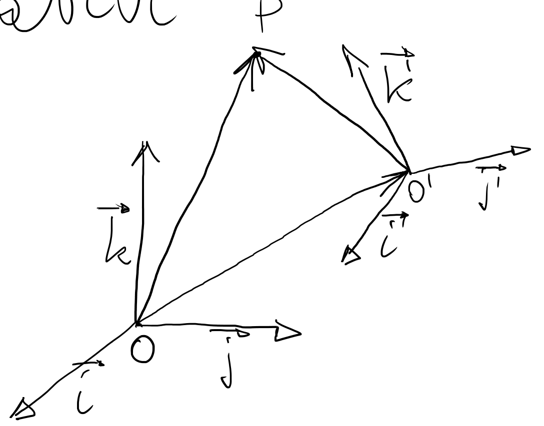
Moti relativi



Terna di riferimento $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è relativa all'osservatore "fisso".

Terna di riferimento $(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ è relativa all'osservatore "mobile".

$\Rightarrow$ Sono note le leggi del moto di $(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ e anche di P rispetto a $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si vuole sapere quello di P rispetto a $(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$.

<u>Convenzioni riguardo alle notazioni</u>

$\vec{v}$ indica un vettore, $\underline{a}$ indica le coordinate rispetto a un sist. di rif.

maiuscola! $\underline{Q}$ sono le coordinate di P proiettate rispetto alla terna $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$

Minuscola! $\underline{q}$ sono le coordinate di P proiettate rispetto alla terna $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Se per le coordinate compare l'apice ' si intende che l'origine è O' e non O

Esempi: $\underline{Q} = \begin{pmatrix} \vec{OP}\cdot\vec{i'} \\ \vec{OP}\cdot\vec{j'} \\ \vec{OP}\cdot\vec{k'} \end{pmatrix}$, $\underline{q}' = \begin{pmatrix} \vec{O'P}\cdot\vec{i} \\ \vec{O'P}\cdot\vec{j} \\ \vec{O'P}\cdot\vec{k} \end{pmatrix}$

R è la matrice di rotazione che consente di passare dalle coordinate in $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ a quelle riferite a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Per ottenere informazioni sulle leggi del moto, partiamo dall'ovvia relazione

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

e dallo studio delle sue derivate.

proiettiamo le eq. sulla terna $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\boxed{\underline{q} = (\underline{q} - \underline{q}') + R\underline{Q}'} \quad R\underline{Q}' = \underline{q}'$$

deriviamo ambo i membri

$$\dot{\underline{q}} = \frac{d}{dt}(\underline{q} - \underline{q}') + \dot{R}\underline{Q}' + R\dot{\underline{Q}}'$$

Osserviamo che $\underline{q}'$

$$\dot{R}\underline{Q}' = (\dot{R}R^T)(R\underline{Q}'),$$

dove $\dot{R}R^T$ è antisimmetrica.

Verifica: Siccome $RR^T = I$, allora

$$\dot{R}R^T + R(\dot{R})^T = 0$$

$$\Rightarrow \dot{R}R^T = -R(\dot{R})^T = -(\dot{R}R^T)^T \quad \text{c.v.d.}$$

Proposizione: $\exists$ un vettore $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ si ha che $(\dot{R}R^T)\underline{v} = \underline{\omega} \wedge \underline{v}$.

Dim.: Siccome abbiamo verificato che $\dot{R}R^T$ è antisimmetrica, allora $\exists\, a, b, c$ t.c. $\dot{R}R^T \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a v_2 + b v_3 \\ -a v_1 + c v_3 \\ -b v_1 - c v_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$ con

l'identificazione $\begin{pmatrix} \omega_1 = -c \\ \omega_2 = b \\ \omega_3 = -a \end{pmatrix}$, cioè $\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ C.V.D.

Def.: poniamo $\underline{\omega}(t) \in \mathbb{R}^3$ t.c.

$$\underline{\omega} \wedge \cdot = (\dot{R}R^T) \cdot$$

$$\dot{\underline{q}} = \frac{d}{dt}(\underline{q} - \underline{q}') + \underline{\omega} \wedge R\underline{Q}' + R\dot{\underline{Q}}' \quad [*]$$

$\begin{pmatrix} \vec{OO'} \cdot \vec{i} \\ \vec{OO'} \cdot \vec{j} \\ \vec{OO'} \cdot \vec{k} \end{pmatrix}$

$$= \frac{d}{dt}(\underline{q} - \underline{q}') + \underline{\omega} \wedge \underline{q}' + R\dot{\underline{Q}}'$$

In notazione vettoriale

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'P} + \vec{V}'$$

velocità di P rispetto a O

velocità del punto P rispetto a O'

Legge di composizione delle velocità (per i moti relativi): $\vec{V}_a = \vec{V}_t + \vec{V}_r$, dove $\vec{V}_t = \vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'P}$ e si intende che $\vec{V}_a$ = velocità assoluta di P, $\vec{V}_t$ = velocità di trascinamento, $\vec{V}_r$ = velocità relativa, $\vec{V}_{O'}$ è la velocità di O' rispetto ad O.

Formula fondamentale dei moti rigidi:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'P} \quad (\text{caso } \vec{V}_r = \vec{0}).$$

Passiamo alle accelerazioni, deriviamo [*], otteniamo:

$$\ddot{q} = \frac{d^2}{dt^2}(q - q') + \dot{\underline{\omega}} \wedge \underbrace{R\underline{Q}'}_{q'} + \underline{\omega} \wedge \underbrace{(\dot{R}R^T)}_{\underline{\omega}\wedge} \underbrace{R\underline{Q}'}_{q'}$$

$$+ \underline{\omega} \wedge R\dot{\underline{Q}}' + \underbrace{(\dot{R}R^T)}_{\underline{\omega}\wedge} R\dot{\underline{Q}}' + R\ddot{\underline{Q}}'$$

Interpretiamo la formula precedente in senso vettoriale:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{O'P} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{a}'$$

accelerazione del punto P rispetto a O

velocità di P rispetto a O'

accelerazione di P rispetto ad O'

Teorema (di Coriolis): vale la seguente relazione

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_c + \vec{a}_r ,$$

dove $\vec{a}_a$ = accelerazione assoluta, $\vec{a}_t = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{O'P} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P})$ è l'accelerazione di trascinamento, $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ è l'accelerazione di Coriolis, $\vec{a}_r$ è l'accelerazione relativa (cioè di P rispetto a O').

? = Eq. di Newton nel sist. di rif. mobile

Nel sist. di rif. "fisso", avremo

$$m\vec{a}_a = \vec{F}_a$$

dal teorema di Coriolis, sappiamo che

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{a}_r = \vec{F}_a - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = \vec{F}_r$$

con $\vec{F}_r = \vec{F}_a - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c$ forze apparenti, forza di Coriolis.

dove $\vec{a}_t = \vec{a}_{O'} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{O'P}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P})}$

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

Relatività Galileiana: 2 sistemi di riferimento sono meccanicamente equivalenti (cioè le eq. di N. valgono con le stesse forze $\forall$ soluzione delle eq. di N.) se e solo se essi si muovono di velocità rettilinea uniforme uno rispetto all'altro.

Dim.: Assumiamo che $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ si muova di moto rett. unif. rispetto a $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \Rightarrow \underline{\vec{v}_{O'} \text{ costante } (\vec{a}_{O'} = \vec{0})}$, e $R(t) = R(0)\ \forall t \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{a}_t = \vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_r = \vec{F}_a .$$

Assumiamo ora che $\vec{F}_r = \vec{F}_a$ $\forall$ soluz. delle eq. di N. Si consideri un moto t.c. $P(t) = P^*$, $\vec{v}'(t) \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{a}_t = \vec{0}$, si consideri un altro moto t.c. $P(t) = P^*$ e $\vec{v}'(t) \perp \vec{\omega}$

$$m\vec{a}_t = 0 = 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{\omega} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \vec{a}_t = \vec{a}_{O'} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}} + \cancel{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})}$$

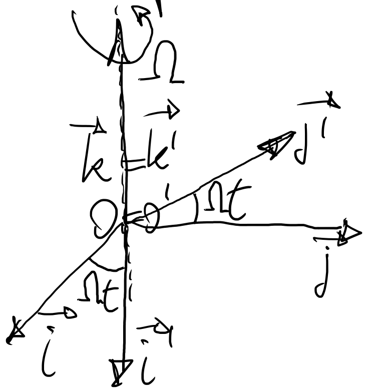
$$\Rightarrow \vec{a}_{O'} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{O'} = \text{costante}$$

C.V.D.

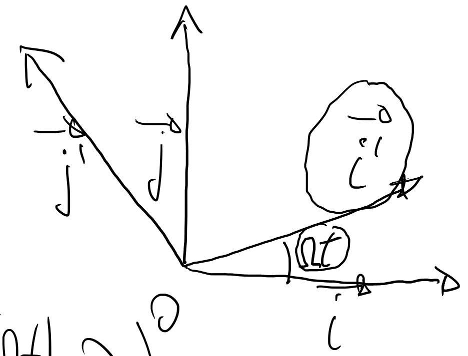
La classe di equivalenza costituita dai sistemi inerziali contiene sist. in moto traslatorio unif. uno rispetto all'altro.

Calcolo di $\vec{\omega}$ per sist. in rotazione unif. (con asse di rotazione fisso).

Es. La giostra



$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\dot{R}(t) = \Omega \begin{pmatrix} -\sin(\Omega t) & -\cos(\Omega t) & 0 \\ +\cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{R}(t)(R(t))^T = \Omega \begin{pmatrix} -\sin(\Omega t) & -\cos(\Omega t) & 0 \\ \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \Omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{R}(t)(R(t))^T \underline{u} = \underbrace{\Omega\, \underline{k} \wedge \underline{u}}_{} = \Omega \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\omega} = \Omega\, \underline{k}$

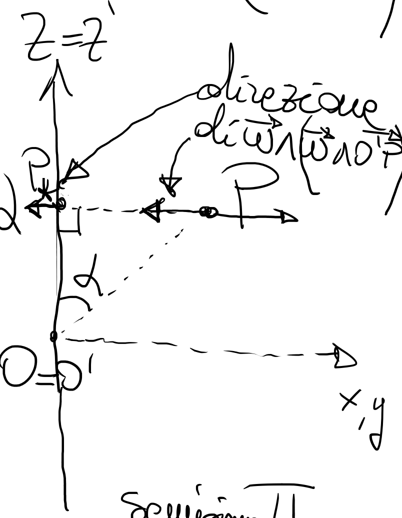
Nota: $\vec{\omega} \,//\, \vec{k}$

asse di rotazione

Notare che il verso è concorde con la regola della mano destra

Forza di trascinamento nel sistema di riferimento solidale alla giostra: $-m\vec{a}_t$, t.c. $\vec{a}_t = \cancel{\vec{a}_{O'}} + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})$

$? = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})$



$\|\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\| = \|\vec{\omega}\| \cdot \|\overrightarrow{O'P}\| \cdot \sin\alpha$

$= \|\vec{\omega}\| \cdot \|\overrightarrow{P_*P}\| = \|\vec{\omega}\| \, \overline{P_*P}$

scegliamo Π asse $z (= z')$ e $P \in \Pi$

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$ è normale a Π e diretto in verso entrante rispetto al disegno

$\|\underline{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})\| = \|\vec{\omega}\|^2 \, \overline{P_*P} = \Omega^2 \, \overline{P_*P}$

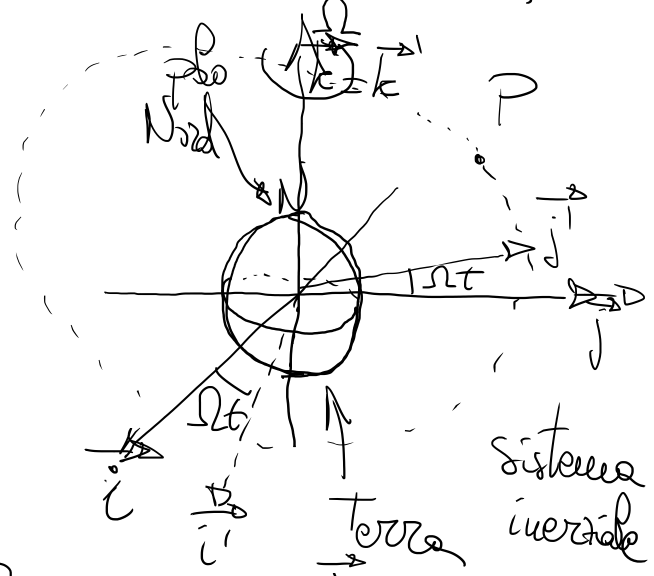
$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) = \Omega^2 \, \overrightarrow{PP_*}$

Nota: l'accelerazione di trascinamento è centripeta.

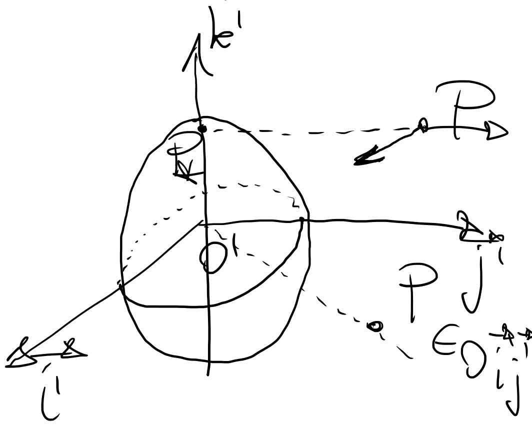
? $= -m\vec{a}_t$

La forza apparente "di trascinamento" è $-m\vec{a}_t = m\Omega^2 \overrightarrow{P_*P}$ è una forza centrifuga.

Esempio: satellite in orbita geostazionaria



? posizione di P affinché, rispetto alla Terra, P sia in quiete



Scriviamo le eq. di N. per P nel sistema co-rotante con la Terra:

$$\vec{0} = m\vec{a}_r = -\frac{GM_T m}{\overline{OP}^3}\overrightarrow{O'P} + m\Omega^2\overrightarrow{P_*P} \cancel{-2m\Omega\vec{k}\wedge\vec{v}'_P}$$

$$+\frac{GM_T \cancel{m}}{\overline{OP}^3}\overrightarrow{O'P} = \cancel{m}\Omega^2\overrightarrow{P_*P}$$

Si può avere l'equilibrio delle forze solo se $P_* = O'$, cioè P è sul piano equatoriale

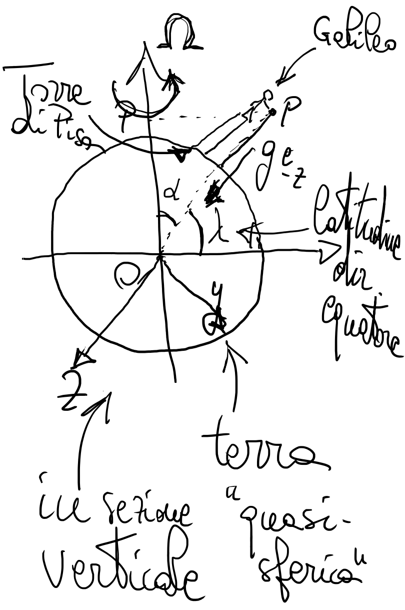
$$\frac{GM_T}{\overline{OP}^3}\cancel{\overrightarrow{O'P}} = \Omega^2\cancel{\overrightarrow{O'P}} \Rightarrow \frac{GM_T}{\overline{OP}^3} = \Omega^2$$

$$\overline{OP} = \left(\frac{GM_T}{\Omega^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{GM_T(86400\,\mathrm{sec})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \simeq 40000\ \mathrm{km}$$

Deviazione dei gravi verso oriente

gravità locale

$$m\vec{a} = \left(-\frac{G M_T m\, \vec{OP}}{\overline{OP}^3}\right) + \left(m\,\Omega^2 \vec{P_* P}\right) - 2m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}'$$



$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'$$

asse z diretto come $\vec{g}$, asse x in direzione entrante rispetto al disegno (verso est)

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'\right)\cdot \underline{e}_x \\ \ddot{y} = -\left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'\right)\cdot \underline{e}_y \\ \ddot{z} = g - \left(2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'\right)\cdot \underline{e}_z \end{cases}$$

$$\underline{x}(t) = \underline{x}^{(0)}(t) + \underline{x}^{(1)}(t) + \underline{x}^{(2)}(t) \dots$$

dove $\|\underline{x}^{(j+1)}(t)\| \leq \|\underline{x}^{(j)}(t)\| \quad \forall j,\ \forall t \in [0, T]$ — tempo di impatto al suolo

e $\underline{x}^{(0)}$ è soluzione di $\ddot{\underline{x}} = \underline{g}$, cioè

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{(0)}(t) = x_0 \\ y^{(0)}(t) = y_0 \\ z^{(0)}(t) = \frac{1}{2} g t^2 + z(0) \end{cases} \Rightarrow \underline{v}^{(0)'} = g t\, \underline{e}_z$$

$$\begin{cases} \ddot{x}^{(1)} = -2\left(\underline{\omega}\wedge \underline{v}^{(0)'}\right)\cdot \underline{e}_x = +2\Omega g t \cos\lambda \\ \ddot{y}^{(1)} = -\cancel{\left(2\,\underline{\omega}\wedge\underline{v}^{(0)'}\right)}\cdot \underline{e}_y = 0 \\ \ddot{z}^{(1)} = \cancel{\left(2\,\underline{\omega}\wedge\underline{v}^{(0)'}\right)}\cdot \underline{e}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{3}\Omega g t^3 \cos\lambda \\ y^{(1)} = 0 \\ z^{(1)} = 0 \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{\|\underline{x}^{(1)}(t)\|}{\|\underline{x}^{(0)}(t) - \underline{x}(0)\|} = \frac{\frac{1}{3}\Omega g t^{3}\cos\lambda}{\frac{1}{2} g t^2} = \frac{2}{3}\Omega t \cos\lambda$$

con $t \in [0, T]$, $T \simeq 2\,\text{sec} \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{2\pi t \cos\lambda}{86400} \sim \frac{1}{10000}$