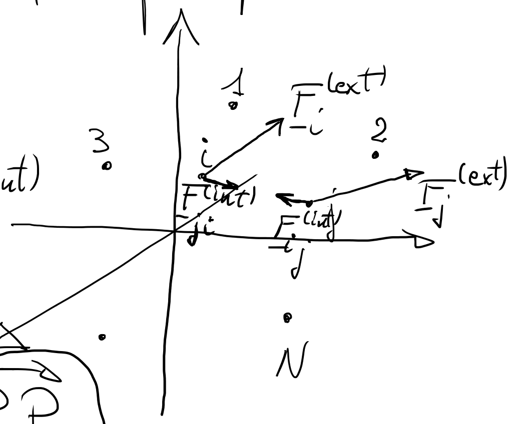
Mecc. Newtoniana per sistemi di N corpi puntiformi

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i \quad \forall\, i = 1, \dots, N$$



dove $\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ji}^{(int)}$

con $\underline{F}_{ji}^{(int)} = f_{ij}(\overline{P_iP_j}) \dfrac{\overrightarrow{P_jP_i}}{\overline{P_iP_j}}$, $f_{ij} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$\forall\, j = 1, \dots, N,\ j \neq i$.

In particolare, $\boxed{\underline{F}_{ji}^{(int)} = -\underline{F}_{ij}^{(int)}}$ (III principio della dinamica)

e $\boxed{\underline{F}_{ji}^{(int)} \parallel \overrightarrow{P_jP_i}}$.

Def. (di baricentro): $\underline{x}_B = \dfrac{\sum_{j=1}^{N} m_j \underline{x}_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j}$

Ponendo $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$, $M \underline{x}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j \underline{x}_j$.

$\Rightarrow \boxed{M \dot{\underline{x}}_B = \underline{P}} = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\underline{x}}_j$

$\Rightarrow M \ddot{\underline{x}}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\underline{x}}_j = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j$

I^a eq. cardinale:

$$\dot{\underline{P}} = \underline{R}^{(ext)} := \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j^{(ext)}$$

<u>Verifica</u>: $\dot{\underline{P}} = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j^{(ext)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i \neq j}^{N} \underline{F}_{ij}^{(int)}$

$$= \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j^{(ext)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} \underbrace{\left(\underline{F}_{ij}^{(int)} + \underline{F}_{ji}^{(int)} \right)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_j^{(ext)} + \underline{0} = \underline{R}^{(ext)} \quad \text{c.v.d.}$$

$$\underline{M}_Q := \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \underline{p}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{QP_j} \wedge \underline{v}_j$$

$$\dot{\underline{M}}_Q = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\overrightarrow{OP_j} - \overrightarrow{OQ} \right) \wedge \underline{v}_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left[m_j \left(\underline{v}_j - \underline{v}_Q \right) \wedge \underline{v}_j + m_j \overrightarrow{QP_j} \wedge \underline{a}_j \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \cancel{\underline{v}_j \wedge \underline{v}_j} - \sum_{j=1}^{N} m_j \underline{v}_Q \wedge \underline{v}_j + \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge m \underline{a}_j$$

$$= \underbrace{- \underline{v}_Q \wedge \sum_{j=1}^{N} m_j \underline{v}_j} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \underline{F}_j} = \underline{N}_Q - \underbrace{\underline{v}_Q \wedge \underline{P}}$$

Si noti che se Q fisso, oppure Q = B, oppure $v_Q \parallel P$

$$\Rightarrow \dot{\underline{M}}_Q = \underline{N}_Q \quad \text{dove } \underline{N}_Q := \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \underline{F}_j$$

II eq. cardinale: $\underline{N}_Q = \underline{N}_Q^{(ext)}$,

quindi $\dot{\underline{\Pi}}_Q = \underline{N}_Q^{(ext)} - \underline{v}_Q \wedge \underline{P}$

<u>Verifica</u>: $\underline{N}_Q = \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \underline{F}_j =$

$$= \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \underline{F}_j^{(ext)} + \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \sum_{i \neq j} \underline{F}_{ij}^{(int)}$$

Concentriamoci su $\sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \sum_{i \neq j} \underline{F}_{ij}^{(int)} =$

$$= \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \sum_{i=1}^{j-1} \underline{F}_{ij}^{(int)} + \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \sum_{i=j+1}^{N} \underline{F}_{ji}^{(int)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \sum_{i=1}^{j-1} \underline{F}_{ij}^{(int)} - \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \sum_{i=j+1}^{N} \underline{F}_{ij}^{(int)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge \sum_{i=1}^{j-1} \underline{F}_{ij}^{(int)} - \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{QP_i} \wedge \sum_{j=1}^{i-1} \underline{F}_{ji}^{(int)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\overrightarrow{QP_j} - \overrightarrow{QP_i}\right) \wedge \underline{F}_{ij}^{(int)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \overrightarrow{P_iP_j} \wedge \underline{F}_{ij}^{(int)} = \underline{0}.$$

$$\Rightarrow \underline{N}_Q = \underline{N}_Q^{(ext)}$$

c.v.d.

Se $\underline{F}_j^{(ext)} = \underline{0} \quad \forall j = 1, \dots, N$

(1) $\dot{\underline{P}} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_B(t) = \underline{v}_B(0)$

(2) $\dot{\underline{\Pi}}_Q + \underline{v}_Q \wedge \underline{P} = 0$, se $\underline{v}_Q = 0$, $Q = B$, $\underline{v}_Q \parallel \underline{P}$

allora $\dot{\underline{\Pi}}_Q = 0$.

Teorema (di König): $T := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \underline{v}_j \cdot \underline{v}_j$

è t.c. $T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j (\underline{v}_j - \underline{v}_B) \cdot (\underline{v}_j - \underline{v}_B) + \frac{1}{2} M \underline{v}_B \cdot \underline{v}_B$

Verifica: $T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \underline{v}_j \cdot \underline{v}_j =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left[(\underline{v}_j - \underline{v}_B) + \underline{v}_B \right] \cdot \left[(\underline{v}_j - \underline{v}_B) + \underline{v}_B \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j (\underline{v}_j - \underline{v}_B) \cdot (\underline{v}_j - \underline{v}_B) +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \underline{v}_B \cdot \underline{v}_B + \underline{v}_B \cdot \sum_{j=1}^{N} m_j (\underline{v}_j - \underline{v}_B) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j (\underline{v}_j - \underline{v}_B) \cdot (\underline{v}_j - \underline{v}_B) + \frac{1}{2} M \underline{v}_B \cdot \underline{v}_B + \underline{v}_B \cdot (\cancel{\underline{P}} - \cancel{M \underline{v}_B})$$

c.v.d.

Proposizione: $\underline{M}_Q = \underline{S} + \overrightarrow{QB} \wedge M \underline{v}_B$,
dove il momento angolare di "spin" è quello relativo al baricentro, cioè

$$\underline{S} = \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{BP}_j \wedge (\underline{v}_j - \underline{v}_B)$$

Dim.: $\underline{M}_Q = \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{QP}_j \wedge \left[(\underline{v}_j - \underline{v}_B) + \underline{v}_B \right] =$

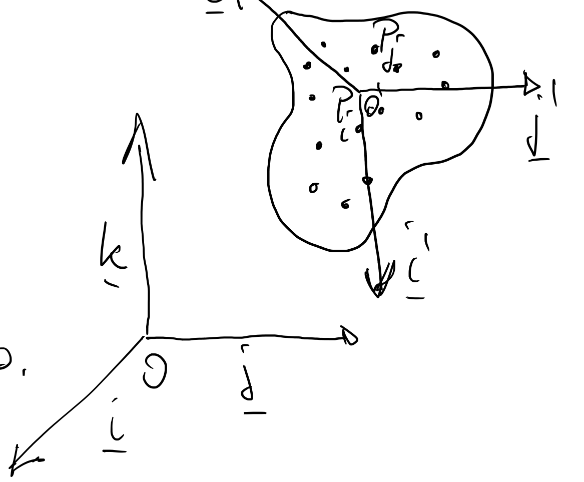
$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{QP}_j \wedge (\underline{v}_j - \underline{v}_B) + \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{QP}_j \right) \wedge \underline{v}_B =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left[m_j \overrightarrow{QB} \wedge (\underline{v}_j - \underline{v}_B) \right] + \sum_{j=1}^{N} \left[m_j \overrightarrow{BP}_j \wedge (\underline{v}_j - \underline{v}_B) \right]$$

$$+ M \overrightarrow{QB} \wedge \underline{v}_B = \overrightarrow{QB} \wedge \cancel{\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \underline{v}_j - M \underline{v}_B \right)} + \underline{S}$$

$$+ M \overrightarrow{QB} \wedge \underline{v}_B = \underline{S} + M \overrightarrow{QB} \wedge \underline{v}_B \quad \text{c.v.d.}$$

Corpi rigidi



$\forall i, j = 1, \dots, N$

$i \neq j \quad \overline{P_i P_j} = c_{ij}$ indip. dal tempo

Sia $(O', \underline{i}', \underline{j}', \underline{k}')$ una terna solidale al corpo rigido $\Rightarrow$ basta una roto-traslazione per determinare la posizione e la giacitura del corpo rigido a ogni istante di tempo.

Bastano 6 valori per identificare la posizione spaziale del corpo rigido (3 coordinate di O', 3 parametri per identificare la rotazione che porta $\underline{i}', \underline{j}', \underline{k}'$ in $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$).

$\Rightarrow$ 6 incognite (6 leggi del moto associate ai 6 valori che identificano la pos. del corpo rigido) e 6 eq.:

$$m\ddot{\underline{x}}_B = \underline{R}^{(ext)}, \qquad \dot{\underline{M}}_B = \underline{N}_B^{(ext)}$$

dove $\underline{M}_B = \underline{S}$

Ci riconduciamo allo studio

della II eq. cardinale, nel caso del polo fisso Q oppure nel caso di B=Q con moto di B che è dato dalla soluzione della I eq. cardinale.

sist. di rif. mobile con origine in Q (p.to fisso)

$\underline{V}_a = \underline{V}_t + \cancel{\underline{V}_z} = \underline{V}_{0'} + \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$
$= \cancel{\underline{V}_Q} + \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{QP}$

Consideriamo

$$\underline{M}_Q = \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{QP_j} \wedge \underline{V}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{QP_j} \wedge (\underline{\omega} \wedge \overrightarrow{QP_j}) \quad \boxed{\text{con Q p.to fisso.}}$$

Nel caso Q = B, abbiamo

dove $\underline{V}_a = \underline{V}_t = \underline{V}_B + \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{BP}$

$$\underline{M}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{BP_j} \wedge (\underline{V}_j - \underline{V}_B) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{BP_j} \wedge (\cancel{\underline{V}_B} + \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{BP_j} - \cancel{\underline{V}_B})$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{BP_j} \wedge (\underline{\omega} \wedge \overrightarrow{BP_j})$$

Studiamo le proprietà dell'operatore d'inerzia $\mathbb{J} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $\mathbb{J}(\underline{\omega}) = \underline{M}_Q(\underline{\omega}) := \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{QP_j} \wedge (\underline{\omega} \wedge \overrightarrow{QP_j})$

rispetto a Q fisso oppure Q = baricentro B

Oss.: $T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j\, \underline{v}_j \cdot \underline{v}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j (\underline{\omega}\wedge\vec{QP}_j)\cdot(\underline{\omega}\wedge \ldots$

Nota: abbiamo applicato la regola del prod. misto: $\underline{a}\cdot(\underline{b}\wedge\underline{c}) = \underline{b}\cdot(\underline{c}\wedge\underline{a}) = \underline{c}\cdot(\underline{a}\wedge\underline{b})$ $\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}^3$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left[\vec{QP}_j \wedge (\underline{\omega}\wedge\vec{QP}_j)\right]\cdot\underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{QP}_j\wedge(\underline{\omega}\wedge\vec{QP}_j) = \frac{1}{2}\underline{\omega}\cdot J(\underline{\omega})$$

Proposizione (proprietà fondamentali dell'operatore d'inerzia): L'operatore d'inerzia J è lineare, simmetrico e def. non neg.

Dim La linearità è banale.

Siano $\underline{u},\underline{v}\in\mathbb{R}^3$ allora

$$\underline{u}\cdot J(\underline{v}) = \underline{u}\cdot\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{QP}_j\wedge(\underline{v}\wedge\vec{QP}_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j\, \underset{a}{\underline{u}}\cdot\Big(\underset{b}{\vec{QP}_j}\wedge\underbrace{(\underline{v}\wedge\vec{QP}_j)}_{c}\Big) = \sum_{j=1}^{N} m_j (\underset{b}{\underline{v}}\wedge\underset{c}{\vec{QP}_j})\cdot\underbrace{(\underline{u}\wedge\vec{QP}_j)}_{a}$$

del prod. misto $\underline{a}\cdot(\underline{b}\wedge\underline{c})$ del prod. misto $\underline{a}\cdot(\underline{b}\wedge\underline{c})$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j\left[\vec{QP}_j\wedge(\underline{u}\wedge\vec{QP}_j)\right]\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot J(\underline{u}),$$ quindi J è simmetrico.

Siccome $\forall\,\underline{\omega}\in\mathbb{R}^3$, $\underline{\omega}\cdot J(\underline{\omega}) = 2T \geq 0$.

C.V.D.

Proposizione: Le componenti della matrice che rappresenta l'operatore d'inerzia in una terna $(O', \underline{i}', \underline{j}', \underline{k}')$ solidale al corpo rigido sono

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} m_j (y_j^2 + z_j^2) & -\sum_{j=1}^{N} m_j x_j y_j & -\sum_{j=1}^{N} m_j x_j z_j \\ -\sum_{j=1}^{N} m_j x_j y_j & \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j^2 + z_j^2) & -\sum_{j=1}^{N} m_j y_j z_j \\ -\sum_{j=1}^{N} m_j x_j z_j & -\sum_{j=1}^{N} m_j y_j z_j & \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j^2 + y_j^2) \end{pmatrix}$$

dove (x_j, y_j, z_j) sono le coordinate del punto j-esimo rispetto alla terna $(O', \underline{i}', \underline{j}', \underline{k}')$.

Dim.: $$\underline{M}_Q = \mathcal{I}(\underline{\omega}) = \sum_{j=1}^{N} m_j \overrightarrow{QP_j} \wedge (\underline{\omega} \wedge \overrightarrow{QP_j})$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \left[(\overrightarrow{QP_j} \cdot \overrightarrow{QP_j}) \underline{\omega} - (\overrightarrow{QP_j} \cdot \underline{\omega}) \overrightarrow{QP_j} \right]$$

Nota: si usa $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$

Proiettiamo, ad esempio, $\underline{M}_Q$ sul primo versore $\underline{i}'$:

$$\underline{M}_Q \cdot \underline{i}' = \sum_{j=1}^{N} m_j \left[(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2) \omega_1 - (x_j \omega_1 + y_j \omega_2 + z_j \omega_3) x_j \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \left[\cancel{x_j^2 \omega_1} - \cancel{x_j^2 \omega_1} + (y_j^2 + z_j^2) \omega_1 - x_j y_j \omega_2 - x_j z_j \omega_3 \right] =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{N} m_j (y_j^2 + z_j^2), \; -\sum_{j=1}^{N} m_j x_j y_j, \; -\sum_{j=1}^{N} m_j x_j z_j \right) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Questo giustifica la forma della prima riga della matrice d'inerzia, analogamente si dimostra la correttezza della 2ª e 3ª riga, calcolando $\underline{M}_Q \cdot \underline{j}'$ e $\underline{M}_Q \cdot \underline{k}'$.

C.V.D.

Def.: Si dice che $(\underline{O}', \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ è una terna principale d'inerzia se la corrispondente matrice è diagonale, cioè

$\underline{O}' = \underline{Q}$ quando $\underline{Q}$ è fisso

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} m_j (y_j^2 + z_j^2) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j^2 + z_j^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j^2 + y_j^2) \end{pmatrix}$$

Corollario: Se il corpo rigido ha almeno tre p.ti non allineati tra loro allora l'op. d'inerzia è def. positivo

---

Eq. di Eulero per il corpo rigido.

Oss.: $\underline{M}_Q = J(\underline{\omega}) = I_1 \omega_1 \underline{e}_1 + I_2 \omega_2 \underline{e}_2 + I_3 \omega_3 \underline{e}_3$

dove $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ è una terna principale d'inerzia

I_1, I_2, I_3 sono sulla diag. della matrice d'inerzia

e $\omega_1 = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_1$, $\omega_2 = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_2$, $\omega_3 = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_3$

Dalla II eq. cardinale della dinamica

$$\dot{\underline{M}}_Q = \underline{N}^{(ext)}$$

Proiettiamola sugli assi $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3} I_j \omega_j \underline{e}_j\right)\right]\cdot \underline{e}_i = \underline{N}^{(ext)}\cdot \underline{e}_i \quad \forall i=1,2,3$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{j=1}^{3}\left(I_j \dot{\omega}_j \underline{e}_j + I_j \omega_j \dot{\underline{e}}_j\right)\right]\cdot \underline{e}_i = \underline{N}^{(ext)}\cdot \underline{e}_i ,$$

osserviamo $\dot{\underline{e}}_j = \underline{\omega}\wedge \underline{e}_j$, quindi

$$\Rightarrow I_i \dot{\omega}_i \underline{e}_i + \left[\sum_{j=1}^{3} I_j \omega_j (\underline{\omega}\wedge \underline{e}_j)\cdot \underline{e}_i\right] = \underline{N}^{(ext)}\cdot \underline{e}_i$$

per $i=1$, abbiamo
" $i=2$, abbiamo
" $i=3$, "

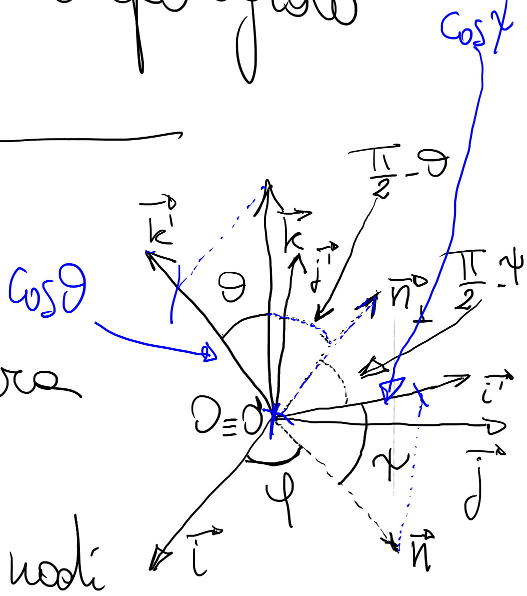
$$\boxed{\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - I_2\omega_2\omega_3 + I_3\omega_3\omega_2 = N_1^{(ext)} \\ I_2\dot{\omega}_2 + I_1\omega_1\omega_3 - I_3\omega_3\omega_1 = N_2^{(ext)} \\ I_3\dot{\omega}_3 - I_1\omega_1\omega_2 + I_2\omega_2\omega_1 = N_3^{(ext)} \end{cases}}$$

Eq. di Eulero per il corpo rigido

Angoli di Eulero

Tutti i vettori in figura sono di norma 1.

$\vec{n} := \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{k}'}{\|\vec{k}\wedge\vec{k}'\|}$, asse dei nodi.



φ angolo di precessione, θ angolo di nutazione, ψ angolo di rotazione pura.

Rotazione complessiva che conduce $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ in $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$: $R_3(\psi)\, R_1(\theta)\, R_3(\varphi)$

dove $R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Formule di Poisson

Osserviamo che $\boxed{\dot{\vec{e}}_j = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_j}$, dove $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ è una terna principale d'inerzia per il corpo rigido

$$\sum_{j=1}^{3} \dot{\vec{e}}_j \wedge \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} (\vec{\omega} \wedge \vec{e}_j) \wedge \vec{e}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left[(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j)\, \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{e}_j)\, \vec{e}_j \right] =$$

$$= 3\vec{\omega} - \sum_{j=1}^{3} (\vec{\omega} \cdot \vec{e}_j)\, \vec{e}_j = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}$$

$\Rightarrow$ Formula di Poisson $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \dot{\vec{e}}_j \wedge \vec{e}_j$

Dalla formula di Poisson e dalla def. degli ang. di Eulero, otteniamo:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\psi}\vec{e}_3$$

$\vec{\omega} \cdot \vec{e}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$,

$\vec{\omega} \cdot \vec{e}_1 = +\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$,

$\vec{\omega} \cdot \vec{e}_2 = +\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$,

siccome $\vec{n} \perp \vec{e}_3$
$\vec{k} \cdot \vec{e}_3 = \cos\theta$
$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 = 0$
$n_1 \cdot e_1 = \sin\psi$

$$\Rightarrow \underline{\omega} = \begin{pmatrix} +\sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

—— o ——

Sistemi di forze equivalenti

Def.: Si dicono 2 sistemi di forze t.c. sono uguali $\underline{R}^{(ext)} = \underline{R}'^{(ext)}$, $\underline{N}_Q^{(ext)} = \underline{N}_Q'^{(ext)}$ $\forall$ polo Q.

Oss.: Il moto di un corpo rigido è il medesimo per 2 sistemi di forze equivalenti, perché la dinamica del corpo rigido è regolata da

$$M\ddot{\underline{X}}_B = \underline{R}^{(ext)} = \underline{R}'^{(ext)} \quad e \quad \dot{\underline{M}}_Q = \underline{N}_Q^{(ext)} - \underline{V}_Q \wedge \underline{P}$$
$$= \underline{N}_Q'^{(ext)} - \underline{V}_Q \wedge \underline{P}$$

Esempio: per un corpo rigido soggetto alla sola forza di gravità $(-m_j g \underline{e}_z)$,
$\underline{R}^{(ext)}$ e $\underline{N}_Q^{(ext)}$ sono come se la massa fosse ~~tutta~~ concentrata in B.

Verifica. $$\underline{R}^{(ext)} = -\sum_{j=1}^{N} m_j g \underline{e}_z = -\left(\sum_{j=1}^{N} m_j\right) g \underline{e}_z$$
$$= -\underbrace{M}_{\text{massa totale}} g \underline{e}_z$$

$$\underline{N}_Q^{(ext)} = \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{QP_j} \wedge (-m_j g \underline{e}_z) = -g \left[\sum_{j=1}^{N} (m_j \overrightarrow{QP_j})\right] \wedge \underline{e}_z$$

$$= M\,\overrightarrow{QB} \wedge (-g \underline{e}_z) = \overrightarrow{QB} \wedge (-Mg)\underline{e}_z$$

Osservazione: per un corpo rigido in caduta libera nel vuoto abbiamo

$$\cancel{M}\ddot{\underline{x}}_B = -\cancel{M} g \underline{e}_z \Rightarrow \underline{x}_B(t) = \underline{x}(0) + \underline{v}(0)t - \frac{1}{2} g t^2 \underline{e}_z$$
$$\dot{\underline{M}}_B = \cancel{\overrightarrow{BB}} \wedge (-Mg \underline{e}_z) = 0$$

Eq. di Eulero nel caso di rotazioni libere

(cioè moto con baricentro vincolato, polo fisso Q e $\underline{N}_Q^{(ext)} = \underline{0}$)

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

Caso a simmetria sferica

$$I_1 = I_2 = I_3$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$$

$\underline{\omega}$ costante.

Osservazione: $\underline{\omega}$ è facile da riconoscere perché $\underline{v}_a = \underline{v}_t = \underline{v}_{O'} + \underline{\vec{\omega} \wedge \vec{O'P}}$.

Caso del giroscopio $I_1 = I_2 \neq I_3$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3)\,\omega_2 \omega_3 \\ I_1 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\,\omega_1 \omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_3(t) = \omega_3(0) \ \boxed{\text{costante}}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \left(\dfrac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3\right)\omega_2 =: \beta\,\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = -\left[\dfrac{(I_1 - I_3)\,\omega_3}{I_1}\right]\omega_1 =: -\beta\,\omega_1 \end{cases}$$

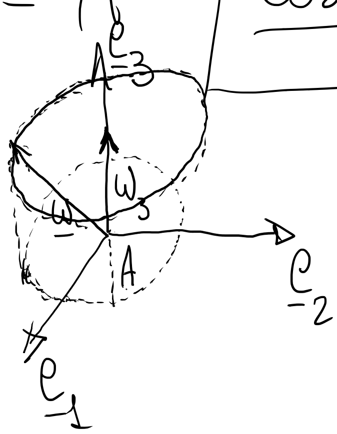
$$\ddot{\omega}_1 = \beta\dot{\omega}_2 = -\beta^2\omega_1 \Rightarrow \ddot{\omega}_1 = -\beta^2\omega_1$$

$$\Rightarrow \omega_1(t) = A\cos(\beta t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_1 = -A\beta\sin(\beta t + \varphi) = \beta\,\omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2(t) = -A\sin(\beta t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2 \ \boxed{\text{costante}}$$



Proposizione: (A) ω_3, $\omega_1^2 + \omega_2^2$ sono costanti;

(B) $\underline{\Pi}_Q$, $\underline{\omega}$, $\underline{e}_3$ sono coplanari;

(C) Gli angoli tra $\underline{\Pi}_Q$ e $\underline{\omega}$, $\underline{\Pi}_Q$ e $\underline{e}_3$, $\underline{\omega}$ e $\underline{e}_3$ sono costanti.

Dim.: (A) provato sopra.

(B) Ricordiamo che $\boxed{\underline{\Pi}_Q = \sum_{j=1}^{3} I_j \omega_j \underline{e}_j}$

Considariamo:

$$\det \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 & \omega_1 & 0 \\ I_2 \omega_2 & \omega_2 & 0 \\ I_3 \omega_3 & \omega_3 & 1 \end{pmatrix} = I_1 \omega_1 \omega_2 - I_2 \omega_1 \omega_2 = (I_1 - I_1)\omega_1 \omega_2 = 0$$

(C) Osserviamo che

$$\cos(\widehat{\underline{\omega}, \underline{e}_3}) = \frac{\underline{\omega} \cdot \underline{e}_3}{\|\underline{\omega}\| \cdot \|\underline{e}_3\|} = \frac{\omega_3}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}} = \text{cost.}$$

perché in (A) che $\omega_3(t) = \omega_3(0)$ e

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = A^2 + \omega_3^2(0) = \text{costante}$$

$$\cos(\widehat{\underline{\Pi}_Q, \underline{e}_3}) = \frac{\underline{\Pi}_Q \cdot \underline{e}_3}{\|\underline{\Pi}_Q\| \cdot \|\underline{e}_3\|} = \frac{I_3 \omega_3}{\|\underline{\Pi}_Q\|} = \text{cost.}$$

perché $\omega_3(t) = \omega_3(0)$ e $\dot{\underline{M}}_Q = \underline{0}$.

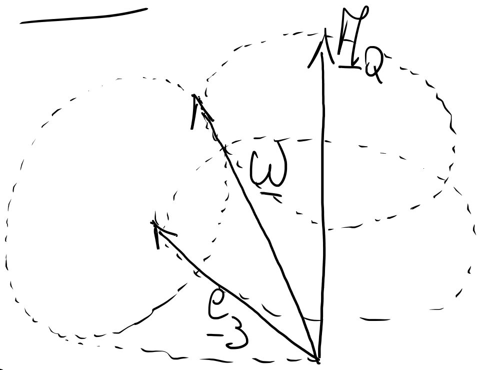
$$\cos(\widehat{\underline{M}_Q, \underline{\omega}}) = \frac{\underline{M}_Q \cdot \underline{\omega}}{\|\underline{M}_Q\| \|\underline{\omega}\|} = \frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2}{\|\underline{M}_Q\| \|\underline{\omega}\|}$$

energia cinetica

$$= \frac{2T}{\|\underline{M}_Q\| \|\underline{\omega}\|} = \frac{2E}{\|\underline{M}_Q\| \|\underline{\omega}\|} = \text{costante}$$

C.V.D.

Moto alla Poinsot:



$\underline{\omega}(t)$ descrive un cono attorno a $\underline{M}_Q$ e anche attorno a $\underline{e}_3(t)$; questi coni rotolano l'uno sull'altro senza strisciare, con $\underline{M}_Q, \underline{\omega}(t), \underline{e}_3(t)$ sempre complanari.

Caso della trottola asimmetrica libera $I_1 > I_2 > I_3$

Abbiamo 2 leggi di conservazione

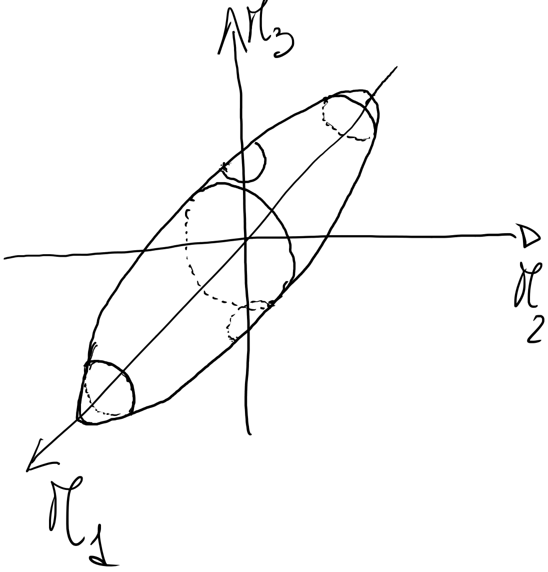
$\underline{M}_Q$ costante   Energia $E = T$ costante

$$\|\underline{M}_Q\|^2 = M^2 \Rightarrow M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 \quad \text{sfera di raggio } M$$

$$2T = 2E \Rightarrow \frac{M_1^2}{2EI_1} + \frac{M_2^2}{2EI_2} + \frac{M_3^2}{2EI_3} = 1 \quad \text{ellissoide}$$

di semiassi $\sqrt{2EI_1}, \sqrt{2EI_2}, \sqrt{2EI_3}$

Vedi la figura in alto a sin. del diario delle lezioni



Le forze di interazione "classiche" a 2 corpi sono conservative.

$$\underline{F}_{ij}^{(int)} = f\left(\overline{P_iP_j}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{P_iP_j}}{\overline{P_iP_j}}$$

Poniamo $\underline{r} = \overrightarrow{P_iP_j}$

$$\Rightarrow \underline{F}_{ij}^{(int)} = f(\|\underline{r}\|) \cdot \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|}, \text{ dove } \underline{r} = (x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i)$$

$$r^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2$$

$\exists\, U_{ij}^{(int)}$ t.c. $-\text{grad}_{(x_j, y_j, z_j)} U_{ij}^{(int)} = \underline{F}_{ij}^{(int)}$?

Si pone $U_{ij}^{(int)} = -\int f(\rho)\, d\rho$.

Verifica: $\frac{\partial U_{ij}^{(int)}}{\partial x_j} = -f(\|\underline{r}\|) \cdot \frac{\partial \|\underline{r}\|}{\partial x_j} = -f(\|\underline{r}\|) \frac{\cancel{2} x_j}{\cancel{2}\sqrt{(x_j^2 - x_i^2) + (y_j^2 - y_i^2) + (z_j - z_i)^2}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_{ij}^{(int)}}{\partial y_j} = -f(\|\underline{r}\|) \frac{y_j}{\|\underline{r}\|}, \quad \frac{\partial U^{(int)}}{\partial z_j} = -f(\|\underline{r}\|) \frac{z_j}{\|\underline{r}\|}$$

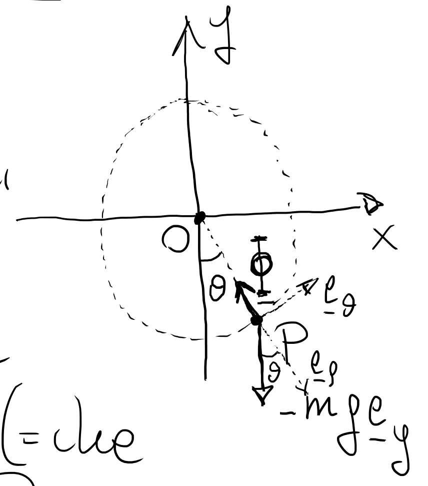
$$\Rightarrow -\text{grad}_{(x_j, y_j, z_j)} U_{ij}^{(int)} = f(\|\underline{r}\|) \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|} = \underline{F}_{ij}^{(int)}$$

C.V.D.

⟹ In un corpo rigido avremo che

$$U^{(int)} = \sum_{1\le i<j\le N} U_{ij}^{(int)}(P_iP_j) = \text{costante}$$

Eq. del moto per il "pendolo matematico"



O centro di sospensione

P punto di oscillazione (= che può oscillare). Massa di P = m.

$\overline{OP} = \ell$ costante, $\underline{\Phi}$ reazione vincolare agente su P

$$\boxed{\underline{\Phi} \,//\, \overrightarrow{OP}}$$

II eq. cardinale per P con polo in O:

$$\dot{\underline{M}}_O = \underline{N}_O^{(ext)}, \quad \text{dove}$$

$$\underline{M}_O = m\overrightarrow{OP}\wedge\vec{v}_P = m\rho\,\underline{e}_\rho \wedge\left(\rho\dot\theta\,\underline{e}_\theta + \cancel{\dot\rho\,\underline{e}_\rho}\right),$$

siccome $\rho = \ell$ costante $= m\rho^2\dot\theta\,(\underline{e}_\rho\wedge\underline{e}_\theta)$

$= m\ell^2\dot\theta\,\underline{e}_z$ (in direzione uscente rispetto al foglio)

$$\dot{\underline{M}}_O = m\ell^2\ddot\theta\,\underline{e}_z$$

$$\underline{N}_O^{(ext)} = \overrightarrow{OP}\wedge(-mg\,\underline{e}_y) + \cancel{\overrightarrow{OP}\wedge\underline{\Phi}} = \rho\,\underline{e}_\rho\wedge(-mg\,\underline{e}_y)$$

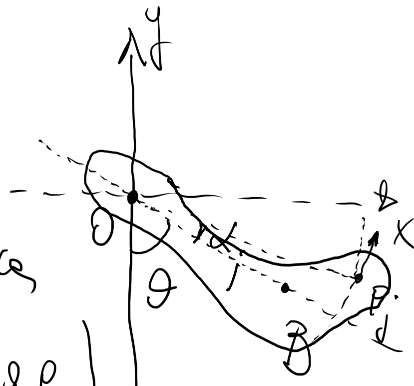
$$= -mg\ell\sin\theta\,\underline{e}_z$$

$$\underline{\Pi}_O \cdot \underline{e}_z = \underline{N}_O^{(ext)} \cdot \underline{e}_z \Rightarrow \cancel{m} l^{\cancel{2}} \ddot{\theta} = -\cancel{m} g \cancel{l} \sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta \doteq -\omega^2 \sin\theta$$

con $\omega^2 = \frac{g}{l}$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Moto dei corpi rigidi con asse di rotazione fisso



II eq. cardinale della dinamica

$$\dot{\underline{\Pi}}_O = \underline{N}_O^{(ext)} = \vec{OB} \wedge (-Mg\,\underline{e}_y) + \sum_{j=1}^{N_{asse}} \vec{OA}_j \wedge \underline{\Phi}_j$$

$\perp \underline{e}_z$

con $\vec{OA}_j \perp Oxy$

$\omega \perp Oxy$

$$\underline{\Pi}_O = \sum_{j=1}^{N} \vec{OP}_j \wedge m_j \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{N} \vec{OP}_j \wedge \underbrace{(m_j \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_j)}_{\in Oxy}$$

$\vec{OP}_j = \rho_j \underline{e}_\rho + z_j \underline{e}_z$ coord. polari di $\vec{OP}_j$ sono $(\rho_j, \theta + \alpha_j, z_j)$

$$\vec{v}_j = \cancel{\dot{\rho}_j \underline{e}_\rho} + \rho_j \dot{\theta}\, \underline{e}_\theta + \cancel{\dot{z}_j \underline{e}_z}$$

$$\underline{M}_O = \sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j^2 \dot\theta \underbrace{(\underline{e}_\rho \wedge \underline{e}_\theta)}_{\underline{e}_z} + \sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j z_j \dot\theta (\underline{e}_z \wedge \underline{e}_\theta)$$

$$\dot{\underline{M}}_O = \sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j^2 \ddot\theta \underbrace{(\underline{e}_\rho \wedge \underline{e}_\theta)}_{\underline{e}_z} + \sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j z_j \ddot\theta (\underline{e}_z \wedge \underline{e}_\theta) - \sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j z_j \dot\theta^2 (\underline{e}_z \wedge \underline{e}_\rho)$$

II cardinale proiettata su $\underline{e}_z$

$$\dot{\underline{M}}_O \cdot \underline{e}_z = \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j^2\right) \ddot\theta = \left[\overline{OB} \wedge (-Mg\underline{e}_y)\right] \cdot \underline{e}_z$$

$$= -Mg\,\overline{OB} \sin\theta$$

$$\Rightarrow I \ddot\theta = -Mg\,\overline{OB} \sin\theta$$

I è l'inerzia rispetto all'asse di rotazione

$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j^2 = \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j^2 + y_j^2)$$

distanza di P_j dall'asse di rotazione

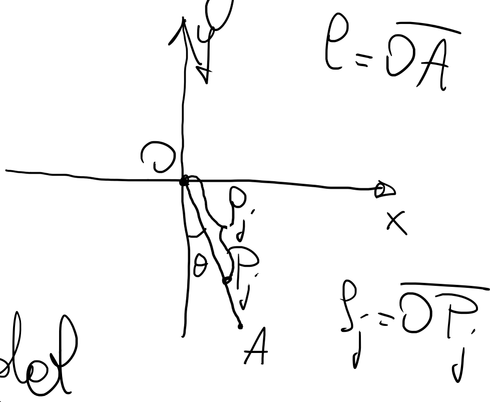
$$\Rightarrow \ddot\theta = -\left(\frac{M\overline{OB}}{I} g\right) \sin\theta$$

Sia $l_B = \frac{I}{M\overline{OB}}$ la lunghezza ridotta del pendolo composto

$$\Rightarrow \ddot\theta = -\frac{g}{l_B} \sin\theta = -\omega^2 \sin\theta$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\frac{g}{l_B}}$$

Un esempio di calcolo di momento d'inerzia rispetto a un asse fisso di rotazione: l'asta omogenea vincolata in un estremo



$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x_j^2 + y_j^2\right) = \sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j^2$$

dove (x_j, y_j) sono le coord. del generico p.to materiale P_j all'interno dell'asta

$$I = \sum_{j=1}^{N} m_j \rho_j^2 = \int_0^{\ell} d\rho\, \rho^2 \cdot \delta$$

dove $\delta = \frac{m}{\ell}$ è la densità (costante) di materia all'interno dell'asta.

$$= \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} d\rho\, \rho^2 =$$

$$= \frac{m}{\cancel{\ell}} \frac{\ell^{\cancel{3}}}{3} = \frac{1}{3} m \ell^2$$

Es. 1: calcolare l'inerzia dell'asta omogenea per un asse di rotazione passante per il baricentro $\left(I = m\ell^2/12\right)$.

Teorema (di Huygens-Steiner): Siano a e a_B due assi paralleli di cui il secondo è passante per il baricentro di un corpo rigido, allora

$$\underbrace{I_a}_{\text{inerzia rispetto all'asse } a} = \underbrace{I_{a_B}}_{\text{inerzia rispetto ad } a_B} + \underbrace{M}_{\text{massa del corpo rigido}} \underbrace{d^2}_{\text{distanza tra } a \text{ e } a_B}$$

Dim.: Siano (x_j, y_j, z_j) le coord. del punto P_j ($\in$ al corpo rigido) con l'asse z coincidente con a_B, quindi $I_{a_B} = \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j^2 + y_j^2)$.

Sia inoltre l'asse a t.c. $x = d$, $y = 0$

$$\Rightarrow I_a = \sum_{j=1}^{N} m_j \left[(x_j - d)^2 + y_j^2\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j^2 + y_j^2) - 2d \cancel{\sum_{j=1}^{N} m_j x_j} + \left(\sum_{j=1}^{N} m_j\right) d^2$$

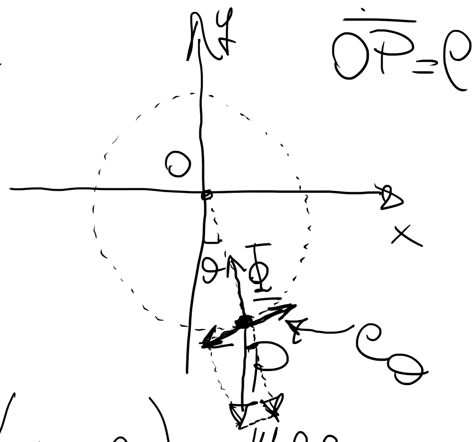
$$= I_{a_B} + M d^2 . \qquad \text{C.V.D.}$$

Esercizio 2: Verificare l'es. 1 usando Huygens-Steiner.

Calcolo della reazione vincolare per il pendolo matematico

$\overline{OP} = \ell$

Abbiamo utilizzato la II eq. cardinale della dinamica:



$$\dot{M}_O = N_O^{(ext)} = \vec{OP} \wedge (-mg\, e_y)$$

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta + \Phi \\ \frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = -mg\sin\theta \end{cases}$$

dove $\Phi = \underline{\Phi} \cdot e_\rho$

$\Rightarrow \rho = \ell$, $\Rightarrow m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$

$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$

$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta = E$

$$\Rightarrow -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + \Phi$$

$$\Rightarrow \Phi = -m\ell\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \Phi = -\frac{2}{\ell}\left(\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2\right) - mg\cos\theta$$

$$= -\frac{2}{\ell}(E + mg\ell\cos\theta) - mg\cos\theta$$

$$= -\frac{2E}{\ell} - 3mg\cos\theta,$$

questa espressione della reazione vincolare dipende solo dalla posizione (e dalle cond. iniz., ma non dalla velocità istantanea).