}(0) = \dot{z}_{P_1}(0) = \dot{z}_{P_2}(0) = 0$.

Possiamo riscrivere il problema di Cauchy, come segue:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 + k(2\xi_1 + \xi_2) = 0 \\ m\ddot{\xi}_2 + k(2\xi_2 + \xi_1) = 0 \\ \dfrac{mR^2}{3}\ddot{\vartheta}_1 + \dfrac{mgR}{2}\sin\vartheta_1 + kR^2\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0 \\ \dfrac{mR^2}{3}\ddot{\vartheta}_2 + \dfrac{mgR}{2}\sin\vartheta_2 + kR^2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0 \\ \underline{\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0}, \quad \underline{\dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = v_{x0}} \\ \underline{\vartheta_1(0) = \alpha, \quad \vartheta_2(0) = -\alpha}, \quad \underline{\dot{\vartheta}_1(0) = 0, \quad \dot{\vartheta}_2(0) = 0} \end{cases}$$

inizialmente le aste $\in Oyz$

inizialmente le aste sono in posizione speculare rispetto all'asse z.

velocità di rotazione inizialmente nulla

velocità iniziale delle aste

Cerchiamo soluzioni particolari che preservano le simmetrie delle condizioni iniziali, cioè proviamo a verificare che la soluzione è del tipo

$$t \mapsto \big(\xi_1(t) = \eta(t),\ \xi_2(t) = \eta(t),$$
$$\vartheta_1(t) = \psi(t),\ \vartheta_2(t) = -\psi(t)\big)$$

dove $\eta(t)$ e $\psi(t)$ devono risolvere le eq.:

$$\begin{cases} m\ddot{\eta} + 3k\eta = 0 \\ \frac{mR^2}{3}\ddot{\psi} + \frac{mgR}{2}\sin\psi + kR^2\sin(2\psi) = 0 \\ \eta(0) = 0,\ \dot{\eta}(0) = v_{x_0} \\ \psi(0) = \alpha,\ \dot{\psi}(0) = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ 1ª e 2ª eq. di Lagr.

3ª e (cambiata di segno) 4ª eq. di Lagr. $\Rightarrow$

Problema di Cauchy ridotto che deve essere risolto dalle leggi del moto $t \mapsto (\eta(t), \psi(t))$

La soluzione del problema di Cauchy ridotto esiste e adesso la scriviamo in modo più esplicito:

Moto orizzontale

$$\eta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t + \varphi\right) \quad \text{con} \begin{cases} A\cos\varphi = 0 \\ -A\sin\varphi = v_{x_0}/\sqrt{\frac{3k}{m}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, se $v_{x_0} > 0 \Rightarrow \varphi = -\pi/2$, se $v_{x_0} = 0 \Rightarrow A = 0$,

se $v_{x_0} < 0$ $\varphi = +\pi/2$; $A = |v_{x_0}|/\sqrt{\frac{3k}{m}}$

$$\Rightarrow \eta(t) = \frac{v_{x_0}}{\sqrt{\frac{3k}{m}}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right) \Rightarrow \eta(0) = 0,\ \dot{\eta}(0) = v_{x_0}$$

Moto rotazionale

$$\begin{cases} \dfrac{mR^2}{3}\ddot{\psi} + \dfrac{mgR}{2}\sin\psi + kR^2\sin(2\psi) = 0 \\ \psi(0) = \alpha \quad \dot{\psi}(0) = 0 \end{cases}$$

Lo vedo come un problema di M.O.P.

Oss. che $\dfrac{mgR}{2}\sin\psi + kR^2\sin(2\psi) = \dfrac{dU_\psi}{d\psi}$

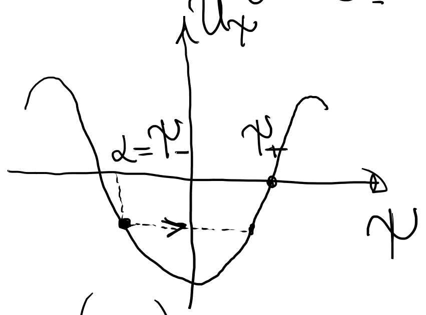
con $U_\psi = -\dfrac{mgR}{2}\cos\psi - \dfrac{kR^2}{2}\cos(2\psi)$

$$\Rightarrow \frac{mR^2}{6}\dot{\psi}^2 - \frac{mgR}{2}\cos\psi - \frac{kR^2}{2}\cos(2\psi) = E_\psi$$

è una legge di conservazione per "l'energia del moto rotazionale"

$$\Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_\psi + \frac{mgR}{2}\cos\psi + \frac{kR^2}{2}\cos(2\psi)\right)}}$$

dove $\pm$ va accordato con le cond. iniz. e il tratto da percorrere tra una barr. di pot. e l'altra (es. in figura) e $E_\psi = U_\psi(\alpha) =$



$$= -\frac{mgR}{2}\cos\alpha - \frac{kR}{2}\cos(2\alpha).$$

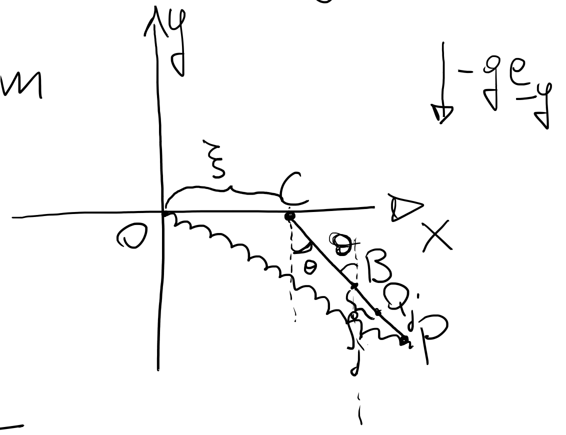
Per costruzione la legge del moto $t \mapsto (\eta(t), \eta(t), \psi(t), -\psi(t))$ (con $\eta(t)$ e $\psi(t)$ def. come sopra) è sol. del Problema di Cauchy iniziale (che comprende da 4 eq. di Lagrange le quali possono essere poste in forma normale) e quindi ne è l'unica soluzione per il th. di $\exists!$ delle soluzioni del prob. di Cauchy.

Tema d'esame Febbraio 2003

Massa asta (omogenea) $= m$

$\overline{CP} = \ell$

Costante molla tra O e $P = k$



— o —

(1) Lagrangiana e eq. di Lagrange

Coordinate libere o lagrangiane:

$$(\xi, \theta) \text{ come in figura}$$

Coordinate cartesiane di alcuni p.ti: $C:(\xi, 0)$ $\quad P:(\xi + \ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$

$B:\left(\xi + \frac{\ell}{2}\sin\theta, -\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)$

Velocità di alcuni p.ti:

$$\underline{v}_C = (\dot{\xi}, 0), \quad \underline{v}_P = (\dot{\xi} + \ell\dot{\theta}\cos\theta, \ell\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\underline{v}_B = \left(\dot{\xi} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta, \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

Applicando il teorema di König, abbiamo: $T = \frac{1}{2} m\, \underline{v}_B \cdot \underline{v}_B + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left\|\underline{v}_{Q_j} - \underline{v}_B\right\|^2$,

dove $\underline{v}_{Q_j} - \underline{v}_B = \rho_j \dot{\theta}(\cos\theta, \sin\theta)$ dove $\rho_j = \frac{\overrightarrow{Q_jB}}{Q_jB}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m\, \underline{v}_B \cdot \underline{v}_B + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \, \underline{v}_B \cdot \underline{v}_B + \frac{1}{2} I \dot\theta^2$$

dove $I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \delta \, d\rho \, \rho^2 = \frac{m}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} d\rho \, \rho^2 = \frac{m}{\cancel{\ell}} \frac{\ell^{\cancel{3}\,2}}{3 \cdot 4}$

$$= \frac{m \ell^2}{12}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \left(\dot\xi^2 + \frac{\ell^2 \dot\theta^2}{4} \cos^2\theta + \ell \dot\xi \dot\theta \cos\theta + \frac{\ell^2}{4} \dot\theta^2 \sin^2\theta \right)$$

$$+ \frac{m \ell^2}{24} \dot\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot\xi^2 + \ell \dot\xi \dot\theta \cos\theta + \frac{\ell^2}{3} \dot\theta^2 \right)$$

Passiamo al calcolo dell'energia potenziale, cioè $U = m g y_B + \frac{1}{2} k \overline{OP}^2$ espresso in funzione delle coordinate libere:

$$U = -mg \frac{\ell}{2} \cos\theta + \frac{1}{2} k \left(\xi^2 + \ell^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2\ell \xi \sin\theta \right)$$

$$= -mg \frac{\ell}{2} \cos\theta + \frac{1}{2} k \xi^2 + \frac{1}{2} k \ell^2 + k \ell \xi \sin\theta$$

Siamo quindi in grado di scrivere la lagrangiana

$$L(\xi, \theta, \dot\xi, \dot\theta) = \frac{1}{2} m \left(\dot\xi^2 + \ell \dot\xi \dot\theta \cos\theta + \frac{\ell^2}{3} \dot\theta^2 \right) + mg \frac{\ell}{2} \cos\theta$$

$$- \frac{1}{2} k \xi^2 - k \ell \xi \sin\theta,$$

dove è stata omessa l'inessenziale costante additiva $-\frac{1}{2} k \ell^2$.

Di conseguenza, le eq. di L. sono

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\xi} - \dfrac{\partial L}{\partial \xi} = m\ddot\xi + \dfrac{1}{2} m l \ddot\theta \cos\theta - \dfrac{1}{2} m l \dot\theta^2 \sin\theta + k(\xi + l\sin\theta) = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \dfrac{m l^2}{3}\ddot\theta + \dfrac{1}{2} m l \ddot\xi \cos\theta - \cancel{\dfrac{1}{2} m l \dot\xi \dot\theta \sin\theta} + \cancel{\dfrac{1}{2} m l \dot\xi \dot\theta \sin\theta} \\ \qquad + mg\dfrac{l}{2}\sin\theta + k l \xi \cos\theta = 0 \end{cases}$$

---

(2) P.ti di equilibrio e loro stabilità (al variare dei parametri)

Per determinare i p.ti di equilibrio risolviamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \xi} = k(\xi + l\sin\theta) = 0 \Rightarrow \xi = -l\sin\theta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = mg\dfrac{l}{2}\sin\theta + k l \xi\cos\theta = 0 \Rightarrow mg\dfrac{l}{2}\sin\theta - k l^2 \sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k l^2 \sin\theta\left(\frac{mg}{2kl} - \cos\theta\right) = 0$$

$$\sin\theta = 0 \qquad\qquad \cos\theta = \frac{mg}{2kl}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = 0, \pi \qquad\qquad \theta = \pm\beta \text{ dove } \beta := \arccos\left(\frac{mg}{2kl}\right),$$

$$\Downarrow$$

$$\xi = (0, 0) \qquad\qquad \xi = \mp l\sin\beta$$

con β è ben definito purché $\dfrac{mg}{2kl} < 1$.

I p.ti di equilibrio sono

$$(\xi,\theta)\in\left\{(0,0),(0,\pi),(-l\sin\beta,\beta),(l\sin\beta,-\beta)\right\}$$

Per discuterne la stabilità calcoliamo preliminarmente

$$\mathrm{Hess}\,U=\begin{pmatrix}k & kl\cos\theta\\ kl\cos\theta & mg\frac{l}{2}\cos\theta-kl\xi\sin\theta\end{pmatrix}$$

- Caso $(\xi,\theta)=(0,0)$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\xi,\theta=0}=\begin{pmatrix}k & kl\\ kl & mg\frac{l}{2}\end{pmatrix}$$

$$\det = mg\frac{kl}{2}-k^2l^2=k^2l^2\left(\frac{mg}{2kl}-1\right)$$

$$T_2=k+mg\frac{l}{2}>0$$

- sottocaso $\frac{mg}{2kl}>1$, $\det>0$, $T_2>0$

  $\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ STABILE

- sottocaso $\frac{mg}{2kl}=1$, $\det=0$, $T_2>0$

  $\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo

  $\Rightarrow$ serve un suppl. di indagine

• sottocaso con $\frac{mg}{2kl} < 1$, $\det < 0$,

$\Rightarrow$ 1 autoval. neg $\Rightarrow$ INSTABILE

_ Caso $(\xi, \vartheta) = (0, \pi)$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \vartheta=\pi}} = \begin{pmatrix} k & -kl \\ -kl & -mg\frac{l}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = -mg\frac{kl}{2} - k^2 l^2 < 0$

$\Rightarrow$ 1 autoval. neg. e 1 pos. $\Rightarrow$ INSTABILE

_ Caso $(\xi, \vartheta) = (\mp l \sin\beta, \pm\beta)$

$$\begin{pmatrix} k & +kl\cos\beta \\ +kl\cos\beta & mg\frac{l}{2}\cos\beta + kl^2\sin^2\beta \end{pmatrix} = \mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\xi=\mp l\sin\beta\\ \vartheta=\pm\beta}}$$

$$\det = mg\frac{kl}{2}\cos\beta + k^2l^2 - k^2l^2\cos^2\beta - k^2l^2\cos^2\beta$$

$$= mg\frac{\cancel{kl}}{2}\,\frac{mg}{2\cancel{kl}} + k^2l^2 - 2\cancel{k^2l^2}\frac{m^2g^2}{4\cancel{k^2l^2}} = k^2l^2 + m^2g^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = k^2l^2\left(-\frac{m^2g^2}{4k^2l^2} + 1\right)$$

• sottocaso con $\frac{mg}{2kl} < 1$

$\Rightarrow \det > 0 \Rightarrow \mathrm{Hess}\,U$ è def. pos. oppure def. neg. Siccome $(1,0)\cdot\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\xi=\mp l\sin\beta\\ \vartheta=\pm\beta}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = k > 0$, allora Hess U è def. pos.

$\Rightarrow$ p.ti di eq. STABILI

- sottocaso $\frac{mg}{2k\ell} = 1$

$\Rightarrow$ det $= 0$ e siccome $(1,0) \cdot \text{Hess}U \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = k > 0$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo

$\Rightarrow$ suppl. di indagine

- sottocaso $\frac{mg}{2k\ell} > 1$

$\nexists$ i p.ti di equilibrio

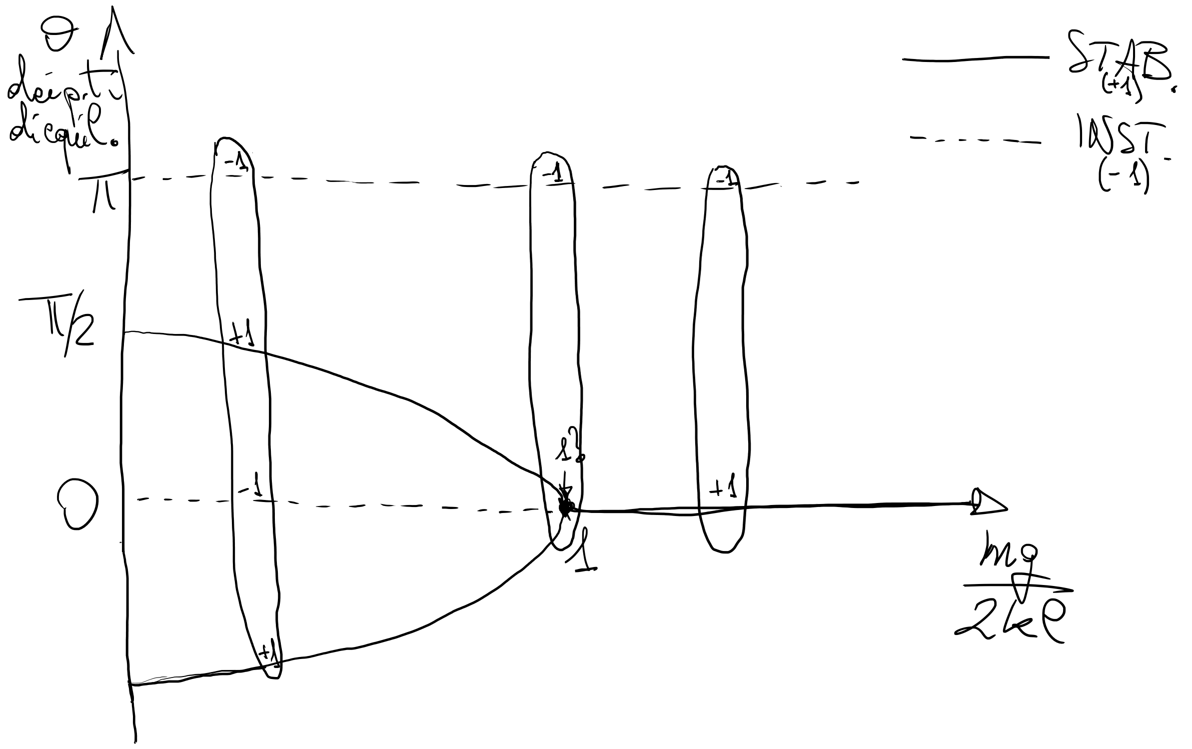
Riepilogo delle conclusioni

(ξ,θ) \ $\frac{mg}{2k\ell}$	<1	$=1$	>1
$(0,0)$	INST.	?! (STAB.)	STAB.
$(0,\pi)$	INST.	INST.	INST.
$(\mp \ell \sin\bar\beta, \pm\bar\beta)$	STAB.	?! (STAB.)	$\nexists$

in formato tabella

e in modo grafico

(osserviamo che $\left.(\mp \ell \sin\bar\beta, \pm\bar\beta)\right|_{\frac{mg}{2k\ell}=1} = (0,0)$):



Osserviamo la tipica situazione della biforcazione "a forchetta" di un p.to di equilibrio stabile, siamo quindi portati a congettura che per $\frac{mg}{2k\ell} = 1$, $(0,0)$ sia un p.to di equilibrio stabile.

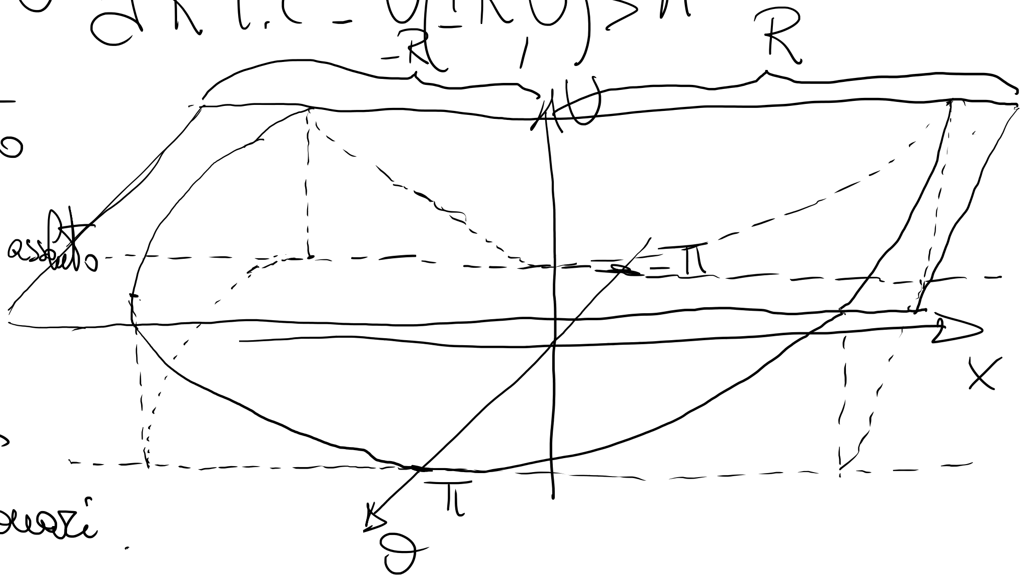
Proviamo a verificare quest'ultima congettura.

Osserviamo che $U : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$

e che $\lim_{|\xi| \to +\infty} \inf_{\theta \in \mathbb{T}} U(\xi, \theta) = \lim_{|\xi| \to +\infty} \inf_{\theta \in \mathbb{T}} \left(\frac{1}{2} k \xi^2 + k \ell \xi \sin\theta \right) = +\infty$

$\Rightarrow$ il potenziale U deve avere un "minimo al finito"

$\forall M > 0\ \exists R$ t.c. $U(\pm R, \theta) > M$



$\Rightarrow$ il p.to di minimo assoluto deve essere cercato tra i p.ti stazionari

Per $\frac{mg}{2kl} = 1$, abbiamo 2 soli p.ti stazionari del potenziale, cioè $(0,0)$ e $(0,\pi)$

$\Downarrow$

è il p.to di minimo assoluto

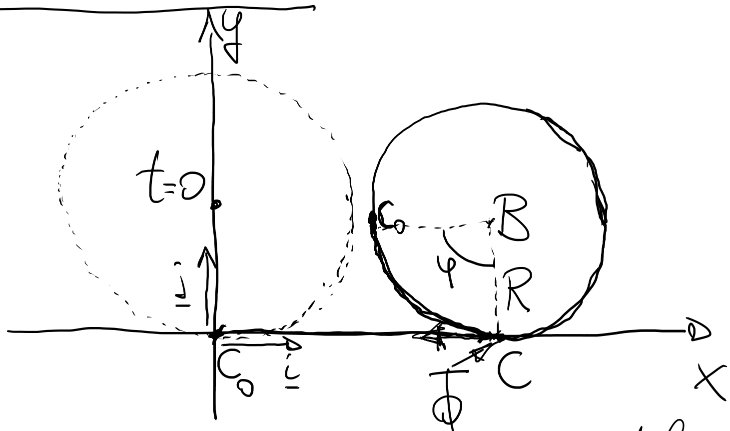
$\Downarrow$

Per il th. di Lagrange-Dirichlet $(0,0)$ è p.to di equilibrio STABILE.

l'Hessiano di U ha un autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ p.to di sella

—— o ——

Ruota che "rotola senza strisciare" su di una guida rettilinea: descrizione del vincolo



La condizione di ~~assenza~~ di "strisciamento" significa che la velocità della ruota nel p.to di contatto C è nulla.

Dalla formula fondamentale dei moti rigidi si ha che

$$\underline{V}_C = \underline{V}_B + \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{BC} \,,$$

dove $\underline{\omega}$ è normale al piano del disegno (che è quello in cui la ruota gira, ovviamente). Secondo la convenzione "della mano destra", $\underline{\omega}$ è in verso uscente se la ruota gira in senso anti-orario ed è in verso entrante se gira in senso orario, cioè $\underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\underline{k}$ dove φ è l'angolo delimitato da un p.to C_0 sulla ruota, da B e dalla verticale discendente (come in figura, cioè $\varphi = C_0\hat{B}C$), mentre $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ formano una terna destrorsa.

Se indichiamo con

$$(x_B, R)$$

le coordinate del p.to B, abbiamo che

$$\underline{v}_B = \dot{x}_B \underline{i},$$

quindi il vincolo di "non strisciamento" diventa

$$\underline{v}_B + \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{BC} = \dot{x}_B \underline{i} + \dot{\varphi} \underline{k} \wedge (-R)\underline{j} =$$

$$= (\dot{x}_B + R\dot{\varphi})\, \underline{i} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_B = -R\dot{\varphi}}$$ vincolo anolonomo

Se integriamo ambo i membri, con la condizione iniziale $x_B(0)=0$ e $\varphi(0)=0$, abbiamo che $\boxed{x_B = -R\varphi}$, vincolo olonomo

Cioè (con riferimento alla figura) si ha che la lunghezza dell'arco di circonferenza $\widehat{C_0C}$ è uguale alla distanza $\overline{OC}$, come è assai intuitivo (si pensi al contachilometri su un'automobile, su di una motocicletta, su di una bicicletta etc.).

Calcolo dell'energia cinetica

Dal teorema di König si ha

$$T = \frac{1}{2} m\, \underline{v}_B \cdot \underline{v}_B + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$$

massa e inerzia (rispetto all'asse passante per B) del corpo rigido che rotola senza strisciare

Siccome $\underline{v}_B = (\dot{x}_B, 0)$ e $\dot{x}_B = -R\dot{\varphi}$, allora:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{x}_B^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} \dot{x}_B^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) \dot{x}_B^2 .}$$