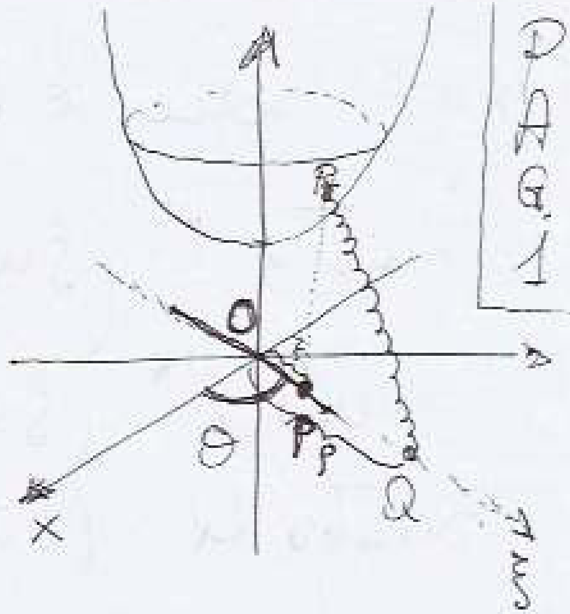
Compito scritto di FM1

Esame Gennaio 2018



Massa asta $= M$, lunghezza asta $= \ell$

massa P = massa $Q = m$.

$P, Q \in$ guida poggiata su asta

angolo guida, asse $x = \theta$

asta $\in$ piano Oxy, $P_* \in$ paraboloide di eq. $z = x^2 + y^2 + \ell$

$\overrightarrow{P_*P} \perp$ piano Oxy. Costante molla tra P_* e $Q = k$.

---

(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le eq. di Lagrange.

Adottiamo, come coordinate libere o lagrangiane,

$$\xi, \ \rho, \ \theta$$

dove θ è l'angolo indicato in figura, mentre ξ e ρ sono, rispettivamente, l'ascissa del punto P e quella del punto Q rispetto alla guida. Le coordinate rispetto al sistema inerziale

Oxyz sono le seguenti:

punto P: $(\xi\cos\vartheta, \xi\sin\vartheta, 0)$

punto P*: $(\xi\cos\vartheta, \xi\sin\vartheta, \xi^2+\ell)$

punto Q: $(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, 0)$.

La energia cinetica del sistema è data dalla somma dei contributi relativi ai tre oggetti che hanno massa, cioè l'asta e i punti P e Q, cioè

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P + \frac{1}{2} m \underline{v}_Q \cdot \underline{v}_Q ,$$

dove I è l'inerzia dell'asta, cioè

$$I = \frac{1}{12} M \ell^2 ,$$

mentre $\underline{v}_P$ e $\underline{v}_Q$ sono le velocità di P e Q.
Dopo aver ricordato la ben nota formula della velocità in coordinate polari (cioè $\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\vartheta}\,\underline{e}_\vartheta$), si ottiene che

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\rho}^2 + \xi^2\dot{\vartheta}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2\right) + \frac{1}{24} M \ell^2 \dot{\vartheta}^2 .$$

Passiamo ora al calcolo dell'energia potenziale

in funzione delle coordinate libere.
L'unica forza attiva in gioco è quella della molla; possiamo quindi cominciare a scrivere

$$U = \frac{1}{2} k \overline{P_* Q}^2$$

Siccome $\overline{P_* Q}^2 = (\xi - \rho)^2 \cos^2\theta + (\xi - \rho)^2 \sin^2\theta + (\xi + \ell)^2$,
otteniamo che

$$U = \frac{1}{2} k \left[(\xi - \rho)^2 + (\xi + \ell)^2 \right].$$

Si noti che non ci sono contributi dovuti all'energia potenziale di tipo gravitazionale, poiché gli oggetti che hanno massa (l'asta, i punti P e Q) sono vincolati a stare in un piano orizzontale e, quindi, si mantengono sempre alla stessa quota verticale z (=0, in questo caso).
La lagrangiana del sistema è quindi

$$L(\xi, \rho, \theta, \dot{\xi}, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\rho}^2) + \left[\frac{1}{2} m (\xi^2 + \rho^2) + \frac{1}{24} M \ell^2 \right] \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k \left[(\xi - \rho)^2 + (\xi + \ell)^2 \right]$$

Procediamo al calcolo delle eq. di Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\xi}-\dfrac{\partial L}{\partial \xi}=m\ddot\xi+k(\xi-\rho)+2k\xi(\xi^2+\ell)-m\dot\vartheta^2\xi=0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\rho}-\dfrac{\partial L}{\partial \rho}=m\ddot\rho+k(\rho-\xi)-m\dot\vartheta^2\rho=0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}-\dfrac{\partial L}{\partial \vartheta}=\dfrac{d}{dt}\left[m(\xi^2+\rho^2)\dot\vartheta+\dfrac{1}{12}M\ell^2\dot\vartheta\right]= \\ \qquad =\left[m(\xi^2+\rho^2)+\dfrac{1}{12}M\ell^2\right]\ddot\vartheta+2m(\xi\dot\xi+\rho\dot\rho)\dot\vartheta=0 \end{cases}$$

dove l'ultima eq. è stata scritta anche in una forma intermedia del tipo $\frac{d}{dt}p_\vartheta=0$, dalla quale si deduce immediatamente che

$$p_\vartheta=\left[m(\xi^2+\rho^2)+\frac{1}{12}M\ell^2\right]\dot\vartheta$$

è una costante del moto.

---

(2) Si consideri il sistema soggetto all'ulteriore vincolo tale per cui $\dot\vartheta=\Omega=\sqrt{\frac{k}{2m}}$.

Si determinino i punti di equilibrio rispetto ~~alla~~ al sistema di riferimento non-inerziale $O\xi z$ _ Se ne studi la stabilità al variare di ℓ.

Possiamo scrivere la lagrangiana del nuovo sistema ridotto e a 2 gradi di libertà, a partire da quella del problema a 3 gradi di libertà (descritto al punto (1)), imponendo che $\dot{\theta} = \Omega$, cioè sia la nuova lagrangiana $\mathcal{L}$ t.c. _

$$\mathcal{L}(\xi, \rho, \dot{\xi}, \dot{\rho}) = L(\xi, \rho, \theta, \dot{\xi}, \dot{\rho}, \dot{\theta} = \Omega) =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{\xi}^2 + \dot{\rho}^2\right) - \frac{1}{2}\left[k(\xi - \rho)^2 + (\xi + \ell)^2\right] + \frac{1}{2} m \Omega^2 \left(\xi^2 + \rho^2\right),$$

dove abbiamo omesso il termine additivo costante $\frac{1}{24} M\ell^2 \Omega^2$, perché non influenza la dinamica _

Possiamo riclassificare i termini cinetici e potenziali della nuova lagrangiana nel modo seguente.

Sia $\mathcal{L}(\xi,\rho,\dot{\xi},\dot{\rho}) = T(\dot{\xi},\dot{\rho}) - U(\xi,\rho)$,

dove la distinzione è fatta in modo t.c. tutti e soli i termini che dipendono (quadraticamente) dalle velocità generalizzate sono inclusi in T,

quindi
$$T(\dot{\xi},\dot{\rho}) = \frac{1}{2} m\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\rho}^2\right),$$

$$U(\xi,\rho) = \frac{1}{2} k\left[(\xi-\rho)^2 + (\xi^2+\ell)^2\right] - \frac{1}{2} m\Omega^2\left(\xi^2+\rho^2\right)$$

Grazie alla proprietà di invarianza in forma delle eq. di Lagrange le nuove eq. del moto sono analoghe alle precedenti, dopo aver imposto che $\dot{\theta} = \Omega$,

cioè
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = m\ddot{\xi} + k(\xi-\rho) + 2k\xi(\xi^2+\ell) - m\Omega^2\xi = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = m\ddot{\rho} + k(\rho-\xi) - m\Omega^2\rho = 0 \end{cases}$$

Ip.ti di equilibrio del nuovo sistema (essendo ξ e ρ ascisse sulla guida rettilinea, tale sistema è solidale a $O\xi z$) sono dati dalle eq.:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = k(\xi-\rho) + 2k\xi(\xi^2+\ell) - \dfrac{k}{2}\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \rho} = k(\rho-\xi) - \dfrac{k}{2}\rho = 0 \end{cases},$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $\Omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$.

Dalla 2ª eq. del precedente sistema segue che

$$k\left(\frac{\rho}{2} - \xi\right) = 0 \Rightarrow \rho = 2\xi .$$

Immettendo quest'ultima relazione nell'eq. $\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = 0$, si ottiene che

$$-k\xi + 2k\xi(\xi^2+\ell) - \frac{k}{2}\xi = 0$$

$$\Rightarrow k\xi\left[2(\xi^2+\ell) - \frac{3}{2}\right] = 0$$

$$\xi = 0 \qquad\qquad \xi^2 + \ell = \frac{3}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{3}{4} - \ell}\ ,\ \text{purché } \ell \le 3/4 .$$

Riassumendo i punti di equilibrio sono tali per ~~le~~ cui

$$(\xi, \rho) \in \left\{ (0,0), \left(\pm\sqrt{\frac{3}{4}-\ell}, \pm 2\sqrt{\frac{3}{4}-\ell} \right) \right\},$$

dove l'ultima coppia di punti di equilibrio è soggetta alla condizione di esistenza

$$\ell \in \left(0, \frac{3}{4}\right].$$

Per poter studiare la stabilità dei suddetti equilibri, è conveniente calcolare

$$\mathrm{Hess}\, U = \begin{pmatrix} \frac{k}{2}+2k\ell+6k\xi^2 & -k \\ -k & \frac{k}{2} \end{pmatrix}$$

Procediamo a considerare separatamente i vari punti di equilibrio:

– Caso $(\xi, \rho) = (0,0)$

$$\mathrm{Hess}\, U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \rho=0}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2}+2k\ell & -k \\ -k & \frac{k}{2} \end{pmatrix},$$

la cui traccia è evidentemente positiva, mentre per quanto riguarda il ~~tr~~ determinante si ha che

$$\det \operatorname{Hess} U\Big|_{\xi=\rho=0} = k^2\left(\frac{1}{4}+\ell-1\right) = k^2\left(\ell-\frac{3}{4}\right).$$

PAG. 19

Ne segue che

- se $\ell > \frac{3}{4}$, $\det > 0$, $Tr > 0$, quindi abbiamo 2 autoval. positivi $\Rightarrow$ p.to di equil. <u>STABILE</u>;
- se $0 < \ell < \frac{3}{4}$, $\det < 0$ $\Rightarrow$ abbiamo 1 autoval. <u>neg.</u> e 1 pos. $\Rightarrow$ $(0,0)$ è <u>INSTABILE</u>;
- invece, se $\ell = \frac{3}{4}$, $\det = 0$, $Tr > 0$, abbiamo 1 autoval. pos. e 1 nullo, quindi siamo in presenza di un caso indeciso che necessita di un supplemento di indagine.

– Casi $(\xi, \rho) = \left(\pm\sqrt{\frac{3}{4}-\ell}, \pm 2\sqrt{\frac{3}{4}-\ell}\right)$

$$\operatorname{Hess} U\Big|_{\substack{\xi=\pm\sqrt{\frac{3}{4}-\ell} \\ \rho=\pm 2\sqrt{\frac{3}{4}-\ell}}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2}+2k\ell+\frac{9}{2}k-6k\ell & -k \\ -k & \frac{k}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5k - 4k\ell & -k \\ -k & k/2 \end{pmatrix}$$

Siccome l'elemento diagonale in basso è, cioè $k/2$, è sicuramente positivo, allora sappiamo che almeno 1 autoval è sicuramente positivo.
Consideriamo

$$\det \mathrm{Hess}\, U \Big|_{\substack{\xi = \pm\sqrt{\frac{3}{4}-\ell} \\ \rho = \pm 2\sqrt{\frac{3}{4}-\ell}}} = k^2\left(\frac{5}{2} - 2\ell - 1\right) =$$

$$= k^2\left(\frac{3}{2} - 2\ell\right) = 2k^2\left(\frac{3}{4} - \ell\right).$$

Ne segue che

- se $\ell \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$, $\det > 0$, $\mathrm{Tr} > 0$, abbiamo 2 autoval. pos. $\Rightarrow \left(\pm\sqrt{\frac{3}{4}-\ell}, \pm 2\sqrt{\frac{3}{4}-\ell}\right)$ sono STABILI.
- se $\ell = \frac{3}{4}$, $\det = 0$, $\mathrm{Tr} > 0$, abbiamo 1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ è necessario un supplemento di indagine.

Ricordiamo che il sottocaso $l > \frac{3}{4}$ non si pone perché altrimenti non esisterebbero i suddetti p.ti di equilibrio.

Trattiamo ora separatamente l'unica situazione nella quale non siamo stati ancora in grado di decidere riguardo alla stabilità, cioè quando

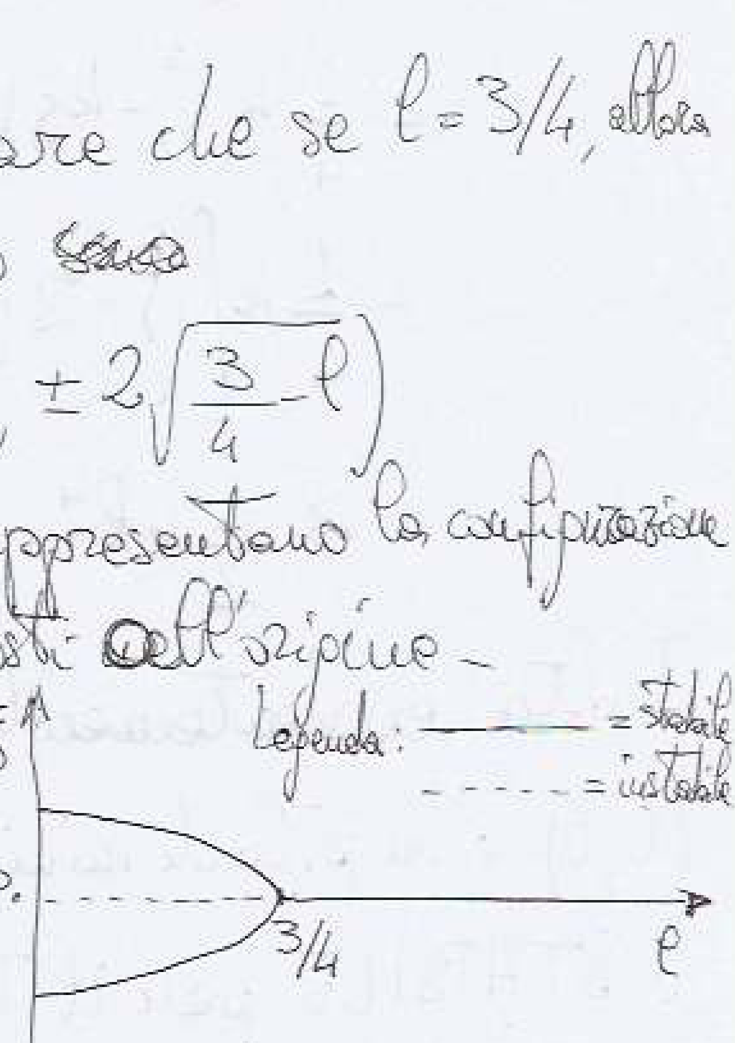
$$l = 3/4.$$

Cominciamo ad osservare che se $l = 3/4$, allora i 3 punti di equilibrio ~~sono~~

$$(0,0),\ \left(\pm\sqrt{\frac{3}{4} - l},\ \pm 2\sqrt{\frac{3}{4} - l}\right)$$

sono coincidenti, cioè rappresentano la configurazione in cui P e Q sono entrambi sovrapposti nell'origine.

La situazione può essere riassunta come qui a fianco.



Si nota che emerge il solito grafico a forchetta di un punto di equilibrio stabile. Questo ci spinge a congetturare che, quando $\ell = 3/4$, $(0,0)$ sia un p.to di equilibrio stabile. La verifica rigorosa di questa congettura è molto semplice.

Infatti, basta osservare che

$$\mathcal{U}(\xi,\rho) = \frac{1}{2}k\left[(\xi-\rho)^2+(\xi^2+\ell)^2\right]-\frac{1}{4}k(\xi^2+\rho^2) =$$

$$= \frac{1}{4}k\xi^2 - k\xi\rho + \frac{1}{4}k\rho^2 + \cancel{2}\,\frac{1}{2}k\left(\xi^4+2\ell\xi^2+\ell^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}k\left[(\rho-2\xi)^2 \cancel{-3\xi^2} \cancel{+3\xi^2} + 2\xi^4 + 2\ell^4\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}k\ell^4 \quad \left(\text{dove abbiamo usato che } \ell = \frac{3}{4}\right).$$

Inoltre, evidentemente $\mathcal{U}(0,0) = \frac{1}{2}k\ell^4$, quindi $(0,0)$ è un p.to di minimo assoluto e, quindi, è STABILE per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

—— $\overset{\circ}{}$ ——

(3) Si rimuova il vincolo t.c. $\dot{\theta} = \Omega$ e se ne introduca uno nuovo in modo t.c. P e Q stanno sempre sovrapposti l'uno all'altro.

(3A) Si scrivano Lagrangiana e Hamiltoniana del nuovo sistema. Si scrivano le costanti del moto.

(3B) Si scriva una condizione che deve essere soddisfatta dal momento angolare, affinché tutte le cond. iniz. t.c. $\xi(0) = \xi_0$ e $\dot{\xi}(0) = 0$ diano seguito a moti tali per cui P e Q transitano per l'origine.

(3C) Sia $\bar{t}$ l'istante di tempo positivo del primo passaggio per l'origine, si determini $\vartheta(0)$ t.c. $\vartheta(\bar{t}) = 2\vartheta(0)$.

(3D) Si determini, con un opportuno integrale, l'angolo di scostamento $\Delta\theta = \vartheta(4\bar{t}) - \vartheta(0)$ tra 2 passaggi consecutivi all'apocentro e, quindi, la condizione da soddisfare affinché il moto complessivo di P e Q nel piano Oxy sia <u>periodico</u>.

(3A) La nuova Lagrangiana del sistema si scrive imponendo la seguente relazione:

$$\mathcal{L}(\xi,\theta,\dot{\xi},\dot{\theta}) = L(\xi,\rho=\xi,\theta,\dot{\xi},\dot{\rho}=\dot{\xi},\dot{\theta}) =$$
$$= m\dot{\xi}^2 + \left(m\xi^2+\frac{1}{2}I\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\left(\xi^2+\ell\right)^2,$$

dove, per brevità, abbiamo posto che

$$I = \frac{M\ell^2}{12}.$$

I momenti cinetici coniugati sono evidentemente

$$p_\xi = 2m\dot{\xi} \quad , \quad p_\theta = \left(2m\xi^2+I\right)\dot{\theta}.$$

Possiamo quindi determinare la Hamiltoniana come segue:

$$H(p_\xi,p_\theta,\xi,\theta) = p_\xi\cdot\dot{\xi} + p_\theta\cdot\dot{\theta} - L(\xi,\theta,\dot{\xi},\dot{\theta})\Big|_{\dot{\xi}=p_\xi/2m,\ \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{2m\xi^2+I^2}}$$

$$\Rightarrow H = \frac{P_\xi^2}{4m} + \frac{P_\theta^2}{2(2m\xi^2+I)} + \frac{1}{2}k(\xi^2+\ell)^2$$

Siccome la Hamiltoniana (al pari della lagrangiana) è ~~ciclica~~ ha θ come coordinata ciclica, ne segue immediatamente che

$$P_\theta = (2m\xi^2 + I)\dot\theta$$

è una costante del moto poiché

$$\dot P_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

Inoltre, siccome $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, anche l'energia totale, cioè $E = \frac{P_\xi^2}{4m} + \frac{P_\theta^2}{2(2m\xi^2+I)} + \frac{1}{2}k(\xi^2+\ell)^2$ è una costante del moto!

(3B) Sia J il valore costante del momento angolare. In ambito Hamiltoniano la riduzione a un problema a un solo grado di libertà che studia il moto radiale è banale, basta porre

$$\mathcal{H}(P_\xi, \xi) = H(P_\xi, P_\theta = J, \xi, \theta) = \frac{P_\xi^2}{4m} + \frac{J^2}{2(2m\xi^2+I)} + \frac{1}{2}k(\xi^2+\ell)^2,$$

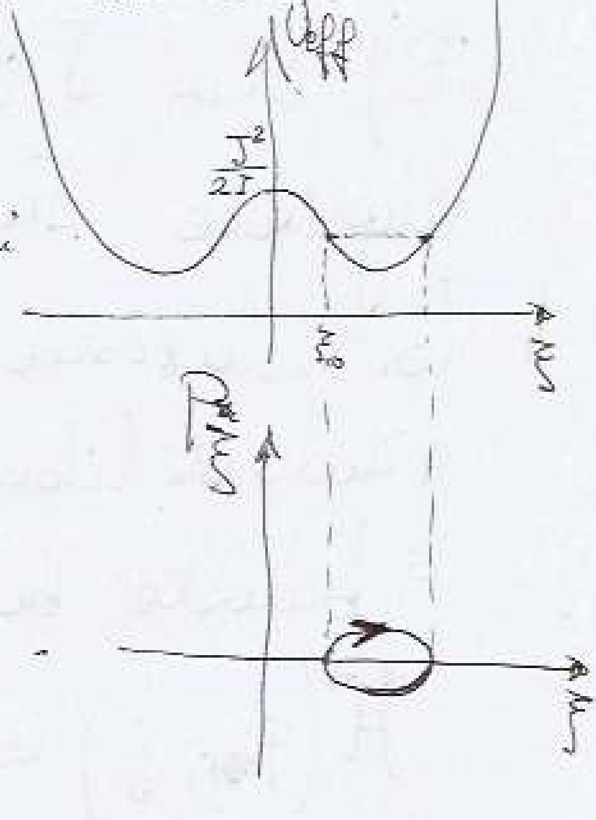
dove $\frac{p_\xi^2}{4m}$ gioca il ruolo dell'energia cinetica, mentre il potenziale efficace è

$$U_{eff}(\xi) = \frac{J^2}{2(2m\xi^2+I)} + \frac{1}{2}k(\xi^2+\ell)^2 .$$

Termine di potenziale centrifugo

E' facile rendersi conto che saremmo arrivati alla medesima conclusione anche se avessimo scelto di lavorare nell'ambito del formalismo lagrangiano o di quello Newtoniano.

Quando condizioni iniziali del tipo $\xi(0)=\xi_0$, $\dot{\xi}(0)=0$ danno luogo a moti che non transitano dall'origine?



Quando ci sono "barriere di potenziale" che impediscono al moto di ~~tem~~ andare verso l'origine. Così come schematizzato nell'analisi qualitativa qui a fianco.

C'è un solo modo per <u>impedire che ciò avvenga</u> <u>per tutti</u> <u>i valori di ξ_0</u>, cioè richiedere che il potenziale di V_{eff} abbia soltanto un p.to stazionario in corrispondenza all'origine, che sarà p.to di minimo assoluto in quanto V_{eff} è pari e $\lim_{\xi\to\pm\infty} V_{eff}(\xi) = +\infty$.

Studiamo l'andamento di V_{eff} e, a questo scopo, calcoliamo

$$V'_{eff} = \xi\left[k(\xi^2+\ell) - \frac{2J^2 m}{(2m\xi^2+I)^2}\right].$$

E' evidente che

(1) $V'_{eff}(0) = 0 \Rightarrow 0$ è p.to stazionario

(2) Se $k\ell \geq \frac{2mJ^2}{I^2}$, allora $V'_{eff}(\xi) > 0$ $\forall \xi > 0$ e $V'_{eff}(\xi) < 0$ $\forall \xi < 0$. Infatti, dei due addendi in parentesi quadra, il primo (cioè $k(\xi^2+\ell)$) cresce al crescere di $|\xi|$, mentre il secondo (cioè $\frac{2mJ^2}{(2m\xi^2+I)^2}$) decresce

al crescere di $|\xi|$.

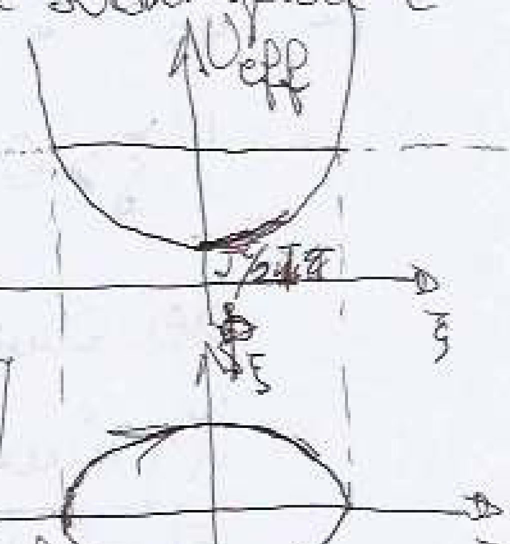
Pertanto $\xi = 0$ è un p.to di minimo assoluto quando $kl \geq \frac{2mJ^2}{I^2}$.

(3) Se invece $0 < kl \leq \frac{2mJ^2}{I^2}$, allora

∃ un intorno destro dell'origine $(0, \varepsilon)$ con ε piccolo abbastanza in cui $U'_{eff}(\xi) < 0$ con $\xi \in (0, \varepsilon)$ e $U'_{eff}(\xi) > 0$ per $\xi \in (-\varepsilon, 0)$, cioè l'origine sarebbe un p.to di max. locale, che è proprio la situazione che volevamo evitare.

Possiamo quindi concludere che la condizione che il momento angolare deve soddisfare è

$$|J^*| \leq \sqrt{\frac{kl}{2m}}\, I$$



Sotto tale condizione il potenziale U_{eff} è sempre crescente [decrescente] per $\xi > 0$ [$\xi < 0$], quindi l'analisi qualitativa del moto sarà del tipo qui a fianco.

Cioè tutti i moti sono periodici con orbite oscillanti attorno all'origine, ~~~~ ad eccezione dell'orbita costituita dal solo p.to di equilibrio nell'origine stesso.

- - - - - - - - - -

(3C) Dopo aver imposto che $|J| \leq \sqrt{\frac{kl}{2m}}\, I$ siamo sicuri che il moto passa per l'origine. Escludiamo il caso banale con $\xi(t)=0$, quindi poniamo $\xi(0)=\xi_0 \neq 0$.
(si ricordi che $\dot{\xi}(0)=0$, quindi $p_\xi(0)=2m\dot{\xi}(0)=0$)
Allora, sappiamo che $\exists\, \bar{t}>0$ del primo passaggio all'origine, cioè $\xi(\bar{t})=0$.
Dalla conservazione del momento angolare, otteniamo che

$$J = p_\theta(\bar{t}) = I\dot{\theta}(\bar{t}) = 2I\dot{\theta}(0)$$

$$\shortparallel$$

$$p_\theta(0) = (2m\xi_0^2 + I)\dot{\theta}(0)$$

$\longrightarrow I\dot{\theta}(0) = 2m\xi_0^2\dot{\theta}(0) \longrightarrow$ due soluzioni.

$\exists$ la soluzione banale

$$\dot{\theta}(0)=0 \Rightarrow \dot{\theta}(t)=0,$$ cioè l'asta non ruota e P e Q oscillano sempre nella stessa direzione.

Inoltre, $\exists$ una soluzione non banale t.c.

$$\xi_0 = \pm\sqrt{\frac{I}{2m}}.$$

(3D) Si tratta di procedere come per il problema di Keplero. Si osservi che per la parità del potenziale il ~~te~~ periodo completo di oscillazione è

$$T=4\bar{t}$$, dove $\bar{t}$ è il tempo necessario per andare da ξ_0 a 0 o viceversa.

Integrando per separazione di variabili la legge di conservazione dell'energia $\frac{P_\xi^2}{4m}+U_{eff}(\xi)=E$, abbiamo che $\dot{\xi}=\pm\sqrt{\frac{1}{m}\left(E-U_{eff}(\xi)\right)}$, da cui segue

che
$$\frac{d\xi}{d\theta}\cdot\dot{\theta} = \frac{d\xi}{d\theta}\frac{J}{2m\xi^2+I} = \pm\sqrt{\frac{1}{m}\left(E-U_{eff}(\xi)\right)}$$

dove abbiamo usato il fatto che, quando $J=(2m\xi^2+I)\,\dot{\theta}\neq 0 \Rightarrow \dot{\theta}\neq 0$, quindi la relazione $\theta=\theta(t)$ è invertibile e possiamo usare θ come variabile indipendente.

Otteniamo quindi che
$$d\theta = \frac{J}{2m\xi^2+I}\sqrt{\frac{1}{m}\left(E-U_{eff}(\xi)\right)}\,d\xi$$ dove

Consideriamo solo il segno +, perché θ cresce [decresce] indefinitamente nel verso di rotazione concorde col segno di J. Possiamo finalmente calcolare l'angolo tra 2 passaggi consecutivi all'apocentro, cioè
$$\Delta\theta = 4\int_0^{\xi_0} d\xi\,\frac{J}{2m\xi^2+I}\sqrt{\frac{1}{m}\left(E-U_{eff}(\xi)\right)}.$$
Il moto complessivo nel piano Oxy è periodico sse $\Delta\theta/2\pi \in \mathbb{Q}$ (come ben noto dallo studio dei moti centrali).