Problema inverso di Keplero – deduzione della legge di gravitazione universale

Enunciato del problema inverso.

Si assumono i tre principi fondamentali della dinamica e le tre leggi di Keplero, si vuole determinare un'espressione della forza che il Sole esercita sui pianeti.

- I principio della dinamica

  un corpo non soggetto a forze esterne si muove di velocità uniforme

- II principio della dinamica

  $$m\ddot{\underline{x}} = \underline{F} \quad \text{dove } \underline{x} \in \mathbb{R}^3.$$

- III principio della dinamica

  a ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria

— o —

I Legge di Keplero:
un pianeta si muove su un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei 2 fuochi.

II Legge di Keplero:
il raggio vettore che congiunge il Sole con un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

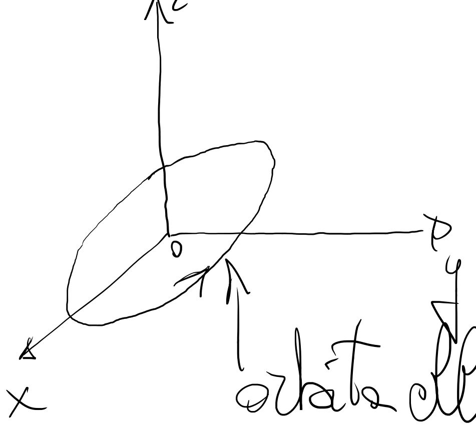
III Legge di Keplero:
il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore e il quadrato del periodo di rivoluzione **non** dipende dal pianeta.

— o —

$\exists\, \underline{F}$ t.c. $m\underline{\ddot{x}} = \underline{F}$ ← forza che agisce sul pianeta

m: massa del pianeta

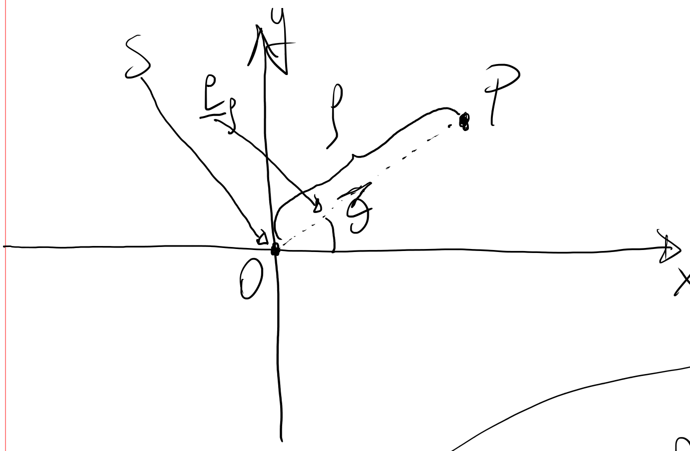
$\underline{x}$ coordinate eliocentriche del pianeta



orbita ellittica $\in Oxy$

$\Rightarrow z$ (dove $\underline{x} = (x, y, z)$) è t.c. $z(t) = 0$

$\Rightarrow \ddot{z} = 0 \Rightarrow F_z = 0$.



Introduciamo le coord. polari (ρ,ϑ) t.c. $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \end{cases}$

$\Rightarrow \rho=\sqrt{x^2+y^2}$, ϑ t.c. $\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

trasformazione di coordinate è biunivoca per $(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{T} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ni(x,y)$

Introduciamo i versori radiale $\underline{e}_\rho$ e angolare (o tangenziale) $\underline{e}_\vartheta$ definiti come segue: $\underline{e}_\rho := (\cos\vartheta,\sin\vartheta) \Rightarrow \underline{x}=\rho\,\underline{e}_\rho$,

$\underline{e}_\vartheta = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\underline{e}_\rho = (-\sin\vartheta,\cos\vartheta) \Rightarrow \underline{e}_\rho\cdot\underline{e}_\vartheta=0,\ \|\underline{e}_\vartheta\|=\|\underline{e}_\rho\|=1.$

$\underline{e}_\rho,\underline{e}_\vartheta$ formano una base ortonormale in Oxy

$m\ddot{\underline{x}} =$ in coord. polari?

$$\underline{x}=\rho\,\underline{e}_\rho \Rightarrow \boxed{\dot{\underline{x}} = \dot\rho\,\underline{e}_\rho + \rho\frac{\partial\underline{e}_\rho}{\partial\vartheta}\dot\vartheta = \dot\rho\,\underline{e}_\rho + \rho\dot\vartheta\,\underline{e}_\vartheta}$$

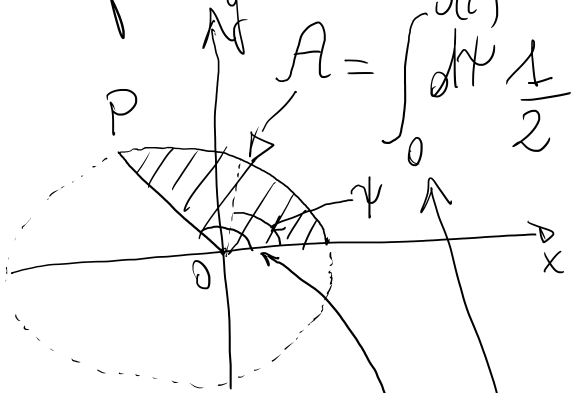
$$\ddot{\underline{x}} = \frac{d^2}{dt^2}(\rho\,\underline{e}_\rho) = \ddot\rho\,\underline{e}_\rho + \dot\rho\dot\vartheta\,\underline{e}_\vartheta + \dot\rho\dot\vartheta\,\underline{e}_\vartheta + \rho\ddot\vartheta\,\underline{e}_\vartheta - \rho\dot\vartheta^2\,\underline{e}_\rho$$

$$= (\ddot\rho - \rho\dot\vartheta^2)\,\underline{e}_\rho + (2\dot\rho\dot\vartheta + \rho\ddot\vartheta)\,\underline{e}_\vartheta =$$

$$= (\ddot\rho - \rho\dot\vartheta^2)\,\underline{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\vartheta)\,\underline{e}_\vartheta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2\right) = F_\rho := \underline{F} \cdot \underline{e}_\rho \\ \dfrac{m}{\rho}\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\vartheta}\right) = F_\vartheta := \underline{F} \cdot \underline{e}_\vartheta \end{cases}$$

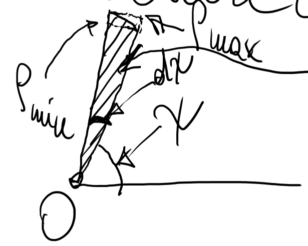
Riformuliamo con II legge di Keplero



$$A = \int_0^{\vartheta(t)} d\psi \, \frac{1}{2} \rho^2(\psi)$$

definizione di area spazzata

Osserviamo che l'areola (o il diff. dell'area spazzata) è approssimabile con un settore circolare



$$dA = \frac{\rho^2}{2} d\psi + o(d\psi)$$

Velocità areolare $\frac{d}{dt}A = \dot{A} = \frac{dA}{d\vartheta} \cdot \dot{\vartheta} = \frac{1}{2}\rho^2 \dot{\vartheta} = c$

costante per II legge di Keplero!

$$\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(2c) = 0 = F_\vartheta$$

La componente tangenziale della forza $F_\vartheta = 0$

$\Rightarrow \underline{F} = F_\rho \underline{e}_\rho$ forza puramente radiale

$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2) = F_\rho$ eq. di Newton proiettata sulla componente radiale

$\underline{a_\rho := \ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2}$

$\underline{a_B := -\frac{4c^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right)}$ ← accelerazione di Binet

Osserviamo che $\frac{1}{2}\rho^2\dot{\vartheta} = c \neq 0 \Rightarrow \rho \neq 0$

$\Rightarrow \dot{\vartheta} = \frac{2c}{\rho^2} \neq 0 \Rightarrow t \mapsto \vartheta(t)$ è monotona

$\Rightarrow$ è invertibile $\Rightarrow t = t(\vartheta)$

Determiniamo $\dot{\rho}$ in termini "geometrici"

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dt} = \underbrace{\frac{2c}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\vartheta}} = \underbrace{-2c\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{\rho}\right)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\vartheta}\cdot\dot{\vartheta} = \frac{2c}{\rho^2}\cdot\left(-2c\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = -\frac{4c^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

facciamo altrettanto con $\rho\dot{\vartheta}^2 = \rho\frac{4c^2}{\rho^4} = \frac{4c^2}{\rho^3}$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2 = -\frac{4c^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right) = a_B$$

Riscriviamo tutta l'eq. dinamica in termini geometrici: $\boxed{-m\frac{4c^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right) = F_\rho}$

— o —

Inciso (da verificare, vedi la fine di questi appunti): conica in coord. polari

$$\rho = \frac{P}{1 + e\cos\vartheta}$$, con P = parametro della conica

e ← eccentricità

con l'origine in uno dei 2 fuochi

Se $e=0 \Rightarrow$ è l'eq. di una circonferenza
" $0<e<1 \Rightarrow$ " " " un'ellisse
" $e=1 \Rightarrow$ " " " una parabola
" $e>1 \Rightarrow$ " " " un ramo di iperbole

Inoltre, vale l'uguaglianza

$$P = \frac{b^2}{a}$$ dove b = semiasse minore, a = " maggiore

---

Per la I legge di Keplero abbiamo che $$\frac{1}{\rho} = \underbrace{\frac{1+e\cos\vartheta}{P}}$$ con $e \in (0,1)$

$$F_\rho = -\frac{4c^2 m}{\rho^2} \cdot \left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\cancel{\frac{1+e\cos\vartheta}{P}}\right) + \frac{1+\cancel{e\cos\vartheta}}{P}\right]$$

$$= - m\frac{4c^2}{P} \cdot \frac{1}{\rho^2} \Rightarrow \underline{F} = -\frac{m4c^2}{P} \cdot \frac{1}{\rho^2} \underline{e}_\rho$$

!!

$\Rightarrow$ la forza è attrattiva ed è inversamente proporzionale alla distanza al quadrato

$$\frac{F_\rho}{m} = \frac{4c^2}{P} \cdot \frac{1}{\rho^2}$$ Riformuliamola usando la III legge di Keplero.

Siccome c è costante, allora

$$c = \frac{\text{area dell'ellisse}}{\text{periodo di rivoluzione}} = \frac{\pi ab}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{4c^2}{P} = \frac{4\pi^2 a^2 \cancel{b^2}}{T^2 \, \cancel{b^2}/a} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} =: \Gamma$$

costante dipende solo dal sole.

$$\underline{F} = -\frac{\Gamma m}{\rho^2} \underline{e}_\rho$$ (forza esercitata dal sole sul pianeta)

$$-\underline{F} = +\frac{\gamma M}{\rho^2} \underline{e}_\rho$$ (forza esercitata dal pianeta sul sole)

massa del sole

Γ, γ, m, M t.c.

$$\Gamma m = \gamma M \Rightarrow \Gamma m = \gamma M = G m M$$

non dipende dal pianeta o dal sole

Legge di gravitazione universale

2 corpi P_1 e P_2, di massa m_1 e m_2, si attraggono con forze

$$F_{12} = -F_{21} = -f \cdot \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overline{P_1P_2}},$$

F_{12}: forza esercitata da P_1 su P_2

F_{21}: forza esercitata da P_2 su P_1

$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overline{P_1P_2}}$: versore associato alla direzione da P_1 a P_2

dove $f = G \frac{m_1 m_2}{\overline{P_1P_2}^2}$,

cioè $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{\overline{P_1P_2}^3} \overrightarrow{P_1P_2}$.

e, ovviamente, $\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{\overline{P_1P_2}^3} \overrightarrow{P_2P_1}$.

Ellissi

Coniche in coordinate polari (ci limitiamo a $e \in (0,1)$)

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta} \quad \text{con } e \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \rho + \underbrace{e\rho\cos\vartheta} = p$$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = \rho\cos\vartheta$,

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = p - ex$ C. E.: $\boxed{p \geq ex}$

$\Rightarrow x^2+y^2 = p^2 - 2epx + e^2x^2$

$\Rightarrow \underbrace{x^2 + 2epx - e^2x^2}_{(1-e^2)x^2+2epx} + y^2 = p^2$

$$(1-e^2)x^2 + 2epx = \left(\sqrt{1-e^2}\,x + \frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2 - \frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1-e^2}\,x + \frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2 + y^2 = \left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\right)p^2$$

$\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\right) = \frac{1}{1-e^2}$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{1-e^2}\,x + \frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1$$

$$\frac{\left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1$$

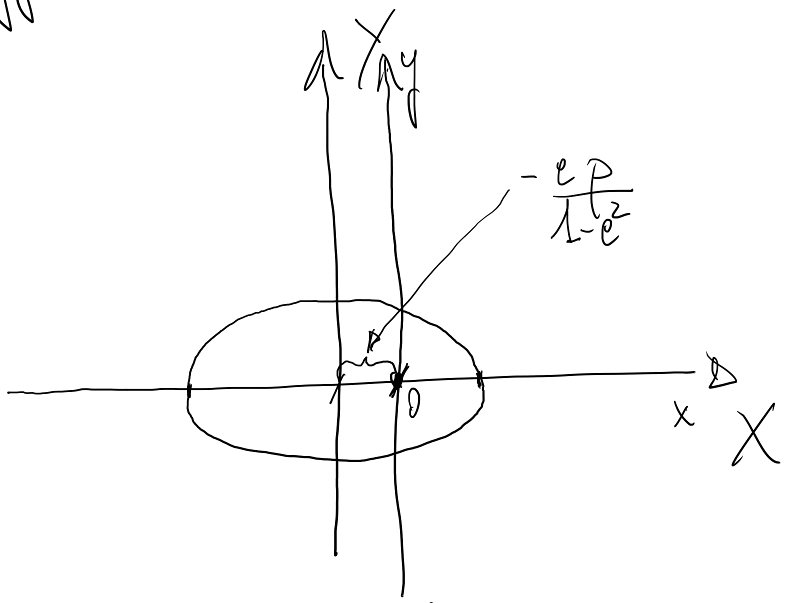
Ponendo $X = x + \frac{ep}{1-e^2}$, $Y = y$

Abbiamo $\frac{X^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1$, cioè un'ellisse (in coordinate (X,Y)) di semiassi $a = \frac{p}{1-e^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

$$\underbrace{a}_{\text{semiasse maggiore}} = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}} > \underbrace{b}_{\text{semiasse minore}}, \quad \text{perché } 1-e^2 < 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-e^2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} > 1$$



In coord. (X,Y) i fuochi sono localizzati in $\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$, $\left(+\sqrt{a^2-b^2},0\right)$

$$\Rightarrow \left(-\left(\frac{p^2}{(1-e^2)^2}-\frac{p^2}{1-e^2}\right)^{1/2},0\right), \left(\sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}\cdot\left(\cancel{1}-(\cancel{1}-e^2)\right)},0\right)$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{ep}{1-e^2},0\right), \left(\frac{ep}{1-e^2},0\right) \text{ in } (X,Y)$$

quindi in coord. (x,y), i due fuochi sono

$$\left(-\frac{2ep}{1-e^2},0\right), \left(\frac{e\cancel{p}}{\cancel{1-e^2}}-\frac{e\cancel{p}}{\cancel{1-e^2}},0\right)=(0,0)$$

Consideriamo il rapporto

$$\frac{b^2}{a} = \frac{\left(p/\sqrt{1-e^2}\right)^2}{\frac{p}{1-e^2}} = \frac{\frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{1-e^2}}}{\frac{\cancel{p}}{\cancel{1-e^2}}} = p$$

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

Dobbiamo verificare che la condizione di esistenza delle soluzioni, cioè $p \geq ex$, è soddisfatta $\forall x \in \left[-a - \frac{ep}{1-e^2}, a - \frac{ep}{1-e^2}\right]$

$$\Rightarrow ex \leq e\left(\frac{p}{1-e^2} - \frac{ep}{1-e^2}\right) = \frac{ep}{1-e^2}(1-e)$$

$$= \frac{ep}{\cancel{(1-e)}(1+e)} \cdot \cancel{(1-e)} = \frac{e}{1+e} \cdot p$$

$$= \underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{1}{1+e}}_{<1}\right)}_{<1} \cdot p < p$$

$\Rightarrow ex < p$ verifica completata.