Deduzione delle eq. di Lagrange

Sistemi vincolati

Def.: si dice che un sistema di N p.ti materiali $P_1, \dots, P_N$ è soggetto a $r < 3N$ vincoli olonomi e bilateri, quando sussistono le seguenti r eq.:

$$G_s(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, r,$$

con $\left(\frac{\partial G_s}{\partial w_j}(\underline{w}, t)\right)_{\substack{s=1,\dots,r \\ j=1,\dots,3N}}$ di rango r

$\forall (\underline{w}, t)$ soluzione di $G_1 = \dots = G_r = 0$, dove

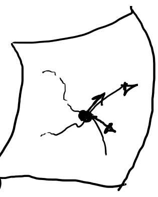
$$\underline{w} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N)$$

Olonomo significa che è una legge intera, mentre un vincolo è anolonomo se la legge che lo descrive include anche le velocità (esempi: sci che non derapa, ruota che rotola senza strisciare o derapare).

Un vincolo si dice unilatero quando è descritto da disequazioni, cioè $G_s(\underline{w}, t) \geq 0$.

Def.: Si dice spostamento virtuale conforme al vincolo

$$\delta \underline{w} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{w}}{\partial q_j} \delta q_j$$



Def.: si dice che un sistema vincolare olonomo e bilatero ha n gradi di libertà $0 < n \leq 3N$ quando $\exists$ n coord. locali t.c. $\left(\frac{\partial \underline{w}}{\partial q_j}\right)_{j=1,\dots,n}$ ha rango n.

Come conseguenza di vincolo olonomo e bilatero abbiamo che possiamo introdurre la seguente nozione.

Def.: Si dicono coordinate libere o lagrangiane $(q_1, \dots, q_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ (aperto) con $n = 3N - r$ le coordinate locali t.c.

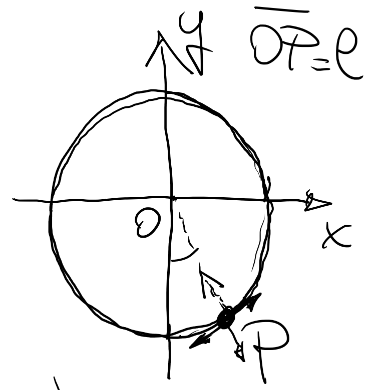
$$G_s(\underline{w}(\underline{q}), t) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, r.$$

Def.: Si dice che un dispositivo vincolare (realizzato dai vincoli) olonomo e bilatero è ideale quando

$$\sum_{j=1}^{N} \underline{\Phi}_j \cdot \delta \underline{x}_j = 0 \quad \forall \text{ possibile spostamento virtuale } \delta \underline{x}_1, \dots, \delta \underline{x}_N$$

$\underline{\Phi}_j$ è la generica reazione vincolare (agente sul punto j-esimo) che è esplicata dal dispositivo vincolare.

Esempio: il pendolo matematico



Eq. che definisce il vincolo

$$x^2+y^2=\ell^2, \quad \rho=\ell$$

Vincolo ideale quando $\underline{\Phi}\cdot\delta\underline{(x,y)}=0$

Coordinata libera $\vartheta\in[-\pi,\pi)$.

$$\underline{\Phi}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta},\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\right)\delta\vartheta$$

— o —

La def. di vincolo ideale è riassunta dalle n eq.

$$\sum_{j=1}^{N}\underline{\Phi}_j\cdot\boxed{\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_\ell}}=0 \quad \forall \ell=1,\dots,n$$

— o —

Osservazione: nel caso di vincoli fissi il lavoro delle reazioni vincolari è sempre nullo: $\mathcal{L}=\int_{t_0}^{t_f} dt\sum_{j,\ell}\left(\underline{\Phi}_j\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_\ell}\right)\dot q_\ell\,dt$

$$=\sum_{\ell=1}^{n}\int_{t_0}^{t_f}dt\left(\sum_{j=1}^{N}\underline{\Phi}_j\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_\ell}\right)\cdot\dot q_\ell\,dt=0$$

nel caso dei vincoli mobili può essere diversa da zero $\sum_{j=1}^{N}\underline{\Phi}_j\cdot\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial t}$

Esempio: il moscerino che si muove sulla mongolfiera

$$\rho(t)=R(t)$$

raggio della mongolfiera

Per i vincoli ideali vale il seguente Principio (di D'Alembert): i moti naturali di un sistema meccanico sottoposto a $3N-n$ vincoli olonomi, bilateri e ideali sono t.c.

$$\sum_{j=1}^{N}\left(m\ddot{\underline{x}}_j-\underline{F}_j\right)\cdot\delta\underline{x}_j=0 \quad \forall \text{ possibile spostamento virtuale } \delta\underline{x}_1,\dots,\delta\underline{x}_N$$

È evidentemente equivalente alla definizione di vincolo ideale più le eq. di Newton per tutti i punti materiali, cioè $m\ddot{\underline{x}}_j=\underline{F}_j+\underline{\Phi}_j \quad \forall j=1,\dots,N$

$$\Rightarrow \underline{\Phi}_j=m\ddot{\underline{x}}_j-\underline{F}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{N}\left(m\ddot{\underline{x}}_j-\underline{F}_j\right)\delta\underline{x}_j=0$$

Da quest'ultima eq. e da $\delta\underline{x}_j=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_l}\delta q_l$ segue

$$\boxed{\text{L'equazione simbolica pura della dinamica} \quad \sum_{j=1}^{N}\left(m\ddot{\underline{x}}_j-\underline{F}_j\right)\frac{\partial\underline{x}_j}{\partial q_l}=0 \quad \forall l=1,\dots,n}$$

"pura" nel senso che non ci sono reazioni vincolari.

Proposizione: per un sistema meccanico con vincoli lisci, bilateri e ideali valgono le eq. di Lagrange di prima specie:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l \quad \forall l = 1, \dots, n}$$

dove $Q_l = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}$ è la componente l-esima della forza generalizzata e $T = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \dot{\underline{x}}_j$

Dim. Dall'eq. simbolica pura della dinamica segue

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\underline{x}}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = Q_l$$

Concentriamoci su

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\underline{x}}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}\right) - \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}$$

Osserviamo che valgono le seguenti 2 identità:

$$\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial \dot{q}_l} \quad \forall j, l \qquad e \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial q_l} \quad \forall j, l.$$

l-esima componente della velocità generalizzata

Per inciso verifichiamo le 2 identità

Osserviamo che $\dot{\underline{x}}_j = \frac{d}{dt}\underline{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i} \delta_{i,l} = \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l}.$$

Inoltre, $\frac{d}{dt}\frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l \partial t}$

$$= \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial q_l}$$

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\underline{x}}_j \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial \dot{q}_l} - \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j \frac{\partial \dot{\underline{x}}_j}{\partial q_l}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \dot{\underline{x}}_j - \frac{\partial}{\partial q_l} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \dot{\underline{x}}_j \cdot \dot{\underline{x}}_j$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} T - \frac{\partial T}{\partial q_l}.$$

C.V.D.

Assumiamo che le forze attive agenti sul sistema siano conservative, cioè $\exists\, U = U(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t)$ t.c.

$$\underline{F}_j = -\operatorname{grad}_{\underline{x}_j} U,$$

allora
$$Q_\ell = -\sum_{j=1}^{N} \operatorname{grad}_{\underline{x}_j} U \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_\ell} = -\frac{\partial U}{\partial q_\ell}.$$

Proposizione:

Per un sistema meccanico sottoposto a forze conservative e a vincoli olonomi, bilateri e ideali valgono le seguenti eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial L}{\partial q_\ell} = 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, n$$

dove $L = T - U$

Verifica: Siccome valgono le eq.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial}{\partial q_\ell}(T - U) = 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\ell}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_\ell}(T - U) = 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, n$$

poiché $U = U(q_1, \dots, q_n, t) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\ell} = 0$

C.V.D.

Equivalenza tra le eq. di Newton e quelle di Lagrange

Eq. di Newton

$$\begin{cases} m_j \ddot{\underline{x}}_j = \underline{F}_j + \underline{\Phi}_j \quad \forall j = 1, \dots, N \\ G_s(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, r \\ \sum_{j=1}^{N} \underline{\Phi}_j \cdot \delta \underline{x}_j = 0 \quad \forall \delta \underline{x}_1, \dots, \delta \underline{x}_N \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

Eq. di Lagrange

n eq. in n incognite $q_1, \dots, q_n$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} = 0 \quad \forall l = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{N} \underline{\Phi}_j \cdot \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = 0 \quad \forall l = 1, \dots, n$$

con $n = 3N - r$

6N eq. in 6N incognite $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{\Phi}_1, \dots, \underline{\Phi}_N)$

$$\begin{cases} \underline{\Phi}_j = m_j \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j \quad \forall j = 1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^{N} (m_j \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j) \frac{\partial \underline{x}_j}{\partial q_l} = 0 \quad \forall l = 1, \dots, n \\ G_s(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, r \end{cases}$$

"eq. pura della dinamica"

$$\begin{cases} \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} = 0} \\ G_s(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, r \\ \underline{\Phi}_j = m_j \ddot{\underline{x}}_j - \underline{F}_j \end{cases}$$

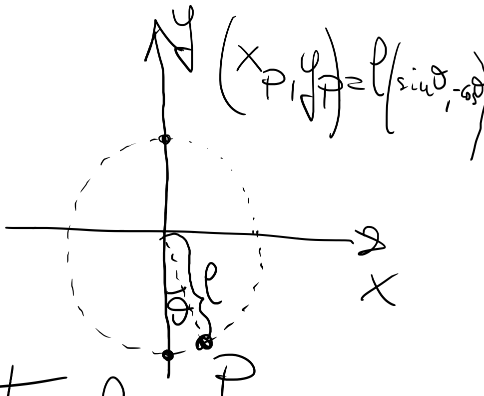
cioè le eq. di Lagr.

$G_s = 0 \Longleftrightarrow \underline{x}_j = \underline{x}_j(q, t) \quad \forall j = 1, \dots, N$

Altro non è che il sistema di eq. di Lagrange + la descrizione del vincolo + le eq. che definiscono le reazioni vincolari

Esempi di calcolo della lagrangiana e delle eq. di Lagrange.

Il caso del pendolo matematico



$\mathcal{L} = L = T - U$

adottiamo coordinate polari.

Scegliamo come coordinata libera θ

$$T = \frac{1}{2} m \, \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P = \frac{1}{2} m \left(\cancel{\dot{\rho} \underline{e}_\rho} + \rho \dot{\theta} \underline{e}_\theta \right) \cdot \left(\cancel{\dot{\rho} \underline{e}_\rho} + \rho \dot{\theta} \underline{e}_\theta \right)$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = mgy = -mgl\cos\theta$$

$L = L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$ è la lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \boxed{m l^2 \ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0}$$

è l'eq. di Lagrange

$\Updownarrow$

$m l^2 \ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$ è la II eq. cardinale calcolata rispetto al polo O e proiettata sulla normale al piano Oxy

$\Updownarrow$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$