Analisi Matematica I (01/09/2020)

Esercizio A1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 - \sqrt{x}}{2x + 3e^{-\frac{1}{x}}}\,.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Per $x \to 0^+$ si ha:

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} &= e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\log(1+x)} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = e^{\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{2} + o(x\sqrt{x})} = e^{\sqrt{x} + o(x)} \\ &= 1 + \sqrt{x} + \frac{1}{2}\Big(\sqrt{x} + o(x)\Big)^2 + o(x) \\ &= 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x)\,,\end{aligned}$$

da cui segue

$$(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 - \sqrt{x} = \frac{1}{2}x + o(x) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

D'altra parte

$$2x + 3e^{-\frac{1}{x}} = 2x + o(x) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 - \sqrt{x}}{2x + 3e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{4}.$$

Esercizio A2. Determinare la derivata prima e gli intervalli di monotonia della seguente funzione

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x - 5\sqrt{|x|}}\right).$$

Svolgimento: Per $x > 0$ e $x \neq 25$:

$$f'(x) = -e^{(x-5\sqrt{x})^{-1}}(x - 5\sqrt{x})^{-2}\Big(1 - \frac{5}{2\sqrt{x}}\Big),$$

pertanto f è crescente per $0 < x \leq \frac{25}{4}$, e f è decrescente per $\frac{25}{4} \leq x < 25$ e per $x > 25$.

Per $x < 0$:

$$f'(x) = -e^{(x-5\sqrt{-x})^{-1}}(x - 5\sqrt{-x})^{-2}(1 + \frac{5}{2\sqrt{-x}}),$$

pertanto f è decrescente per $x < 0$.

In conclusione, f è crescente in $(0, \frac{25}{4}]$, ed è decrescente in $(-\infty, 0)$, in $[\frac{25}{4}, 5)$, e in $(25, +\infty)$.

Esercizio A3. Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{2 + x\log x}{x^3},$$

e calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 + x\log x}{x^3}\, dx.$$

Svolgimento: Integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int \frac{2 + x\log x}{x^3}\, dx &= -\frac{1}{x^2} + \int \frac{\log x}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x^2} + \int \log x\Big(-\frac{1}{x}\Big)'\, dx \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + c.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 + x\log x}{x^3}\, dx = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right) + 2 = 2.$$