Deduzione delle eq. di Lagrange

Sistemi vincolati

Def.: si dice che un sistema di N p.ti materiali $P_1, \dots, P_N$ è soggetto a $r < 3N$ vincoli olonomi e bilateri, quando sussistono le seguenti r eq.:

$$G_s(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, r,$$

con $\left(\frac{\partial G_s}{\partial w_j}(\underline{w}, t) \right)_{\substack{s=1,\dots,r \\ j=1,\dots,3N}}$ di rango r

$\forall (\underline{w}, t)$ soluzione di $G_1 = \dots = G_r = 0$, dove

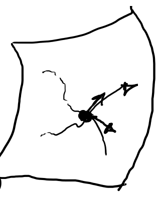
$$\underline{w} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N)$$

Olonomo significa che è una legge intera, mentre un vincolo è anolonomo se la legge che lo descrive include anche le velocità (esempi: sci che non derapa, ruota che rotola senza strisciare o derapare).

Un vincolo si dice unilatero quando è descritto da disequazioni, cioè $G_s(\underline{w}, t) \geq 0$.

Def.: Si dice spostamento virtuale conforme al vincolo

$$\delta \underline{w} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{w}}{\partial q_j} \delta q_j$$



Def.: si dice che un sistema vincolare olonomo e bilatero ha n gradi di libertà $0 < n \leq 3N$ quando $\exists$ n coord. locali t.c. $\left(\frac{\partial \underline{w}}{\partial q_j}\right)_{j=1,\dots,n}$ ha rango n.

Come conseguenza di vincolo olonomo e bilatero abbiamo che possiamo introdurre la seguente nozione.

Def.: Si dicono coordinate libere o Lagrangiane $(q_1, \dots, q_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto con $n = 3N - r$ le coordinate locali t.c.

$$G_s(\underline{w}(\underline{q}), t) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, r.$$

Def.: Si dice che un dispositivo vincolare olonomo e bilatero è ideale (realizzato da vincoli) quando

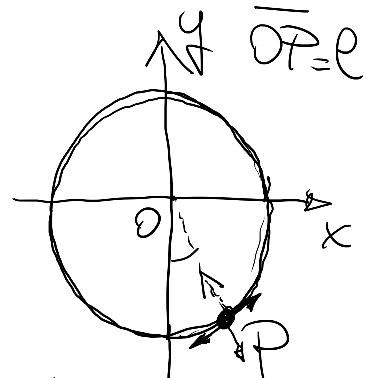
$$\sum_{j=1}^{N} \underline{\Phi}_j \cdot \delta \underline{x}_j = 0 \quad \forall \text{ possibile spostamento virtuale } \delta \underline{x}_1, \dots, \delta \underline{x}_N$$

$\underline{\Phi}_j$ è la generica reazione vincolare (agente sul punto j-esimo) che è esplicata dal dispositivo vincolare.

Esempio: il pendolo matematico

Eq. che definisce il vincolo

$x^2+y^2=\ell^2$, $\rho=\ell$



Vincolo ideale quando $\underline{\Phi}\cdot\delta\underline{(x,y)}=0$

Coordinata libera $\vartheta\in[-\pi,\pi)$.

$$\underline{\Phi}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta},\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\right)\delta\vartheta=0$$

La def. di vincolo ideale è riassunta dalle n eq.

$$\sum_{j=1}^{N}\underline{\Phi}_j\cdot\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_\ell}=0\quad\forall\ell=1,\dots,n$$

Osservazione: nel caso di vincoli fissi il lavoro delle reazioni vincolari è sempre nullo: $\mathcal{L}=\int_{t_0}^{t_f}dt\sum_{j,\ell}\left(\underline{\Phi}_j\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_\ell}\right)\dot{q}_\ell\,dt$

$$=\sum_{\ell=1}^{n}\int_{t_0}^{t_f}dt\left(\sum_{j=1}^{N}\underline{\Phi}_j\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_\ell}\right)\cdot\dot{q}_\ell\,dt=0$$

nel caso dei vincoli mobili può essere diversa da zero $\sum_{j=1}^{N}\underline{\Phi}_j\cdot\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial t}$

Esempio: il moscerino che si muove sulla mongolfiera

$\rho(t)=R(t)$ ← raggio della mongolfiera

Per i vincoli ideali vale il seguente Principio (di D'Alembert): i moti naturali di un sistema meccanico sottoposto a 3N-n vincoli olonomi, bilateri e ideali sono t.c.

$$\sum_{j=1}^{N}\left(m\ddot{\underline{x}}_j-\underline{F}_j\right)\cdot\delta\underline{x}_j=0 \quad \forall \text{ possibile spostamento virtuale } \delta\underline{x}_1,\dots,\delta\underline{x}_N$$

È evidentemente equivalente alla definizione di vincolo ideale più le eq. di Newton per tutti i punti materiali, cioè $m\ddot{\underline{x}}_j=\underline{F}_j+\underline{\Phi}_j \ \forall j=1,\dots,N$

$$\Rightarrow \underline{\Phi}_j=m\ddot{\underline{x}}_j-\underline{F}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{N}\left(m\ddot{\underline{x}}_j-\underline{F}_j\right)\delta\underline{x}_j=0$$

Da quest'ultima eq. e da $\delta\underline{x}_j=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_l}\delta q_l$

segue

L'equazione simbolica pura della dinamica

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N}\left(m\ddot{\underline{x}}_j-\underline{F}_j\right)\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_l}=0 \quad \forall l=1,\dots,n}$$

"pura" nel senso che non ci sono reazioni vincolari.

Proposizione: per un sistema meccanico con vincoli lisci, bilateri e ideali valgono le eq. di Lagrange di prima specie:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l \quad \forall l = 1, \dots, n}$$

dove $Q_l = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}$ è la componente l-esima della forza generalizzata

e $T = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \dot{\underline{x}}_j$

Dim. Dall'eq. simbolica pura della dinamica segue

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\underline{x}}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = Q_l$$

Concentriamoci su

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\underline{x}}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}\right)$$

$$- \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}$$

Osserviamo che valgono le seguenti 2 identità:

$$\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial \dot{q}_l} \quad \forall j,l \qquad e \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial q_l} \quad \forall j,l.$$

l-esima componente della velocità generalizzata

Per inciso verifichiamo le 2 identità

Osserviamo che $\dot{\underline{x}}_j = \frac{d}{dt}\underline{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i} \delta_{il} = \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}.$$

Inoltre, $\frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l \partial t}$

$$= \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial q_l}$$

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\underline{x}}_j \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial \dot{q}_l} - \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial q_l}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \dot{\underline{x}}_j - \frac{\partial}{\partial q_l} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \dot{\underline{x}}_j$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} T - \frac{\partial T}{\partial q_l}.$$

C.V.D.

Assumiamo che le forze attive agenti sul sistema siano conservative, cioè $\exists\, U = U(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t)$ t.c.

$$\underline{F}_j = -\mathrm{grad}_{\underline{x}_j} U,$$

allora $$Q_\ell = -\sum_{j=1}^{N} \mathrm{grad}_{\underline{x}_j} U \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_\ell} =$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial q_\ell}.$$

Proposizione:
Per un sistema meccanico sottoposto a forze conservative e a vincoli olonomi, bilateri e ideali valgono le seguenti eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial L}{\partial q_\ell} = 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, n$$

dove $L = T - U$

Verifica: Siccome valgono le eq.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial}{\partial q_\ell}(T - U) = 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\ell}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_\ell}(T - U) = 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, n$$

poiché $U = U(q_1, \dots, q_n, t) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\ell} = 0$

C.V.D.

Equivalenza tra le eq. di Newton e quelle di Lagrange

Eq. di Newton

$$\begin{cases} m_j \ddot{\underline{x}}_j = \underline{F}_j + \underline{\Phi}_j \quad \forall j=1,\dots,N \\ G_s(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_N,t)=0 \quad \forall s=1,\dots,r \\ \sum_{j=1}^{N} \underline{\Phi}_j \cdot \delta \underline{x}_j = 0 \quad \forall \delta\underline{x}_1,\dots,\delta\underline{x}_N \end{cases}$$

Eq. di Lagrange

n eq. in n incognite $q_1,\dots,q_n$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} = 0 \quad \forall l=1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{N} \underline{\Phi}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = 0 \quad \forall l=1,\dots,n$$

con $n=3N-r$

$6N$ eq. in $6N$ incognite $(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_N,\underline{\Phi}_1,\dots,\underline{\Phi}_N)$

$$\begin{cases} \underline{\Phi}_j = m_j \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j \quad \forall j=1,\dots,N \\ \sum_{j=1}^{N} (m_j \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j) \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = 0 \quad \forall l=1,\dots,n \\ G_s(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_N,t)=0 \quad \forall s=1,\dots,r \end{cases}$$

"eq. pura della dinamica"

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \\ G_s(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_N,t)=0 \quad \forall s=1,\dots,r \\ \underline{\Phi}_j = m_j \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j \end{cases}$$

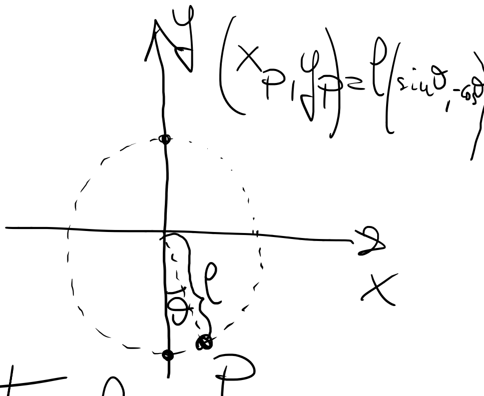
cioè le eq. di Lagr.

$$\Longleftrightarrow \boxed{\underline{x}_j = \underline{x}_j(q,t)} \quad \forall j=1,\dots,N$$

Altro non è che il sistema di eq. di Lagrange + la descrizione del vincolo + le eq. che definiscono le reazioni vincolari

Esempi di calcolo della lagrangiana e delle eq. di Lagrange.

Il caso del pendolo matematico



$\mathcal{L} = L = T - U$

adottiamo coordinate polari.
Scegliamo come coordinata libera θ

$$T = \frac{1}{2} m \, \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P = \frac{1}{2} m \left(\cancel{\dot\rho \underline{e}_\rho} + \rho \dot\theta \underline{e}_\theta\right) \cdot \left(\cancel{\dot\rho \underline{e}_\rho} + \rho \dot\theta \underline{e}_\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2$$

$$U = mgy = -mgl\cos\theta$$

$L = L(\theta, \dot\theta) = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 + mgl\cos\theta$ è la lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\ddot\theta + mgl\sin\theta = 0$$

è l'eq. di Lagrange

$ml^2\ddot\theta = -mgl\sin\theta$ è la II eq. cardinale calcolata rispetto al polo O e proiettata sulla normale al piano Oxy

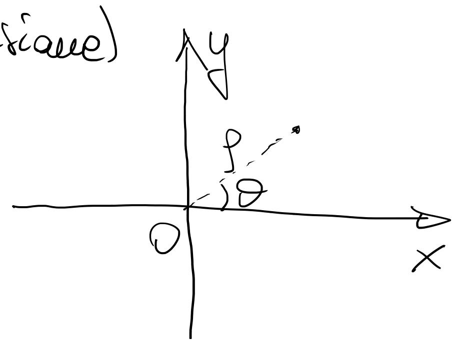
$\Updownarrow$

$$\ddot\theta = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Il caso dei moti centrali

(In coord. cartesiane)

$$L(x,y,\dot x,\dot y) = \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2) - U(x,y)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 = m\ddot x + \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot y} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 = m\ddot y + \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

Si osservi che abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} \boxed{m\ddot x = -\frac{\partial U}{\partial x}} = -\frac{dU}{d\rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \boxed{m\ddot y = -\frac{\partial U}{\partial y}} = -\frac{dU}{dy}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

nel caso dei moti centrali

Le eq. di Newton nel piano per un problema conservativo con U che dipende solo da x, y.

(In coord. polari)

$$L = L(\rho,\theta,\dot\rho,\dot\theta) = \frac{1}{2}m(\dot\rho\, \underline{e}_\rho + \rho\dot\theta\, \underline{e}_\theta)\cdot(\dot\rho\, \underline{e}_\rho + \rho\dot\theta\, \underline{e}_\theta) - U(\rho) = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2) - U(\rho)$$

Eq. di Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\rho} - \dfrac{\partial L}{\partial \rho} = \boxed{m\ddot\rho - m\rho\dot\theta^2 + \dfrac{dU}{d\rho} = 0} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \dfrac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot\theta\right) = \boxed{m\left(2\rho\dot\rho\dot\theta + \rho^2\ddot\theta\right) = 0} \end{cases}$$

le eq. nei riquadri sono proprio le eq. di Newton in coord. polari.

Dalla 2ª eq. segue

$\boxed{m\rho^2\dot\theta = J}$, cioè la conservazione del momento angolare

Da quest'ultima e dalla 1ª eq. di Lagr. segue $m\ddot\rho - \dfrac{J}{m\rho^3} + \dfrac{dU}{d\rho} = 0$, quando $J \neq 0$,

cioè $m\ddot\rho + \dfrac{dU_{eff}}{d\rho} = 0$, con $U_{eff}(\rho) = \dfrac{J}{2m\rho^2} + U(\rho)$

$$\frac{1}{2}m\dot\rho^2 + U_{eff}(\rho) = E \,.$$

Nel caso dei moti centrali nel piano abbiamo ottenuto

$$\begin{array}{ccc} \text{Lagr. } L = L(x,y,\dot x,\dot y) & \Longrightarrow & \text{Lagr. } L = L(\rho,\theta,\dot\rho,\dot\theta) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{Eq. di L} \Leftrightarrow \text{Eq. di N. in coord. } (x,y) & \Longrightarrow & \text{Eq. di L} \Leftrightarrow \text{eq. di N in coord. polari} \end{array}$$

Proposizione (invarianza in forma delle eq. di Lagrange): Sia $L=L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t)$ una funz. lagrangiana e $\underline{q}=\underline{q}(\tilde{\underline{q}},t)$ un diffeomorfismo; sia quindi $\tilde{L}(\tilde{\underline{q}},\dot{\tilde{\underline{q}}},t)=L(\underline{q}(\tilde{\underline{q}},t),\dot{\underline{q}}(\tilde{\underline{q}},\dot{\tilde{\underline{q}}},t),t)$ la lagrangiana nelle nuove coordinate, allora $t\mapsto\tilde{\underline{q}}(t)$ è sol. delle eq. di Lagrange per $\tilde{L}$ se e solo se $t\mapsto\underline{q}(t)=\underline{q}(\tilde{\underline{q}}(t),t)$ lo è per le eq. di Lag. associate a L.

Dim.: In primis, calcoliamo

$$\dot{\underline{q}}(\underline{q},\dot{\tilde{\underline{q}}},t)=\frac{d}{dt}\underline{q}(\tilde{\underline{q}}(t),t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\underline{q}}{\partial\tilde{q}_j}(\tilde{\underline{q}},t)\dot{\tilde{q}}_j+\frac{\partial\underline{q}}{\partial t}$$

Si osserva quindi che $\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial\dot{\tilde{q}}_j}=\frac{\partial q_l}{\partial\tilde{q}_j}$ e anche

che $\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial\tilde{q}_h}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 q_l}{\partial\tilde{q}_h\partial\tilde{q}_j}\dot{\tilde{q}}_j+\frac{\partial^2 q_l}{\partial t\,\partial\tilde{q}_h}=\frac{d}{dt}\frac{\partial q_l}{\partial\tilde{q}_h}$.

Nelle nuove coord. le eq. di L. sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\tilde{q}}_h}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\tilde{q}_h}=0\,,\quad\text{dove}$$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\tilde{q}}_h}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial\dot{\tilde{q}}_h}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial\tilde{q}_h}\,,$$

quindi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \tilde{q}_h};$$

inoltre, $$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \tilde{q}_h}.$$

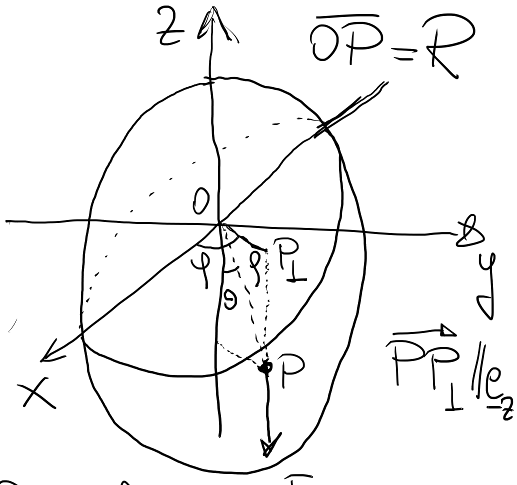
Ne segue che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_1} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_1} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_n} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h}\right)^T_{j,h=1,\dots,n} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

Siccome il $\det\left(\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h}\right)_{j,h=1,\dots,n} \neq 0$ (perché $q = q(\tilde{q}, t)$ è un diffeomorfismo), le eq. di Lagr. per $\tilde{L}$ sono soddisfatte se e solo se lo sono anche per L. C.V.D.

Il caso del pendolo sferico



massa $P = m$, $\overline{OP}=R$

Coord. libere (ϑ, φ)

$\Rightarrow$ coord. di P: $\begin{cases} x = R\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = R\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = -R\cos\vartheta \end{cases}$

$\underline{F} = -mg\underline{e}_z$

$\overline{PP_\perp} = R\sin\vartheta$

$$\underline{v}_P = R\left(\cos\vartheta\cos\varphi\,\dot\vartheta - \sin\vartheta\sin\varphi\,\dot\varphi,\ \cos\vartheta\sin\varphi\,\dot\vartheta + \sin\vartheta\cos\varphi\,\dot\varphi,\ \sin\vartheta\,\dot\vartheta\right)$$

$$L = \frac{1}{2}m\,\underline{v}_P\cdot\underline{v}_P - mgz = \frac{1}{2}mR^2\Big[\cos^2\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\dot\varphi^2$$
$$+ \sin^2\vartheta\,\dot\vartheta^2\Big] + mgR\cos\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 + mgR\cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} - \dfrac{\partial L}{\partial\vartheta} = mR^2\ddot\vartheta - mR^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2 + mgR\sin\vartheta = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = \dfrac{d}{dt}\left(mR^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{mR^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi = J_z} \Rightarrow \dot\varphi = \frac{J_z}{mR^2\sin^2\vartheta}$$

Infatti, $J_z = mR^2\sin\vartheta\cos\varphi\left(\cos\vartheta\sin\varphi\,\dot\vartheta + \sin\vartheta\cos\varphi\,\dot\varphi\right)$

$- mR^2\sin\vartheta\sin\varphi\left(\cos\vartheta\cos\varphi\,\dot\vartheta - \sin\vartheta\sin\varphi\,\dot\varphi\right)$

$= mR^2\sin\vartheta\Big[\cos\vartheta\cancel{\sin\varphi\cos\varphi}\,\dot\vartheta + \sin\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\dot\varphi$

$- \cancel{\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}\,\dot\vartheta\Big] = mR^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi$

Dalla 1ª eq. di L. e dalla conservazione di J_z

segue che $mR^2\ddot{\theta} - \frac{\cos\theta\, J_z^2}{mR^2\sin^3\theta} + mgR\sin\theta = 0$

$\Rightarrow mR^2\ddot{\theta} + \frac{d}{d\theta}U_{eff}(\theta) = 0$ con $U_{eff}(\theta) = \underbrace{\frac{J_z}{2mR^2\sin^2\theta}}_{\text{pot. centrifugo}} - mgR\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) = E$.

Oss.: nei moti centrali e nel pendolo sferico abbiamo trovato che la Lagrangiana non dipende esplicitamente da un angolo e, quindi abbiamo trovato una costante del moto.

Def.: si dice che una coordinata q_j Lagrangiana è ciclica se $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$.

Teorema: Se q_j è una coord. ciclica allora si conserva si conserva $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$.

Dim. Si scriva l'eq. di Lagr. j-esima:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}p_j = \dot{p}_j = 0. \quad \text{C.V.D.}$$

Esempi di momenti cinetici che sono cost. del moto nel problema di moti centrali e in quello del pendolo sferico.

Teorema (di Emmy Noether): siano $\underline{\varphi}(\alpha,q)$ una famiglia di diffeomorfismi a un parametro α, cioè $\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$) t.c. $\underline{\varphi}(0,q) = q$ e $L = L(q,\dot{q},t)$ una lagrangiana invariante, cioè

$$\frac{d}{d\alpha} L\left(\underline{\varphi}(\alpha,q), \underline{\psi}(\alpha,q,\dot{q}), t\right)\Big|_{\alpha=0} = 0,$$

dove $\underline{\psi}(\alpha,q,\dot{q})$ è l'estensione del diffeomorfismo alle velocità generalizzate,

allora $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ è una <u>costante del moto</u>.

Dim.: Per ipotesi si intende che

$$\underline{\psi}(\alpha,q,\dot{q}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial q_j}(\alpha,q)\, \dot{q}_j .$$

Partiamo da $\displaystyle 0 = \frac{d}{d\alpha} L\left(\underline{\varphi}(\alpha,q), \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial q_j}(\alpha,q)\dot{q}_j, t\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\Big(\underbrace{\underline{\varphi}(\alpha,q)}_{q \text{ per } \alpha=0}, \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial q_j}(\alpha,q)\dot{q}_j}_{\dot{q} \text{ per } \alpha=0}, t\Big) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\underline{\varphi}(\alpha,q), \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial q_j}(\alpha,q)\dot{q}_j, t\right) \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}(\underline{q}, \underline{\dot q}, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(\underline{q}, \underline{\dot q}, t) \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \right]$$

Siccome $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$ (per le eq. di Lagr.)

e $\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha \partial q_j}(\alpha, \underline{q})\Big|_{\alpha=0} \dot q_j =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}(\alpha, \underline{q})\Big|_{\alpha=0} \dot q_j = \underline{\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}(\alpha, \underline{q})\Big|_{\alpha=0}},$$

otteniamo

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(\underline{q}, \underline{\dot q}, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(\underline{q}, \underline{\dot q}, t) \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \underline{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \right)} \qquad \text{C.V.D.}$$

Esempi di applicazioni del teorema di Noether.

Da th. di Noether $\Rightarrow$ th. var. cicliche

Supponiamo che q_j sia una variabile ciclica, allora definiamo

$$\varphi_i(\alpha, \underline{q}) = \begin{cases} q_i & \forall i \neq j \\ q_j + \alpha \end{cases}, \quad \underline{\psi}(\alpha, \underline{q}, \underline{\dot q}) = \underline{\dot q}$$

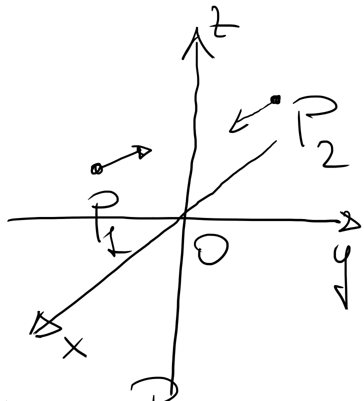
$$\Rightarrow L(\underline{\varphi}(\alpha, \underline{q}), \underline{\psi}(\alpha, \underline{q}, \underline{\dot q}), t) = L(\underline{q}, \underline{\dot q}, t),$$

poiché $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow$ si conserva $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} =: p_j.$$

—— ∘ ——

Il problema a 2 corpi



$$\underbrace{F_{12} = -F_{21} = f\left(\overline{P_1P_2}\right) \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overline{P_1P_2}}}$$

massa $P_1 = m_1$

" $P_2 = m_2$

$$F_{12} = -\operatorname{grad}_{x_2} U\left(\overline{P_1P_2}\right)$$

$q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $q_3 = z_1$, $q_4 = x_2$, $q_5 = y_2$, $q_6 = z_2$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \left(\sum_{j=1}^{3} \dot q_j^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\sum_{j=4}^{6} \dot q_j^2 \right) - U\left(\left\| (q_1,q_2,q_3) - (q_4,q_5,q_6) \right\| \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} m_i \dot q^2_{(i-1)3+j} - U\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{3} (q_j - q_{j+3})^2} \right)$$

$$\varphi_j(\alpha, q) = \begin{cases} q_j + \alpha & \text{se } j = 1,4 \\ q_j & \text{se } j = 2,3,5,6 \end{cases}, \quad \Psi(\alpha, q, \dot q) = \dot q$$

$$\Rightarrow L\left(\Phi(\alpha,q), \Psi(\alpha,q,\dot q)\right) = L(q, \dot q)$$

$\Rightarrow$ si conserva $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \left(\left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_4}$

$= m_1 \dot q_1 + m_2 \dot q_4$ è la componente sull'asse x

$= m_1 \dot x_1 + m_2 \dot x_2$ della quantità di moto

Analogamente con i diffeomorfismi

$$\varphi_j(\alpha, q) = \begin{cases} q_j + \alpha & \text{se } j = 2,5 \\ q_j & \text{se } j = 1,3,4,6 \end{cases} \quad \text{o} \quad \varphi_j(\alpha, q) = \begin{cases} q_j + \alpha & \text{se } j = 3,6 \\ q_j & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si verifica che si conserva $m_1 \dot y_1 + m_2 \dot y_2$ o $m_1 \dot z_1 + m_2 \dot z_2$

$$\begin{cases} \varphi_1(\alpha, \underline{q}) = q_1 & \varphi_4(\alpha, \underline{q}) = q_4 \\ \varphi_2(\alpha, \underline{q}) = \cos\alpha\, q_2 + \sin\alpha\, q_3 & \varphi_5(\alpha, \underline{q}) = \cos\alpha\, q_5 + \sin\alpha\, q_6 \\ \varphi_3(\alpha, \underline{q}) = -\sin\alpha\, q_2 + \cos\alpha\, q_3 & \varphi_6(\alpha, \underline{q}) = -\sin\alpha\, q_5 + \cos\alpha\, q_6 \end{cases}$$

$$\psi_1(\alpha, \underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \dot{q}_1 \qquad \psi_4 = \dot{q}_4$$

$$\psi_2 = \cos\alpha\, \dot{q}_2 + \sin\alpha\, \dot{q}_3 \qquad \psi_5 = \cos\alpha\, \dot{q}_5 + \sin\alpha\, \dot{q}_6$$

$$\psi_3 = -\sin\alpha\, \dot{q}_2 + \cos\alpha\, \dot{q}_3 \qquad \psi_6 = -\sin\alpha\, \dot{q}_5 + \cos\alpha\, \dot{q}_6$$

$$L\left(\underline{\varphi}(\alpha, \underline{q}), \psi(\alpha, \underline{q}, \underline{\dot{q}})\right) = L(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$$

Si conserva allora la seguente cost. del moto:

$$\sum_{i=1}^{6} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = q_3 \cdot m_1 \dot{q}_2 - q_2 \cdot m_1 \dot{q}_3$$

$$+ q_6 \cdot m_2 \dot{q}_5 - q_5 \cdot m_2 \dot{q}_6 = m_1 (z_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{z}_1)$$

$$+ m_2 (z_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{z}_2) = \underline{e}_x \cdot \left(\vec{OP}_1 \wedge m_1 \vec{v}_{P_1} + \vec{OP}_2 \wedge m_2 \vec{v}_{P_2} \right)$$

Si conserva la componente sull'asse x del momento angolare totale.

Analogamente si verifica la conservazione di $\vec{OP}_1 \wedge m_1 \vec{v}_{P_1} + \vec{OP}_2 \wedge m_2 \vec{v}_{P_2}$ su asse y e z.

Proposizione (conservazione dell'energia generalizzata): per sistemi descritti da una lagrangiana $L = L(q, \dot{q})$, cioè t.c. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, si conserva l'energia generalizzata: $H = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q})$

Dim. (si ricordi che $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$)

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j} \right) - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = 0 \qquad \text{C.V.D.}$$

Corollario: Nel caso in cui

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q)$$

allora $H = T + U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q)$, cioè l'energia totale meccanica del sistema.

Verifica: $H = \sum_{l=1}^{n} \dot{q}_l \sum_{i=1}^{n} a_{il}(q) \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q)$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(q) \dot{q}_i \dot{q}_l - \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(q) \dot{q}_i \dot{q}_l + U(q). \text{ C.V.D.}$$

Simmetrie		Costanti del moto
traslazione spaziale (distanze, lunghezze)	$\rightarrow$	quantità di moto
rotazione (angoli)	$\rightarrow$	momento angolare
traslazione temporale (tempo)	$\rightarrow$	energia

In ogni caso il prodotto di quelle quantità (sulla stessa riga) ha le dimensioni fisiche di un'azione. Infatti nella colonna a sinistra abbiamo q_j e a destra abbiamo $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ $\Rightarrow$

$$\left[q_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] = \frac{\cancel{[q_j]}\,[E]}{\cancel{[q_j]}/[t]} = [E]\cdot[t] = [m][v][l] = [\text{azione}]$$

Alcune caratteristiche tipiche delle equazioni di Lagrange

$$L = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t),$$

dove $T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \dot{\underline{x}}_j$,

Poniamo $\underline{v}^*_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i}\dot{q}_i$

dove $\boxed{\underline{x}_j = \underline{x}_j(\underline{q}, t)} \Rightarrow \dot{\underline{x}}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial t}$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \left[\sum_{i,l=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}\dot{q}_i\dot{q}_l + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial t}\dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial t}\cdot\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial t}\right]$$

$\Rightarrow T = T_2(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + T_1(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) + T_0(\underline{q}, t)$

con $T_i = O(\|\dot{\underline{q}}\|^i)$ per $i = 0, 1, 2$

In particolare,

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(\underline{q}, t)\dot{q}_i\dot{q}_l = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \underline{v}^*_j \cdot \underline{v}^*_j$$

dove $a_{il} = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}$.

Def.: La matrice $(a_{il}(\underline{q}, t))_{i,l=1,\dots,n} = A$ si dice matrice cinetica.

Proposizione: La matrice cinetica è simmetrica e definita positiva.

Dim. Per definizione, A è evidentemente simmetrica e definita non negativa.

Occorre ora dimostrare che se $\underline{u} \cdot A\underline{u} = 0$
$\Rightarrow \underline{u} = 0$. Infatti, siccome $T_2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot A \dot{\underline{q}}$ allora,

$$\Rightarrow 0 = \underline{u} \cdot A\underline{u} = 2T_2 = \sum_{j=1}^{N} m_j \underline{v}_j^*(\underline{u}) \cdot \underline{v}_j^*(\underline{u}) \Rightarrow \forall j = 1, \dots, N \quad \underline{v}_j^* = \underline{0}$$

con T_2 calcolato con $\dot{\underline{q}} = \underline{u}$

$$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, N \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i} \cdot u_i = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \underline{x}_1}{\partial q_i}, \dots, \frac{\partial \underline{x}_N}{\partial q_i} \right) \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ sono}$$

per $\underline{u} \neq \underline{0}$

linearmente dipendenti, assurdo!

È in contraddizione con le assunzioni sui vincoli, t.c. i gradi di libertà sono n.

$\Rightarrow \quad \underline{u} \cdot A\underline{u} = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$. C.V.D.

Nel caso di sistemi meccanici con vincoli olonomi, bilateri, ideali e fissi con forze puramente posizionali e conservative, si ha che

$$L = L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(\underline{q}) \dot{q}_i \dot{q}_l - U(\underline{q})$$

Di conseguenza, le eq. di Lagrange sono del tipo seguente

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(q)\,\ddot q_i + \sum_{i,l=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_l}(q)\,\dot q_i \dot q_l - \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n}\frac{\partial a_{il}}{\partial q_j}(q)\,\dot q_i \dot q_l} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0$$

$\Rightarrow$ le eq. di Lagrange possono essere scritte nella forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(q)\,\ddot q_i + \sum_{i,l=1}^{n} \underbrace{C_{il}(q)}_{\text{coeff.}}\,\dot q_i \dot q_l + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \qquad \forall j = 1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(q)\,\ddot q_i + f_j(q,\dot q) + g_j(q) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot q = -\underbrace{A^{-1}}_{\text{inverso della matrice cinetica}}\left(f(q,\dot q) + g(q)\right)$$

eq. del 2° ordine in forma normale

— o —

Osserviamo che

$$\begin{cases} \dot q = \eta \\ \dot \eta = -[A(q)]^{-1}\left(f(q,\eta) + g(q)\right) \end{cases}$$

è un sistema di $2n$ eq. diff. del 1° ordine in forma normale

con $f(q,\eta) = O(\|\eta\|^2)$

Tutti i p.ti $\hat{\underline{q}}$ t.c. $\underline{g}(\hat{\underline{q}}) = \underline{0}$ sono stazionari nel senso che $(\hat{\underline{q}}, \underline{0})$ è sol. di quiete del sistema precedente, poiché

$$\underline{f}(\hat{\underline{q}}, \underline{0}) + \underline{g}(\hat{\underline{q}}) = \underline{0}$$

Teorema (di Lagrange-Dirichlet): Per un sistema meccanico t.c. $L = \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(\underline{q})\dot{q}_i\dot{q}_l - U(\underline{q})$ se $\hat{\underline{q}}$ è un p.to di minimo stretto per il potenziale, allora $(\hat{\underline{q}}, \underline{0})$ è un p.to di equilibrio stabile per le eq. di Lagrange.

Dim.: Osserviamo che $W(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \mathcal{E}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(\underline{q})\dot{q}_i\dot{q}_l + U(\underline{q})$ è una funzione di Lyapunov, poiché $\frac{d}{dt}W(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{d}{dt}\mathcal{E}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = 0$.

Inoltre, $(\hat{\underline{q}}, \underline{0})$ è p.to di minimo stretto per $W = \mathcal{E}$. Infatti, siccome $\frac{\partial U}{\partial q_j}(\hat{\underline{q}}) = 0$ $\forall j = 1, \dots, n$, si applica l'argomento che abbiamo scritto all'inizio della pagina $\Rightarrow (\hat{\underline{q}}, \underline{0})$ è un punto di equilibrio.

Inoltre, $(\hat{\underline{q}}, \underline{0})$ è p.to di minimo stretto per $\mathcal{E}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}} \cdot [A(q)\underline{\dot{q}}] + U(\underline{q}) > U(\hat{\underline{q}})$ quando $\underline{\dot{q}} \neq 0$, $\underline{q} \neq \hat{\underline{q}}$ in un intorno di $\hat{\underline{q}}$.

Di conseguenza possiamo applicare I di Lyapunov al sist. di $2n$ eq. diff. del $1°$ ordine in forma normale per la funzione di Lyapunov $W = \mathcal{E}$ in un intorno di $(\hat{\underline{q}}, \underline{0})$. C.V.D.

Linearizzazione delle eq. di Lagr. attorno a un p.to di equilibrio (la linearizzazione è rispetto a $\underline{q} - \hat{\underline{q}}$, $\underline{\dot{q}}$ e $\underline{\ddot{q}}$)

Dall'eq. $A(\underline{q})\,\underline{\ddot{q}} = \underbrace{-\underline{f}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) - \underline{g}(\underline{q})}$,

dove $\underline{f}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = O(\|\underline{\dot{q}}\|^2)$, $\Rightarrow \underline{A(\hat{\underline{q}})\,\underline{\ddot{q}} \simeq -\mathrm{Jac}\,\underline{g}(\hat{\underline{q}}) \cdot (\underline{q} - \hat{\underline{q}})}$

dove A è la matr. cinetica $\mathrm{Jac}\,\underline{g}(\hat{\underline{q}}) = \mathrm{Hess}\,U(\hat{\underline{q}})$.

Si può arrivare alle stesse eq. scrivendo l'approssimazione quadratica in $\underline{q} - \hat{\underline{q}}$ e $\underline{\dot{q}}$ della lagrangiana.

Infatti, $L = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}\cdot A(\underline{q})\dot{\underline{q}} - U(\underline{q})$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}\cdot A(\hat{\underline{q}})\dot{\underline{q}} - U(\hat{\underline{q}}) - \cancel{\mathrm{Jac}\,U(\hat{\underline{q}})\cdot(\underline{q}-\hat{\underline{q}})}$ ($\mathrm{Jac}\,U(\hat{\underline{q}}) = 0$)

$- \frac{1}{2}(\underline{q}-\hat{\underline{q}})\cdot\left[\mathrm{Hess}\,U(\hat{\underline{q}})(\underline{q}-\hat{\underline{q}})\right] + o(\|(\underline{q}-\hat{\underline{q}},\dot{\underline{q}})\|^2)$

Riconduciamoci al caso $\hat{\underline{q}} = \underline{0}$, scriviamo

$\tilde{L} = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}\cdot A\dot{\underline{q}} - U(0) - \frac{1}{2}\underline{q}\cdot B\underline{q}$

costante

matrice a coeff. costanti

$\Rightarrow$ le eq. di Lagr. per l'appr. quadratica sono $\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}q_i = 0$,

dove $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = A = A(\underline{0})$ e $(b_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = B = \mathrm{Hess}\,U(\underline{0})$

Cioè $\boxed{A\ddot{\underline{q}} = -B\underline{q}} \Rightarrow \ddot{\underline{q}} = -A^{-1}B\underline{q}$.

Oss.: Siccome sia A che B sono matrici simmetriche e A è definita positiva allora $\exists$ n autovettori indipendenti $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{n}$ che sono soluzioni delle eq.

$B\underline{u}_i = \lambda_i A\underline{u}_i$ (dove $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sono autovalori di $A^{-1}B$).

Per verificarlo effettuiamo una specie di "diagonalizzazione simultanea" delle matrici A e B.

Siccome A è simmetrica e def. pos., allora $\exists$ U ortogonale t.c. $U^T A U = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$, dove gli autovalori $d_1,\dots,d_n$ di A sono tutti positivi. Sia $D = D^T = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{d_n}}\right)$ (dove gli el. diag. sono ben definiti, poiché $d_1,\dots,d_n \in \mathbb{R}_+$)

$\Rightarrow D^T U^T A U D = D^T\,\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)D = \mathbb{I}$. Ovviamente siccome B è simmetrica allora anche la matrice corrispondente a B per via del cambio di base indotto da UD, cioè

$$D^T U^T B U D,$$

è simmetrica, quindi $\exists$ una matrice ortogonale V, t.c.

$$V^T D^T U^T B U D V = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{e} \quad V^T (D^T U^T A U D) V = V^T V = I$$

Sia $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ una base di autovettori di $V^T D^T U^T B U D V$, allora gli autovettori $\underline{u}_i$ richiesti sono della forma $\underline{u}_i = UDV\underline{e}_i$; infatti, $(V^T D^T U^T B U D V)\underline{e}_i = (V^T D^T U^T A U D V)\lambda_i \underline{e}_i$

$\Rightarrow$ (moltiplicando a sinistra per $UD^{-1}V$) $\Rightarrow B(UDV\underline{e}_i) = \lambda_i A(UDV\underline{e}_i)$

Inoltre, siccome $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ è una base e $\det(UDV) \neq 0 \Rightarrow \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ è una base.

Per gli $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ lin. indip. e t.c. $B\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$ $\forall i = 1, \dots, n$ possiamo enunciare la proposizione qui a fianco.

Proposizione: (1) $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ possono essere presi in modo t.c. $\underline{u}_i \cdot A\underline{u}_j = \delta_{ij}$

(2) Se B è una matrice def. pos. allora $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti positivi

(3) Sia $\mathcal{U} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$ allora

$$\mathcal{U}^T A \mathcal{U} = I, \quad \mathcal{U}^T B \mathcal{U} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Dim.: (1) Sia $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \lambda_i \underline{u}_i \cdot A\underline{u}_j =$

$$= (\lambda_i A\underline{u}_i) \cdot \underline{u}_j = (B\underline{u}_i) \cdot \underline{u}_j = \underline{u}_i \cdot (B\underline{u}_j) = (\underline{u}_i \cdot A\underline{u}_j)\lambda_j$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)(\underline{u}_i \cdot A\underline{u}_j) = 0 \Rightarrow \underline{u}_i \cdot A\underline{u}_j = 0$$

$\Rightarrow$ normalizzando possiamo def. $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ in modo t.c. $\underline{u}_i \cdot A\underline{u}_j = \delta_{ij}$

(2) Segue dal fatto che $\lambda_i = \underline{u}_i \cdot B\underline{u}_i > 0$.

(3) $\underline{u}_i \cdot B\underline{u}_j = \underline{u}_i \cdot (\lambda_j A \underline{u}_j) = \lambda_j (\underline{u}_i \cdot A\underline{u}_j) = \lambda_j \delta_{ij}$.

$$A\ddot{\underline{q}} = -B\underline{q} \quad \text{poniamo } \underline{q}(t) = \tau_j(t)\,\underline{u}_j$$

$$\Rightarrow \ddot{\tau}_j(t)\, A\underline{u}_j = -\tau_j(t) B\underline{u}_j \Rightarrow \ddot{\tau}_j(t)\, A\underline{u}_j = -\lambda_j \tau_j(t)\, A\underline{u}_j$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\tau}_j(t) = -\lambda_j \tau_j(t) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Supponiamo che $\lambda_j > 0$, poniamo $\lambda_j = \omega_j^2$

$$\Rightarrow \ddot{\tau}_j(t) = -\omega_j^2 \tau_j(t)$$

$$\Rightarrow \tau_j(t) = A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)$$

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti positivi la sol. generale delle eq. di Lagr. associate a $\tilde{L}$ (quadratica in $\underline{q}$ e $\dot{\underline{q}}$) è

$$\underline{q}(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)\, \underline{u}_j$$

Se $A_\ell \neq 0$, $A_j = 0$ $\forall j = 1, \dots, n$, $j \neq \ell$, allora il moto è periodico di periodo $\frac{2\pi}{\omega_j}$.

In generale, un moto di questo tipo è quasi periodico.

Supponiamo invece che $\exists\, j$ t.c. $\lambda_j < 0$

$\Rightarrow \ddot{\tau}_j(t) = -\lambda_j \tau_j(t)$, poniamo $\omega_j^2 = -\lambda_j$

$\Rightarrow \ddot{\tau}_j(t) = \omega_j^2 \tau_j(t) \Rightarrow \tau_j(t) = a e^{\omega_j t} + b e^{-\omega_j t}$

$\Rightarrow$ l'origine ($\hat{\underline{q}} = \underline{0}$) è un p.to di equilibrio instabile per le eq. di Lagr. associate a $\tilde{L}$.

Proposizione: Si consideri un p.to di equilibrio $(\hat{\underline{q}}, \underline{0})$ per le eq. di Lagrange associate a $L = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}} \cdot A(\underline{q})\dot{\underline{q}} - U(\underline{q})$ (cioè $\frac{\partial U}{\partial q_j}(\hat{\underline{q}}) = 0$) e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori dell'$\mathrm{Hess}\,U(\hat{\underline{q}})$, allora

(1) se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti positivi allora $\hat{\underline{q}}$ è un p.to di equilibrio stabile;

(2) se $\exists\, \lambda_j < 0$ (per almeno un indice j) allora $\hat{\underline{q}}$ è un p.to di equilibrio instabile.

Oss.: Rimane indeciso il caso $\exists$ almeno un indice i t.c. $\lambda_i = 0$ mentre per $j \neq i$, $j = 1, \dots, n$ $\lambda_j > 0$.

Esempio di caso indeciso con p.to di equilibrio stabile:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - U(x,y)$$

con $\boxed{U(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^4}$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = y^3 = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ è l'unico p.to di equilibrio

$$\mathrm{Hess}\, U \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$
$$0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \ddot{x} + x = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \ddot{y} + y^3 = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ è stabile, perché è un p.to di minimo stretto per U $\Rightarrow$ si applica il Th. di Lagr.-Dirichlet

Esempio di caso indeciso con p.to di equilibrio è instabile.

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-U(x,y)$$

con $U(x,y)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}y^4$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=x=0\\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y}=-y^3=0\end{cases}$$

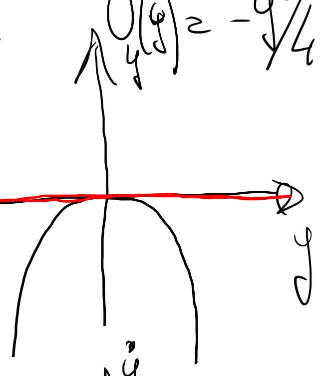
$(0,0)$ è l'unico p.to di equilibrio

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{(x,y)=(0,0)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \underbrace{-3y^2}_{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\dfrac{\partial L}{\partial x}=\ddot{x}+x=0\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=\ddot{y}-y^3=0\end{cases}$$

$\ddot{y}=y^3$

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2-\frac{y^4}{4}=E$$



$\exists$ dei moti $(x(t),y(t))=(0,y(t))$ con $y(t)$ lungo la separatrice t.c. $\forall\varepsilon$ escono da $B_\varepsilon(0,0)$ (cioè $\exists\,\bar{t}$ t.c. $|y(\bar{t})|>\varepsilon$) $\forall\delta>0$ con $\|(y(0),\dot{y}(0))\|<\delta$.