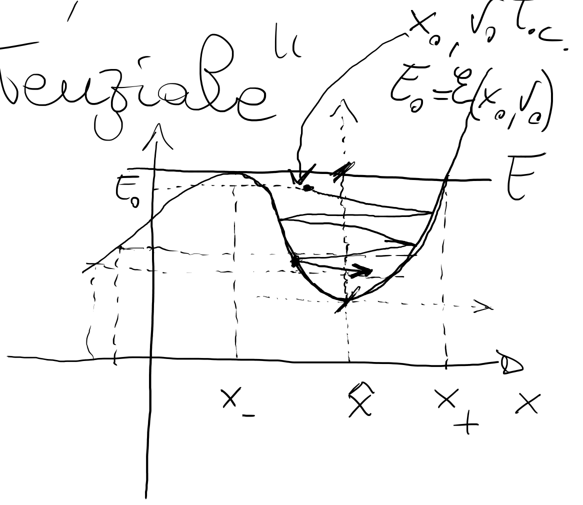
- Moti dissipativi

Convergenza asintotica verso il p.to di minimo, in una "buca del potenziale"



$$m\ddot{x} = F(x) - \lambda \dot{x}$$

$\Updownarrow$ termine dissipativo

$$m\ddot{x} = -U'(x) - \lambda \dot{x}$$

Proposizione: si consideri un sistema meccanico descritto dall'equazione dinamica $m\ddot{x} = -U'(x) - \lambda\dot{x}$ e dalle condizioni iniziali (x_0, v_0) t.c. $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(x_0)$ è inferiore al livello di energia E che "racchiude una buca di potenziale", cioè $\exists\, x_\pm$ (barriere di potenziale) che soddisfano le ipotesi seguenti:

$$U(x_\pm) = E, \quad \hat{x}, x_0 \in (x_-, x_+), \quad U \in C^1((x_-, x_+)),$$

$$U'(x) < 0 \ \forall x \in (x_-, \hat{x}), \quad U'(x) > 0 \ \forall x \in (\hat{x}, x_+)$$

($\Rightarrow \hat{x}$ è p.to di minimo, $U'(\hat{x}) = 0$), allora

$$\lim_{t \to +\infty} x(t; x_0, v_0) = \hat{x},$$

cioè $\hat{x}$ è un p.to di equilibrio asintoticamente stabile.

Dim. Sia $W(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) - U(\hat{x})$, allora

$$\dot{W}(x, \dot{x}) = m\dot{x}\ddot{x} + U'(x)\cdot\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + U'(x)) = -\lambda \dot{x}^2 \leq 0$$

Osserviamo che $(\hat{x}, 0)$ è un p.to di minimo relativo stretto del potenziale, quindi W è funzione di

Lyapunov, quindi $(\hat{x},0)$ è p.to di equilibrio stabile.

Procediamo, inizialmente, come per la dimostrazione che $\hat{x}$ è asintoticamente stabile, quando $\dot{W}<0$.

Osserviamo che, siccome $W(x(t),\dot{x}(t))$ è monotona non crescente, allora $\exists\, l$ t.c. $\lim_{t\to+\infty} W(x(t;x_0,v_0),\dot{x}(t;x_0,v_0))=l$.

Supponiamo, <u>per assurdo</u>, che $l>0$. $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, T_\varepsilon$ t.c. $\forall t>T_\varepsilon$, $W(t)\in[l,l+\varepsilon)$. Introduciamo $F=W^{-1}([l,l+\varepsilon])\cap [x_-,x_+]\times[-v_{max},v_{max}]$, con $v_{max}=\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(\hat{x}))}$. Per definizione F è un insieme <u>compatto</u>. Si noti che $(\hat{x},0)\notin F$.

Poniamo $L=\min_F\{|U'(x)|+|\lambda\dot{x}|\}>0$ (vedi sotto)

Si osservi che $|U'(\hat{x})|+|\lambda\cdot 0|=0$ e $\forall (x,\dot{x})\in [x_-,x_+]\times[-v_{max},v_{max}]\setminus\{(\hat{x},0)\}\Rightarrow |U'(x)|+|\lambda\dot{x}|>0$

$\exists$ p.to di minimo in F di $|U'(x)|+|\lambda\dot{x}|$ $\Rightarrow$ <u>$L>0$</u>.

Poniamo $M=\max_F\{|U'(x)|,|\lambda\dot{x}|\}$

Lemma 1: Sia $t^* > T_\varepsilon$ tale che

$$\underline{|\lambda \dot{x}| \geq \frac{L}{4}}, \text{ allora}$$

la "potenza istantaneamente dissipata" è minorata come segue $\underline{|\dot{W}(t)| \geq L^2/(32\cdot\lambda)}$

$$\forall t \in \left[t^*, t^* + \underline{\frac{m L^2}{128\cdot\lambda M^2}}\right].$$

Dim. (del Lemma): siccome $\ddot{x} = -\frac{1}{m}\left(U'(x) + \lambda\dot{x}\right)$, allora $\forall t > t^* \ \exists \ \bar{t} \in (t^*, t)$ t.c.

$$\underline{\left|\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(t^*)\right|} = \left|2\dot{x}(\bar{t})\,\ddot{x}(\bar{t})\cdot(t - t^*)\right| \quad |t-t^*|$$

$$\leq \frac{2}{m}\left|\dot{x}(\bar{t})\right|\cdot\left[\left|U'(x(\bar{t}))\right| + \left|\lambda\dot{x}(\bar{t})\right|\right]$$

$$\leq \frac{4M^2}{m\lambda}|t - t^*|$$

Scriviamo la disuguaglianza triangolare per $\underline{|\dot{x}^2(t)|}$

$$|\dot{x}^2(t)| = \left|\dot{x}^2(t^*) + \left(\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(t^*)\right)\right|$$

$$\geq \left|\,|\dot{x}^2(t^*)| - \underline{|\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(t^*)|}\,\right|$$

$$\geq \underbrace{|\dot{x}^2(t^*)| - \frac{4M^2}{m\lambda}|t - t^*|}\,,$$

purché $\underline{\frac{4M^2}{m\lambda}|t - t^*| \leq |\dot{x}^2(t^*)|}$; siccome sappiamo che $|\dot{x}^2(t^*)| \geq \frac{L^2}{16\cdot\lambda^2}$, allora imponiamo che

$$\frac{4M^2}{m\lambda}|t - t^*| \leq \frac{L^2}{32\cdot\lambda^2},$$

ne segue che $t - t^* \leq \underline{\frac{mL^2}{128\cdot\lambda M^2}}$ e allora è verificata

$$\Rightarrow \dot{x}^2(t) \geq \frac{L^2}{16\cdot\lambda^2} - \frac{4M^2}{m\lambda}\,\frac{mL^2}{128\cdot\lambda M^2} = \underline{\underline{\frac{L^2}{32\cdot\lambda^2}}}$$

Allora $\forall\, t \in \left[t^*, t^* + \frac{mL^2}{128\cdot\lambda M^2}\right]$, abbiamo che

$$\left|\dot W(t;(x_0,v_0))\right| = \left|\lambda \dot x^2(t;x_0,v_0)\right| \geq \frac{L^2}{32\cdot\lambda}.$$

C.V.D. (per il Lemma).

Corollario (del Lemma precedente): Se $t^* > T_\varepsilon$ è t.c. $|\lambda \dot x| \geq \frac{L}{4}$, allora l'energia dissipata nell'intervallo $\left[t^*, t^* + \frac{m}{128\cdot\lambda}\frac{L^2}{M^2}\right]$ è almeno

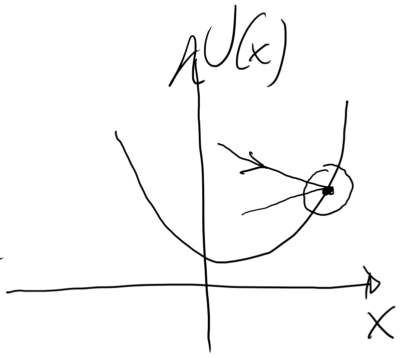
$$\delta = \frac{m}{2^{11}\lambda^2}\frac{L^4}{M^2}$$

Dim.: $$W(t^*) - W\Big(\underbrace{t^* + \frac{m}{128\cdot\lambda}\frac{L^2}{M^2}}\Big) = -\int_{t^*}^{t^* + \frac{m}{128\lambda}\frac{L^2}{M^2}} \dot W\, dt =$$

$$= \lambda\int_{t^*} \dot x^2\, dt \geq \lambda\frac{L^2}{16\lambda^2}\cdot\frac{m}{128\cdot\lambda}\frac{L^2}{M^2} = \delta$$

C.V.D. (corollario)

Dobbiamo concentrarci sulle barriere di potenziale



Lemma 2: Sia $t^* > T_\varepsilon$, t.c. $|\dot x(t^*)| < \frac{L}{4\lambda}$, allora $\exists\, \bar t \in \left(t^*, t^* + \frac{m}{\lambda}\right]$ t.c.

$$|\dot x(\bar t)| \geq \frac{L}{4\lambda}$$

Dim (del Lemma 2). Supponiamo per assurdo che

$$\forall t \in \left[t^*, t^* + \frac{m}{\lambda}\right] \quad \text{sia} \quad |\dot{x}(t)| < \frac{L}{4\lambda},$$

allora $|\ddot{x}(t)| = \left| -\frac{1}{m}\left(U' + \lambda \dot{x}\right)\right|$, siccome

$$|U'(x(t))| + |\lambda \dot{x}(t)| \geq L \Rightarrow |U'(x(t))| \geq L - \frac{L}{4} \geq \frac{3L}{4},$$

$$\Rightarrow |\ddot{x}(t)| = \frac{1}{m}|U' + \lambda \dot{x}| \geq \frac{1}{m}\left(\frac{3}{4}L - \cancel{\lambda}\cdot\frac{L}{4\cancel{\lambda}}\right) \geq \frac{L}{2m}.$$

$$\Rightarrow \forall t \in \left[t^*, t^* + \frac{m}{\lambda}\right] \quad \text{o} \quad \ddot{x}(t) \leq -\frac{L}{2m}$$

oppure $\ddot{x}(t) \geq \frac{L}{2m}$.

Per Lagrange $\exists\, \tau \in (t^*, t)$ t.c.

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t^*) = \ddot{x}(\tau)\cdot(t - t^*)$$

Applicando la disuguaglianza triangolare

$$|\dot{x}(t)| \geq |\ddot{x}(\tau)|\cdot(t - t^*) - |\dot{x}(t^*)|$$

$$\geq \frac{L}{2m}\cdot(t - t^*) - \frac{L}{4\lambda}$$

quando $t - t^* = \frac{m}{\lambda}$, si ha che

$$|\dot{x}(t)| \geq \frac{L}{2\cancel{m}}\cdot\frac{\cancel{m}}{\lambda} - \frac{L}{4\lambda} = \frac{L}{4\lambda}, \text{ assurdo!}$$

C.V.D. (per il Lemma 2)

— ∘ —

Usando i lemmi 1 e 2, possiamo affermare che dopo T_ε (cioè si è F) basta aspettare al massimo $\underbrace{\left(\frac{m}{\lambda}+\frac{m}{128\cdot\lambda}\frac{L^2}{\pi^2}\right)}_{=T}$

per ottenere che $|\dot{x}| \geq \frac{L}{4\lambda}$ e, quindi, per dissipare una quantità di energia che è almeno $\delta = \frac{1}{2^{11}}\frac{m}{\lambda^2}\frac{L^4}{\pi^2} > 0$.

Ne segue che ogni intervallo di tempo T si dissipa almeno δ, quindi definiamo $N = \left\lfloor \frac{\varepsilon}{\delta} \right\rfloor + 1$ (quindi siamo sicuri che $N \cdot \delta \geq \varepsilon$),

arrotondamento per difetto a un intero

allora $W(T_\varepsilon + (N+1)T) \leq \underbrace{W(T_\varepsilon)} - N\delta - \delta$
$\leq \ell + \cancel{\varepsilon} - \cancel{\varepsilon} - \delta < \ell$

assurdo, poiché sappiamo che $\forall t > T_\varepsilon,\ W(t) \in [\ell, \ell+\varepsilon)$.

Ne segue che $\ell = 0$.

$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} x(t; x_0, v_0) = \hat{x}$. C.V.D. (per quanto riguarda la proposizione).

Estensioni del risultato riguardante la buca di potenziale con forza dissipativa

Teorema (primo di Lyapunov, in forma indebolita riguardo alla stabilità asintotica): Sia $W: A \to \mathbb{R}$ una funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ (con $\underline{f} \in C^1(A)$), cioè W è t.c.

$\hat{x}$ è p.to di eq. stabile

- $W \in C^1(A)$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto)
- $\dot{W} = \text{grad}\, W(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x}) \leq 0$ su tutto A,
- $\exists\, \hat{\underline{x}} \in A$ t.c. $W(x) > W(\hat{x})$ $\forall x \in A \setminus \{\hat{x}\}$

Inoltre, sia U l'insieme di $\underline{x}$ t.c. $0 = \dot{W} = \text{grad}\, W(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x})$,

se U non contiene alcuna orbita completa eccezione fatta per $\{\hat{\underline{x}}\}$, allora $\hat{x}$ è p.to di equilibrio asintoticamente stabile, cioè $\exists\, B \subseteq A$, aperto, t.c. $\hat{\underline{x}} \in B$ e $\forall\, \underline{x}_0 \in B$

$$\lim_{t \to +\infty} \underline{x}(t; \underline{x}_0) = \hat{\underline{x}}.$$

L'enunciato precedente si applica al problema trattato all'inizio delle note, poiché

$$W = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) - U(\hat{x})$$

$$\Rightarrow \dot{W} = -\lambda \dot{x}^2 \Rightarrow \dot{W} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0$$

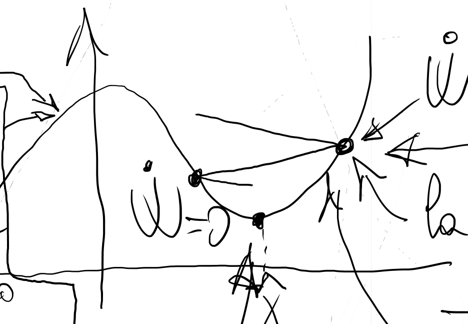
(vedi pag. 8 per un grafico che spiega la situazione)

Teorema (secondo di Lyapunov): Si consideri un sistema del tipo $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, sia $\hat{\underline{x}}$ un p.to stazionario (cioè $\underline{f}(\hat{\underline{x}}) = 0$), se la linearizzazione del sistema nei pressi di $\hat{\underline{x}}$, cioè

$$\dot{\underline{x}} = A(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) + \underline{R}(\underline{x}), \quad \text{con } A \text{ matr. } n \times n \text{ e } \|\underline{R}\| = o(\|\underline{x} - \hat{\underline{x}}\|),$$

è t.c. gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa, allora $\hat{\underline{x}}$ è un p.to di equilibrio asintoticamente stabile.

A commento della relazione tra il primo Th. di Lyapunov "in forma indebolita" per la stabilità asintotica e il problema 1-D della buca di potenziale con un termine dissipativo



$-\frac{dU}{dx} \neq 0$

la forza dissipativa $-\lambda\dot{x}=0$

$\Rightarrow F(x,v) = U' - \lambda\dot{x} \neq 0$

Non è una soluzione di equilibrio

sol. di quiete $x(t)=\hat{x}$, quindi $\dot{W}=-\lambda\dot{x}^2=0$