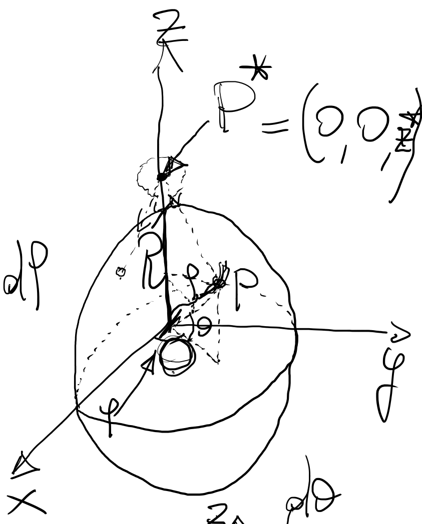
Elementi di teoria della gravitazione

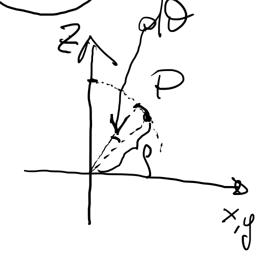


sferiche

Coord. di P all'interno della terra : ρ $d\varphi\ \rho\cos\theta\, d\theta\, d\rho$

$$(\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta)$$

densità di materia all'interno della terra $\delta = \delta(\rho)$.



agente su P

$$\underline{F} = +Gm\int_0^R \rho^2\delta(\rho)\,d\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{(x_P-x_{P^*},\ y_P-y_{P^*},\ z_P-z_{P^*})}{\overline{PP^*}^3}$$

massa di P

$$= +Gm\int_0^R \rho^2\delta(\rho)\,d\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{(\rho\cos\theta\cos\varphi,\ \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta-z^*)}{\left(\rho^2-2\rho z^*\sin\theta+(z^*)^2\right)^{3/2}}$$

Osservazione le componenti orizzontali della forza si annullano!

$$= +2\pi Gm\int_0^R \rho^2\delta(\rho)\,d\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\,\frac{(0,\ 0,\ \rho\sin\theta-z^*)}{\left(\rho^2-2\rho z^*\sin\theta+(z^*)^2\right)^{3/2}}$$

Ci concentriamo sul calcolo di

$$= +2\pi G\int_0^R \rho^2\delta(\rho)\,d\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\,\frac{\rho\sin\theta-z^*}{\left(\rho^2-2\rho z^*\sin\theta+(z^*)^2\right)^{3/2}}$$

poniamo $\eta = \rho\sin\vartheta - z^* \to d\eta = \rho\cos\vartheta\, d\vartheta$,

$$= +2\pi G \int_0^R \rho\sigma(\rho)\,d\rho \int_{-\rho-z^*}^{\rho-z^*} d\eta \, \frac{\eta}{\left(\rho^2 - 2z^*\eta - (z^*)^2\right)^{3/2}},$$

procediamo per parti, ponendo

$$f(\eta) = \eta, \quad g'(\eta) = \left(\rho^2 - 2z^*\eta - (z^*)^2\right)^{-3/2}$$

$$\Rightarrow g(\eta) = \frac{1/z^*}{\sqrt{\rho^2 - 2z^*\eta - (z^*)^2}}, \text{ quindi,}$$

$$= +2\pi G \int_0^R \rho\sigma(\rho)\,d\rho \cdot \frac{1}{z^*}\frac{\eta}{\sqrt{\rho^2-2z^*\eta-(z^*)^2}}\Bigg|_{-\rho-z^*}^{\rho-z^*}$$

$$-2\pi G \int_0^R \frac{\rho\sigma(\rho)\,d\rho}{z^*} \int_{-\rho-z^*}^{\rho-z^*} \frac{d\eta}{\sqrt{\rho^2 - 2z^*\eta - (z^*)^2}} =$$

$$\frac{-\rho-z^*}{|\rho+z^*|} \qquad \frac{\rho-z^*}{|\rho-z^*|}$$

$$= 2\pi G \int_0^R \frac{\rho\sigma(\rho)\,d\rho}{z^*} \cdot \left(\frac{\rho - z^*}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho z^* + z^{*2}}} - \frac{-\rho - z^*}{\sqrt{\rho^2 + 2\rho z^* + (z^*)^2}} \right)$$

$$+2\pi G \int_0^R \frac{\rho\sigma(\rho)\,d\rho}{(z^*)^2} \sqrt{\rho^2 - 2z^*\eta - (z^*)^2}\,\Bigg|_{-\rho-z^*}^{\rho-z^*}$$

$$= 2\pi G \int_0^R \frac{\rho\sigma(\rho)\,d\rho}{z^*} \left(\overset{-1}{\frac{\cancel{\rho - z^*}}{\cancel{z^* - \rho}}} + \overset{1}{\frac{\cancel{\rho + z^*}}{\cancel{\rho + z^*}}} \right)$$

$$+2\pi G \int_0^R \frac{\rho\sigma(\rho)\,d\rho}{(z^*)^2} \cdot \left(\sqrt{\rho^2 - 2\rho z^* + (z^*)^2} - \sqrt{\rho^2 + 2\rho z^* + (z^*)^2} \right)$$

$$= 2\pi G \int_0^R \frac{\rho\,\delta(\rho)\,d\rho}{(z^*)^2}\left[\cancel{z^*} - \rho - (\rho + \cancel{z^*})\right]$$

$$= -\frac{4\pi G}{(z^*)^2}\int_0^R \rho^2 \delta(\rho)\,d\rho \, .$$

Concludendo, la forza che agisce su P^* è $\underline{F} = \left(0, 0, -\frac{G 4\pi m}{(z^*)^2}\int_0^R \rho^2\delta(\rho)\,d\rho\right)$

Riassunto del risultato finale alla pagina seguente

$$= \left(0, 0, -\frac{G M m}{(z^*)^2}\right)$$

dove $M = 4\pi \int_0^R \rho^2 \delta(\rho)\,d\rho$ è la massa totale della sfera (che ha al suo interno materia distribuita con densità sferica di legge $\delta = \delta(\rho)$).

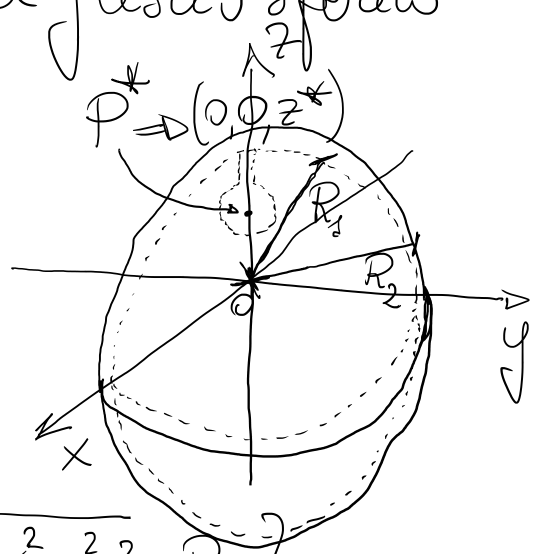
Infatti il volume del guscio sferico compreso tra le distanze ρ e $\rho + d\rho$ è uguale a $S'(\rho)\,d\rho = 4\pi\rho^2\,d\rho$

superficie della sfera di raggio ρ

↳ Abbiamo quindi ottenuto che la forza esercitata sul punto P^* è esattamente uguale a quella che avremmo se tutta la massa M (massa del corpo sferico) fosse concentrata nel centro della sfera stessa.

Verso la dimostrazione del teorema "del guscio sferico"

Consideriamo ora il problema del campo di forze esercitato da un guscio sferico



$$G_{R_1,R_2} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R_2\right\}$$

in un punto P^* (di coord. $(0,0,z^*)$) che sta al suo interno, cioè $z^* < R_1$.

Assumendo che la distribuzione di massa sia a simmetria sferica e sia ancora descritta da una funzione densità $\delta(r)$, possiamo ripetere una buona parte dei passaggi svolti in precedenza, in modo da ottenere quanto segue:

$\underline{F} = (0, 0, F_z)$, dove

$$F_z = 2\pi G \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho\sigma(\rho)d\rho}{z^*}\left(\frac{\rho - z^*}{|\rho - z^*|} + \frac{\rho + z^*}{|\rho + z^*|}\right)$$

$$+ 2\pi G \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho\sigma(\rho)d\rho}{(z^*)^2}\left(\underbrace{|\rho - z^*|}_{\rho - z^*} - \underbrace{|\rho + z^*|}_{\rho + z^*}\right) =$$

$$= 2\pi G \int_{R_1}^{R_2} 2 \cdot \frac{\rho\sigma(\rho)d\rho}{z^*} + 2\pi G \int_{R_1}^{R_2} -2\cancel{z^*}\frac{\rho\sigma(\rho)d\rho}{(z^*)^{\cancel{2}}} =$$

$$= 0 \implies \underline{F} = (0, 0, 0)$$

Teorema (del guscio sferico): <u>La forza gravitazionale</u> esercitata da un guscio sferico $\mathcal{G}_{R_1, R_2}$ (con distribuzione di massa a simmetria sferica al suo interno) su di un punto materiale di massa m posto a distanza d dal centro del guscio sferico è

(1) <u>nulla</u>, se $d \leq R_1$;

(2) uguale a quella che si avrebbe se la massa del guscio sferico fosse tutta concentrata nel suo centro, quando $d \geq R_2$.

Corollario (del teorema del guscio sferico): si consideri una sfera di raggio R con centro in O e densità di materia $\delta(r)$ e un punto materiale P di massa m, allora la forza di gravità esercitata sul punto P è

$$\underline{F} = \frac{4\pi G}{\overline{OP}^2}\left[\int_0^{\overline{OP}} d\rho\, \rho^2 \delta(\rho)\right] \frac{\overrightarrow{OP}}{\overline{OP}},$$

quando $\overline{OP} \leq R$,

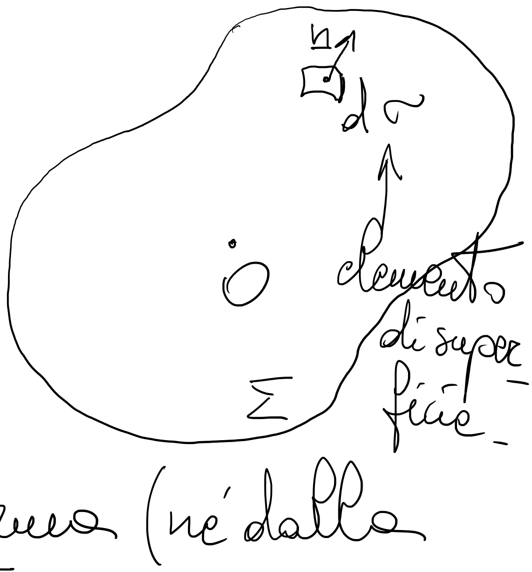
invece è $\underline{F} = -\frac{GMm}{\overline{OP}^2} \cdot \frac{\overrightarrow{OP}}{\overline{OP}}$ quando $\overline{OP} \geq R$,

dove M = massa totale della sfera.

Il risultato precedente si dimostra anche applicando il seguente enunciato.

Teorema (del flusso di Gauss): Sia $\underline{F}$ un campo di forze del tipo $\underline{F} = \frac{C}{r^2}\underline{e}_r$, $\underline{e}_r = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overline{OP}}$, dove $r = \overline{OP}$, O origine, $P \in \mathbb{R}^3$, C costante, allora il flusso del campo attraverso una superficie Σ che racchiude O al suo interno è

$$\int_\Sigma \underline{F} \cdot \underline{n}\, d\sigma = 4\pi C$$

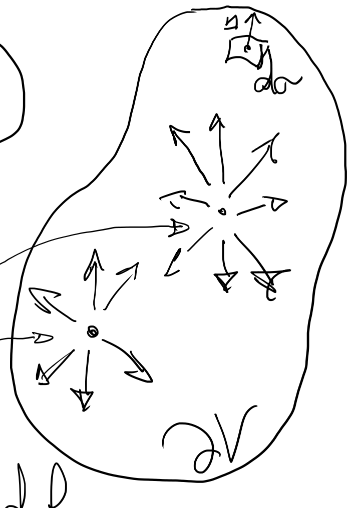


Osservazione: il flusso non dipende dalla forma (né dalla superficie totale) di Σ, basta che O sia racchiuso da Σ, altrimenti il flusso è nullo.

Teorema (della divergenza): sia $\underline{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale almeno $C^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\forall$ volume V delimitato da una superficie ∂V liscia (cioè rappresentabile da carte locali $C^1(A_j)$, dove A_j è una collezione di aperti in $\mathbb{R}^{n-1}$), vale l'uguaglianza

$$\int_V \mathrm{div}\,\underline{F}\; dV = \int_{\partial V} \underline{F}\cdot\underline{n}\; d\sigma,$$

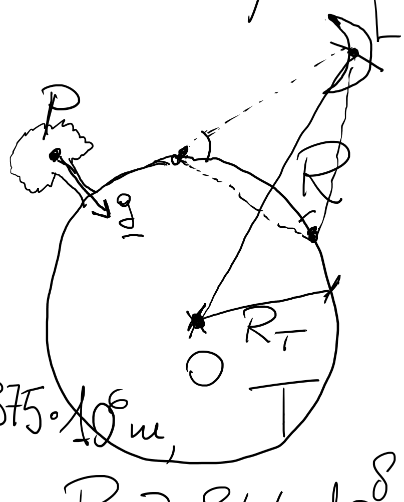
dove $\mathrm{div}\,\underline{F} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$



sorgenti della divergenza del campo.

Osservazione: per un campo di forze gravitazionali (elettrostatiche), la divergenza è data dalla densità di massa (di carica), moltiplicata per un opportuno costante!

Problema (della mela di Newton): Si calcoli l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, sapendo che il raggio terrestre $R_T = 6.375\cdot10^6\,m$, l'orbita della luna è di raggio $R = 3.844\cdot10^8\,m$, il periodo della luna è $T = 2.3605\cdot10^6\,s$.



La forza di gravità che agisce su di un corpo p.tiforme di massa m in prossimità della superficie terrestre è

$$\underline{F}_{TP} = -\frac{G M_T m}{R_T^2} \frac{\overrightarrow{OP}}{\overline{OP}} = -mg \frac{\overrightarrow{OP}}{\overline{OP}} \Rightarrow g = \frac{G M_T}{R_T^2}$$

massa della terra

La forza esercitata dalla Terra sulla Luna $\underline{F}_{TL} = -\frac{G M_T M_L}{R^2} \frac{\overrightarrow{OL}}{\overline{OL}}$

Vale la III legge di Keplero (modificata), cioè $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_T + M_L)}{4\pi^2}$ (consideriamo trascurabile la massa della Luna)

$$\Rightarrow \frac{R^3}{T^2} \simeq \frac{G M_T}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow G M_T \simeq R^3 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow g \simeq \frac{R^3}{R_T^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{(3.844 \cdot \cancel{10^8})^3}{(6.375 \cdot \cancel{10^6})^2} \frac{4\pi^2}{(2.3605 \cdot \cancel{10^6})^2}$$

$$\simeq 9.9 \; m/s^2$$

(in accordo con gli esperimenti!!)

Problema (dell'ascensore gravitazionale).

Modello: Terra sferica con $\delta = \delta(r) = \text{costante}$

$\Rightarrow$ La forza agente sull'ascensore A di massa m è (per il teorema del guscio sferico):

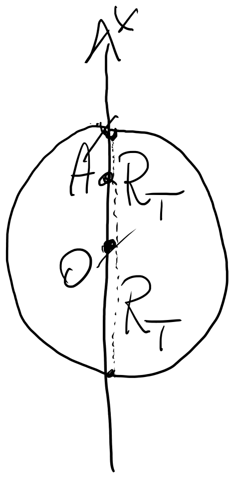
$$\underline{F} = -\frac{4\pi G}{\overline{OA}^2}\, m \int_0^{\overline{OA}} d\rho\, \rho^2 \delta \; \frac{\overrightarrow{OA}}{\overline{OA}}$$

centro della terra

$$= -\frac{4\pi G m \delta}{\overline{OA}^2} \int_0^{\overline{OA}} d\rho\, \rho^2 \; \frac{\overrightarrow{OA}}{\overline{OA}}$$

$$= -\frac{4\pi}{3} G m \delta \cdot \cancel{\frac{\overline{OA}^3}{\overline{OA}^2}} \; \cancel{\frac{\overrightarrow{OA}}{\overline{OA}}}$$

$$= -\frac{4\pi}{3} G m \delta \; \overrightarrow{OA}$$



$$\Rightarrow \boxed{\cancel{m}\ddot{x} = -\frac{4\pi}{3} G \cancel{m} \delta\, x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \,, \quad \text{dove } \omega^2 = \frac{4\pi G \delta}{3}$$

$$\Rightarrow g = \omega^2 R_T \qquad \tau = \frac{T}{2} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}\omega} = \pi\sqrt{\frac{R_T}{g}}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}} \qquad \simeq 2532\,\mathrm{s} \simeq 42\,\mathrm{min}$$