

Deduzione dalle eq. di Lagrange

Sistemi vincolati

Def.: si dice che un sistema di N p.ti materiali P_1, \dots, P_N è soggetto a $z < 3N$ vincoli olonomi e bilateri, quando sussistono le seguenti z eq.:

$$G_s(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) = 0 \quad \forall s=1, \dots, z,$$

con $\left(\frac{\partial G_s}{\partial w_j}(\underline{w}, t) \right)_{\substack{s=1, \dots, z \\ j=1, \dots, 3N}}$ di rango z

$\forall (\underline{w}, t)$ soluzione di $G_1 = \dots = G_z = 0$, dove
 $\underline{w} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N)$

Olonomo significa che è una legge intesa, mentre un vincolo è oloonomo se la legge che lo descrive include anche le velocità (esempi: sci che non derappa, ruota che rotola senza strisciare o derappare) -

Un vincolo si dice unilatero quando è descritto da disequazioni, cioè $G_s(\underline{w}, t) \geq 0$.

Def.: Si dice spostamento virtuale conforme al vincolo

$$\delta \underline{w} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \underline{w}}{\partial q_j} \delta q_j$$



Def.: si dice che un sistema vincolato lanciano e bilatero ha n gradi di libertà $0 < n \leq 3N$ quando \exists un cond. locali t.c. $\left(\frac{\partial \underline{w}}{\partial q_j} \right)_{j=1, \dots, n}$ ha rango n .

Come conseguenza di vincolo lanciano e bilatero abbiamo che possiamo introdurre la seguente nozione

Def.: si dicono coordinate

libere $(q_1, \dots, q_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n = 3N - 2$ aperto
o congruente le coordinate locali t.c.

$$G_s(\underline{w}(q), t) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, 2.$$

Def.: si dice che un dispositivo vincolare lanciano e bilatero ^{realizzato da giunghi} è ideale quando

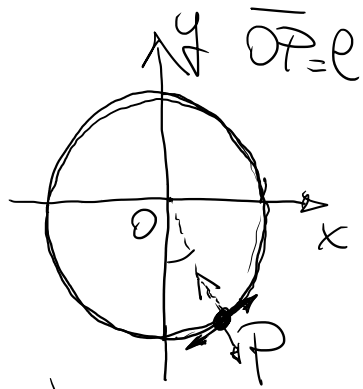
$$\sum_{j=1}^N \Phi_j \cdot \delta \underline{x}_j = 0 \quad \forall \text{ possibile spostamento virtuale } \delta \underline{x}_1, \dots, \delta \underline{x}_N$$

è la generica reazione vincolare (agente sul punto j -esimo) che è espletata dal dispositivo vincolare.

Esempio: il pendolo matematico

F_q che definisce il vincolo

$$x^2 + y^2 = \ell^2, \quad y = \ell$$



Vincolo ideale quando $\underline{F} \cdot \underline{\delta}(x, y) = 0$

Coordinate libere $\vartheta \in [-\pi, \pi)$.

$$\underline{F} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right) \delta \vartheta = 0$$

La def. di vincolo ideale è riassunta dalle n eq.

$$\sum_{j=1}^n \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_c} = 0 \quad \forall c=1, \dots, n$$

Osservazione: nel caso di vincoli fissi

il lavoro delle reazioni vincolari

è sempre nullo: $L = \int_{t_0}^{t_f} dt \left(\sum_{j=1}^n \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_c} \right) \dot{q}_c dt$

$$= \sum_{c=1}^n \int_{t_0}^{t_f} dt \left(\sum_{j=1}^n \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_c} \right) \cdot \dot{q}_c dt = 0$$

nel caso dei vincoli mobili può essere diversa da zero $\sum_{j=1}^n \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial t}$

Esempio: il moscerino che si muove sulla mangolfiera



$$S(t) = R(t)$$

→ raggio della mangolfiera

Per i vincoli ideali vale il seguente Principio (di D'Alembert): i nodi materiali di un sistema meccanico sottoposto a $3N-n$ vincoli lamari, bilaterali e ideali sono t.c.

$$\sum_{j=1}^N (m \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j) \cdot \delta \underline{x}_j = 0 \quad \forall \text{ possibile spostamento virtuale } \delta \underline{x}_1, \dots, \delta \underline{x}_N$$

È evidentemente equivalente alla definizione di vincolo ideale più le eq. di Newton per tutti i punti materiali, cioè $m \ddot{\underline{x}}_j = \underline{F}_j + \underline{\Phi}_j, \forall j=1, \dots, N$
 $\Rightarrow \underline{\Phi}_j = m \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^N (m \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j) \delta \underline{x}_j = 0$

Da quest'ultima eq. e da $\delta \underline{x}_j = \sum_{e=1}^n \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_e} \delta q_e$

Segue

L'equazione simbolica pura della dinamica

$$\sum_{j=1}^N (m \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j) \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_e} = 0 \quad \forall e=1, \dots, n$$

"pura" nel senso che non ci sono reazioni vincolari.

Proposizione: per un sistema meccanico
 con vincoli lami, bilateri e ideali
 valgono le eq. di Lagrange di prima
 specie:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial T}{\partial q_e} = Q_e \quad \forall e=1, \dots, n$$

dove $Q_e = \sum_{j=1}^N F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_e}$ è la componente
 l-esima della forza generalizzata
 e $T = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j \cdot \dot{x}_j$

Dim. Dall'eq. simbolica pura
 della dinamica segue

$$\sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_e} = \sum_{j=1}^N F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_e} = Q_e$$

Concentriamoci su

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_e} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_e} \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_e} \end{aligned}$$

Osserviamo che valgono le seguenti 2 identità:

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_e} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_e} \quad \forall i, e \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_e} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_e} \quad \forall i, e.$$

e -esima
componente
della velocità
generalizzata

Per inciso verificammo le 2 identità

Osserviamo che $\dot{x}_j = \frac{d}{dt} x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_e} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \delta_{i,e} = \frac{\partial x_i}{\partial q_e}$$

Inoltre, $\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_e} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_e} \dot{q}_i + \frac{\partial x_i}{\partial q_e} \frac{d}{dt}$

$$= \frac{\partial}{\partial q_e} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_e}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_e} &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial \dot{q}_e} - \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_e} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_e} \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j \cdot \dot{x}_j - \frac{\partial}{\partial q_e} \sum_{j=1}^N m_j \dot{x}_j \cdot \dot{x}_j \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial T}{\partial q_e} \quad \text{C.U.D.} \end{aligned}$$

Assumiamo che le forze attive agenti sul sistema siano conservative, cioè $\exists U = U(x_1, \dots, x_n, t)$ t.c.

$$\vec{F}_i = -\text{grad}_{\vec{x}_i} U$$

allora $Q_e = -\sum_{j=1}^n \text{grad}_{\vec{x}_j} U \cdot \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_e} =$

$$= -\frac{\partial U}{\partial q_e}$$

Proposizione:

Per un sistema meccanico sottoposto a forze conservative e a vincoli olonomi bilateri e ideali valgono le seguenti eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial L}{\partial q_e} = 0 \quad \forall e=1, \dots, n$$

dove $L = T - U$

Verifica: Siccome valgono le eq.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_e} = 0 \quad \forall e=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_e} = 0 \quad \forall e=1, \dots, n$$

poiché $U = U(q_1, \dots, q_n, t) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_e} = 0$

C.U.D.

Equivalenza tra le eq. di Newton e quelle di Lagrange

Eq. di Newton

$$m_j \ddot{x}_j = F_j + \Phi_j \quad \forall j=1, \dots, N$$

$$G_s(x_1, \dots, x_N, t) = 0 \quad \forall s=1, \dots, z$$

$$\sum_{j=1}^N \Phi_j \cdot \delta x_j = 0 \quad \forall \delta x_1, \dots, \delta x_N$$

n eq. in n incognite q_1, \dots, q_n

Eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial L}{\partial q_e} = 0 \quad \forall e=1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^N \Phi_j \frac{\partial x_j}{\partial q_e} = 0 \quad \forall e=1, \dots, n$$

con $n=3N-z$

6N eq. in 6N incognite $(x_1, \dots, x_N, \Phi_1, \dots, \Phi_N)$

$$\Phi_j = m_j \ddot{x}_j - F_j \quad \forall j=1, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^N (m_j \ddot{x}_j - F_j) \frac{\partial x_j}{\partial q_e} = 0 \quad \forall e=1, \dots, n$$

"eq. pure della dinamica"

$$G_s(x_1, \dots, x_N, t) = 0 \quad \forall s=1, \dots, z$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial L}{\partial q_e} = 0$$

cioè le eq. di Lagr.

$$G_s(x_1, \dots, x_N, t) = 0 \quad \forall s=1, \dots, z$$

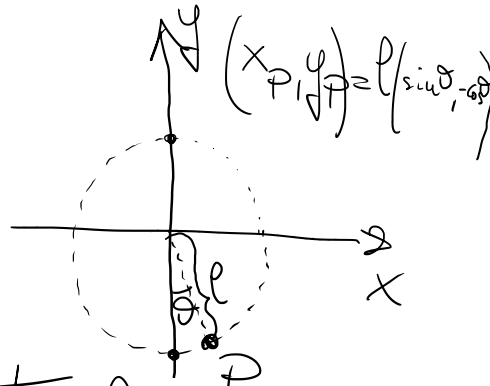
$$\begin{cases} x_j = x_j(q, t) \\ \forall j=1, \dots, N \end{cases}$$

$$\Phi_j = m_j \ddot{x}_j - F_j$$

Altrouera è che il sistema di eq. di Lagrange + la descrizione del vincolo + le eq. che definiscono le reazioni vincolari

Esempi di calcolo della lagrangiana e delle eq. di lagrange.

Il caso del pendolo matematico



$$L = T - U$$

adottiamo coordinate polari.

Scegliamo come coordinata libera θ

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) \cdot (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta)$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = mgy = -mgl \cos \theta$$

$L = L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$ è la lagrangiana

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m l^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

è l'eq. di lagrange

$$m l^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

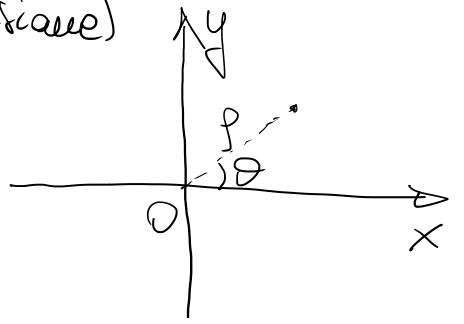
è la I eq. cardinale calcolata rispetto al polo O e proiettata sulla verticale al piano Oxy

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Il caso dei moti centrali

(In coord. cartesiane)

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 = m \ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 = m \ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

Si osserva che abbiamo ottenuto

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{x} = - \frac{\partial U}{\partial x} \\ m \ddot{y} = - \frac{\partial U}{\partial y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{dU}{d\rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ - \frac{dU}{d\rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\}$$

nel caso dei moti centrali

Le eq. di Newton nel piano per un problema conservativo con U che dipende solo da x, y .

(In coord. polari)

$$L = L(\rho, \vartheta, \dot{\rho}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2) - U(\rho)$$

Eq. di Lagrange:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial L}{\partial p} = \boxed{m \ddot{r} - m p \dot{\theta}^2 + \frac{dU}{dr} = 0} \right.$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (m p^2 \dot{\theta}) = \boxed{m (2 p \dot{p} \dot{\theta} + p^2 \ddot{\theta}) = 0} \right.$$

Le eq. nei riquadri sono proprio le eq. di Newton in coord. polari.

Dalla 2^a eq. segue

$$\boxed{m p^2 \dot{\theta} = J}, \text{ cioè la conservazione del momento angolare}$$

Da quest'ultima e dalla 1^a eq. di Lagr.

$$\text{segue } m \ddot{r} - \frac{J}{m r^3} + \frac{dU}{dr} = 0, \text{ quando } J \neq 0,$$

$$\text{cioè } m \ddot{r} + \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = 0, \text{ con } U_{\text{eff}}(r) = \frac{J}{2m r^2} + U(r),$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E.$$

Nel caso dei moti centrali nel piano abbiamo ottenuto

$$\text{Lagr. } L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \Rightarrow \text{Lagr. } L = L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$$



$$\text{Eq. di L.} \Leftrightarrow \text{Eq. di N.} \Rightarrow \text{Eq. di L.} \Leftrightarrow \text{Eq. di N.}$$

in coord. (x, y) in coord. polari

Proposizione (invarianza in forma delle eq. di Lagrange): Sia $L = L(q, \dot{q}, t)$ una funz. lagrangiana e $q = q(\tilde{q}, t)$ un diffeomorfismo; sia quindi $\tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = L(q(\tilde{q}, t), \dot{q}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t), t)$ la lagrangiana nelle nuove coordinate allora $t \mapsto \tilde{q}(t)$ è sol. delle eq. di Lagrange per \tilde{L} se e solo se $t \mapsto q(t) = q(\tilde{q}(t), t)$ lo è per le eq. di lagr. associate a L .

Dim. ∴ In primis, calcoliamo

$$\dot{q}(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} q(\tilde{q}(t), t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q}{\partial \tilde{q}_j}(\tilde{q}, t) \dot{\tilde{q}}_j + \frac{\partial q}{\partial t}$$

Si osserva quindi che $\left(\frac{\partial \dot{q}_e}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \frac{\partial q_e}{\partial \tilde{q}_i} \right)$ e anche

$$\text{che } \frac{\partial \dot{q}_e}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 q_e}{\partial \tilde{q}_h \partial \tilde{q}_j} \dot{\tilde{q}}_j + \frac{\partial^2 q_e}{\partial t \partial \tilde{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q_e}{\partial \tilde{q}_h}$$

Nelle nuove coord. le eq. di L. sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h} = 0, \text{ dove}$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h}$$

quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_h}$$

inoltre, $\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \tilde{q}_h}$

Ne segue che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_1} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_1} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_n} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{q}_h} \\ \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial \tilde{q}_h} \end{pmatrix}_{j,h=1,\dots,n}^T \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

Si vede il $\det \left(\frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_h} \right)_{j,h=1,\dots,n} \neq 0$ (perché

$q = q(\tilde{q}, t)$ è un diffeomorfismo),

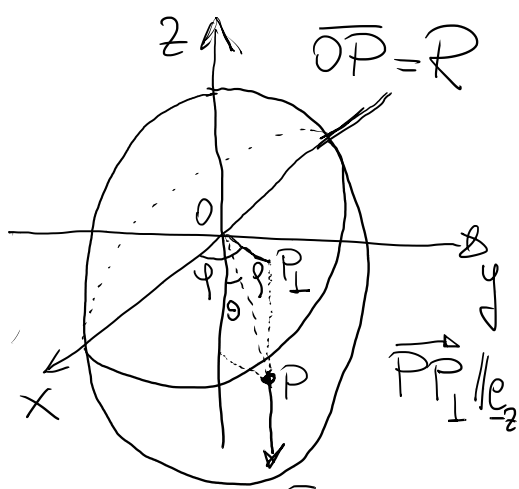
le eq. di Lagr. per \tilde{L} sono soddisfatte

se e solo se lo sono anche per L . C.V.D.

Il caso del pendolo
sferico.

massa $P = m$, $\overline{OP} = R$

Coord. libere (θ, φ)



\Rightarrow coord. di P :

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = -R \cos \theta \end{cases} \quad \begin{aligned} \underline{F} &= -m g \underline{e}_z \\ \overline{PP}_{\perp} &= R \sin \theta \end{aligned}$$

$$\underline{V}_P = R \left(\cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}, \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}, \sin \theta \dot{\theta} \right)$$

$$L = \frac{1}{2} m \underline{V}_P \cdot \underline{V}_P - m g z = \frac{1}{2} m R^2 \left[\cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right] + m g R \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + m g R \cos \theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m R^2 \ddot{\theta} - m R \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + m g \sin \theta = 0 \right)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (m R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{m R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = J_z} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{J_z}{m R^2 \sin^2 \theta}$$

In effetti, $J_z = m R^2 \sin \theta \cos \varphi (\cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}) - m R^2 \sin \theta \sin \varphi (\cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi})$

$$= m R^2 \sin \theta \left[\cancel{\cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta}} + \sin \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \dot{\varphi} - \cancel{\cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta}} \right] = m R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

Dalla 1^a eq. di L e dalla conservazione di J_z

segue che $mR^2 \ddot{\theta} - \frac{\cos \theta J_z^2}{mR^2 \sin^3 \theta} + m g R \sin \theta = 0$

$\Rightarrow mR^2 \ddot{\theta} + \frac{d}{d\theta} U_{\text{eff}}(\theta) = 0$ con $U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{J_z^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} - m g R \sin \theta$

$\Rightarrow \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) = E$. ↑
Pot. centrifugo

Oss.: nei moti centrali e nel pendolo sferico abbiamo trovato che la lagrangiana non dipende esplicitamente da un angolo ϕ , quindi abbiamo trovato una costante del moto!

Def.: si dice che una coordinata q_i la lagrangiana è ciclica se $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Teorema: se q_i è una coord. ciclica allora si conserva si conserva $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Dim. Si scrive l'eq. di lagr. j -esima:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} P_j = \dot{P}_j = 0 \quad \text{C.V.D.}$$

Esempi di momenti cinetici che sono cost. del moto nel problema di moti centrali e in quello del pendolo sferico.

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right]$$

Siccome $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (per le eq. di Lagr.)

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha \partial q_j} (q, \dot{q}) \Big|_{\alpha=0} \dot{q}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha \partial q_j} (q, \dot{q}) \Big|_{\alpha=0} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} (q, \dot{q}) \Big|_{\alpha=0}$$

otteniamo

$$0 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (q, \dot{q}, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (q, \dot{q}, t) \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) \quad \text{C.U.D.}$$

Esempi di applicazioni del teorema di Noether.

Da th. di Noether \Rightarrow th. var. cicliche

Supponiamo che q_i sia una variabile ciclica, allora definiamo

$$\varphi_i(\alpha, q) = \begin{cases} q_i & \forall i \neq j \\ q_i + \alpha & \end{cases}, \quad \psi(\alpha, q, \dot{q}) = \dot{q}$$

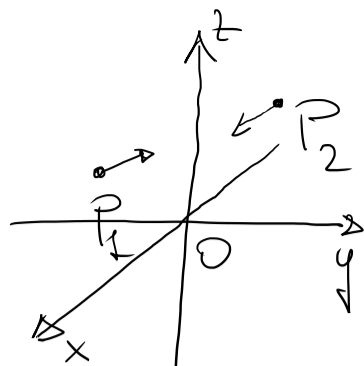
$$\Rightarrow L(\varphi(\alpha, q), \psi(\alpha, q, \dot{q}), t) = L(q, \dot{q}, t),$$

poiché $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow$ siccome $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} =$

$$= \sum_{i=1}^n \delta_{ii} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

Il problema a 2 corpi

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = f(\overline{P_1 P_2}) \frac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{P_1 P_2}}$$



Massa $P_1 = m_1$
 " $P_2 = m_2$

$$\vec{F}_{12} = -\text{grad}_{\vec{x}_2} U(\overline{P_1 P_2})$$

$$q_1 = x_1, q_2 = y_1, q_3 = z_1, q_4 = x_2, q_5 = y_2, q_6 = z_2$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \left(\sum_{j=1}^3 \dot{q}_j^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\sum_{j=4}^6 \dot{q}_j^2 \right) - U(\overline{P_1 P_2})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_i \dot{q}_{(i-1)3+j}^2 - U\left(\sqrt{\sum_{j=1}^3 (q_j - q_{j+3})^2}\right)$$

$$\varphi_j(\alpha, q) = \begin{cases} q_j + \alpha & \text{se } j=1,4 \\ q_j & \text{se } j=2,3,5,6 \end{cases}, \quad \psi(\alpha, q, \dot{q}) = \dot{q}$$

$$\Rightarrow L(\varphi(\alpha, q), \psi(\alpha, q, \dot{q})) = L(q, \dot{q})$$

$$\Rightarrow \text{Si conserva } \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4}$$

$$= m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_4 \text{ è la componente sull'asse } x$$

$$= m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 \text{ della quantità di moto diretta}$$

Analogamente con i diffeomorfismi

$$\varphi_j(\alpha, q) = \begin{cases} q_j + \alpha & \text{se } j=2,5 \\ q_j & \text{se } j=1,3,4,6 \end{cases}, \quad \psi(\alpha, q) = \begin{cases} q_j + \alpha & \text{se } j=3,6 \\ q_j & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si verifica che si conserva $m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2$ o $m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2$

$$\begin{cases} \varphi_1(\alpha, \mathbf{q}) = q_1 & \varphi_4(\alpha, \mathbf{q}) = q_4 \\ \varphi_2(\alpha, \mathbf{q}) = \cos \alpha q_2 + \sin \alpha q_3 & \varphi_5(\alpha, \mathbf{q}) = \cos \alpha q_5 + \sin \alpha q_6 \\ \varphi_3(\alpha, \mathbf{q}) = -\sin \alpha q_2 + \cos \alpha q_3 & \varphi_6(\alpha, \mathbf{q}) = -\sin \alpha q_5 + \cos \alpha q_6 \end{cases}$$

$$\psi_1(\alpha, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{q}_1$$

$$\psi_4 = \dot{q}_4$$

$$\psi_2 = \cos \alpha \dot{q}_2 + \sin \alpha \dot{q}_3$$

$$\psi_5 = \cos \alpha \dot{q}_5 + \sin \alpha \dot{q}_6$$

$$\psi_3 = -\sin \alpha \dot{q}_2 + \cos \alpha \dot{q}_3$$

$$\psi_6 = -\sin \alpha \dot{q}_5 + \cos \alpha \dot{q}_6$$

$$L(\varphi(\alpha, \mathbf{q}), \psi(\alpha, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Si conserva allora la seguente cost. del moto:

$$\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = q_3 \cdot m_1 \dot{q}_2 - q_2 \cdot m_1 \dot{q}_3$$

$$+ q_6 \cdot m_2 \dot{q}_5 - q_5 \cdot m_2 \dot{q}_6 = m_1 (z_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{z}_1)$$

$$+ m_2 (z_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{z}_2) = \sum_{i=1}^2 \left(\vec{O} \vec{P}_i \wedge m_i \vec{V}_i \right)$$

Si conserva la componente sull'asse x del momento angolare totale -

Analogamente si verifica la conservazione di $\vec{O} \vec{P}_1 \wedge m_1 \vec{V}_1 + \vec{O} \vec{P}_2 \wedge m_2 \vec{V}_2$ su asse y e z -

Proposizione (conservazione dell'energia generalizzata): per sistemi descritti da una lagrangiana $L=L(q, \dot{q})$, cioè t.c. $\frac{dL}{dt} = 0$, si conserva l'energia generalizzata: $H = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q})$

Dim. (si ricordi che $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$)

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = 0 \quad \text{C.V.D.} \end{aligned}$$

Corollario: Nel caso in cui

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q)$$

allora $H = T + U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q)$,
 cioè l'energia totale meccanica del sistema

Simmetrie
traslazione spaziale \rightarrow quantità di moto
(distanze, lunghezze)

rotazione \rightarrow momento angolare
(angoli)

traslazione temporale \rightarrow energia
(tempo)

In qui caso il prodotto di quelle
quantità (sulla stessa riga) ha le dimensio-
ni fisiche di un'azione. Infatti
nelle colonne a sinistra abbiamo
 q_i e a destra abbiamo $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow$

$$\left[q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = \frac{\cancel{[q_i]} [E]}{\cancel{[q_i]} / [t]} = [E] \cdot [t] = [m][v][l] = [\text{azione}]$$