Analisi Matematica I (13/07/2020)

Esercizio A1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}(n+5)^{2n-1}\big(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\big)^n.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$e^y = 1+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^6),\quad \log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\big(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\big)^n &= n\Big(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}-1\Big)^n = n\Big(e^{\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})}-1\Big)^n\\
&= n\Big(e^{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))}-1\Big)^n = n\Big(e^{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o(\frac{1}{n^3})}-1\Big)^n\\
&= n\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^n = \frac{1}{n^{2n-1}}\Big(1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^n\\
&= \frac{1}{n^{2n-1}}e^{n\log(1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))} = \frac{1}{n^{2n-1}}e^{n(-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))} = \frac{1}{n^{2n-1}}e^{-\frac{1}{2}+o(1)}.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$(n+5)^{2n-1} = n^{2n-1}\Big(1+\frac{5}{n}\Big)^{2n-1} = n^{2n-1}e^{(2n-1)\log(1+\frac{5}{n})} = n^{2n-1}e^{(2n-1)(\frac{5}{n}+o(\frac{1}{n}))} = n^{2n-1}e^{10+o(1)}\,.$$

Pertanto il limite richiesto vale

$$e^{19/2}.$$

Esercizio A2. Determinare gli intervalli di monotonia della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} - x + 2.$$

Svolgimento: Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} - x + 2, & |x| \leq 2, \\ \sqrt{x^2 - 4} - x + 2, & |x| > 2, \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - 1, & |x| < 2, \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1, & |x| > 2. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} |x| < 2 \\ \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - 1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| < 2 \\ -x \geq \sqrt{4 - x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} |x| < 2 \\ -x \geq 0 \\ x^2 \geq 4 - x^2 \end{cases} \iff x \in [-2, -\sqrt{2}],$$

$$\begin{cases} |x| > 2 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| > 2 \\ x \geq \sqrt{x^2 - 4} \end{cases} \iff \begin{cases} |x| > 2 \\ x \geq 0 \\ x^2 \geq x^2 - 4 \end{cases} \iff x \in [2, +\infty)$$

Pertanto f è crescente in $[-2, -\sqrt{2}]$, e in $[2, +\infty)$, ed è decrescente in $(-\infty, -2]$, e in $[-\sqrt{2}, 2]$.

Esercizio A3. Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \log^2(2+x)$$

e calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-2}^{2} \log^2(2+x)\, dx.$$

Svolgimento: Con la sostituzione $2+x=t$ si ha

$$\int_{-2}^{2} \log^2(2+x)\, dx = \int_{0}^{4} \log^2(t)\, dt.$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned} \int \log^2 t dt &= \int (t)' \log^2(t) dt = t\log^2 t - 2\int \log t dt \\ &= t\log^2 t - 2t\log t + 2t + C. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{-2}^{2} \log^2(2+x)\, dx = (2+x)\log^2(2+x) - 2(2+x)\log(2+x) + 2x + C\,,$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \log^2(2+x)\, dx &= \int_{0}^{4} \log^2(t)\, dt \\ &= \lim_{t\to 4^-}\Big(t\log^2 t - 2t\log t + 2t\Big) - \lim_{t\to 0^+}\Big(t\log^2 t - 2t\log t + 2t\Big) \\ &= 4\log^2(4) - 8\log(4) + 8. \end{aligned}$$