Analisi Matematica I (17/02/2020)

Esercizio A1. [punti 4] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\cos x)}{|\sin(2x)|^\alpha}\, dx\,.$$

Svolgimento: Si ha $f_\alpha \in C^0(0, \frac{\pi}{2})$. Per $x \to 0^+$, si ha

$$f_\alpha(x) = \frac{\log\left(\frac{x^2}{2}(1+o(1))\right)}{2^\alpha x^\alpha (1+o(1))} = \frac{2\log x}{2^\alpha x^\alpha}(1+o(1)),$$

per cui $\int_0^1 f_\alpha \in \mathbb{R} \iff \alpha < 1$. Per $x \to \frac{\pi}{2}^-$, posto $y := \frac{\pi}{2} - x \to 0^+$, si ha

$$f_\alpha(x) = f_\alpha\Big(\frac{\pi}{2}-y\Big) = \frac{\log(1-\cos(\frac{\pi}{2}-y))}{|\sin(\pi-2y)|^\alpha} = \frac{\log(1-\sin y)}{|\sin(2y)|^\alpha} = \frac{-y(1+o(1))}{2^\alpha y^\alpha(1+o(1))} = -\frac{1}{2^\alpha y^{\alpha-1}}(1+o(1)),$$

per cui $\int_1^{\pi/2} f_\alpha \in \mathbb{R} \iff \alpha < 2$.

Pertanto f_α è integrabile (in senso improprio) in $(0, \frac{\pi}{2})$ se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio A2. [punti 7] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\right)^{-6n} - \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+3}\right] n^2 .$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3), \quad \log(1+y) = y-\frac{y^2}{2}+o(y^2), \quad \sqrt{1+y} = 1+\frac{y}{2}+o(y), \quad \frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+o(y^2).$$

Si ha:

$$\log\left(e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right) = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\left(e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\right)^{-6n} &= \exp\left(-6n\log\left(e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \\ &= 1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + \frac{1}{2}\Big(-\frac{3}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = 1 - \frac{3}{n} + \frac{11}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+3} &= \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\,\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \\ &= 1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{9}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = 1 - \frac{3}{n} + \frac{19}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\left(e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\right)^{-6n} - \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+3}\right\} n^2 = \lim_{n\to\infty} -\frac{4}{n^2}(1+o(1))n^2 = -4.$$

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-7}{|x|-\sqrt{6}}\right) - |x|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento: Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$. Inoltre, f è continua e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2(1+o(1))}{|x|(1+o(1))}\right) - |x| = -|x| + \frac{\pi}{2} + o(1),$$

per cui $y = -x + \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, e $y = x + \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo, per $x \to -\infty$. Inoltre,

$$\lim_{x\to\sqrt{6}^\pm} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{6}^\pm} \left\{\arctan\left(\frac{-1+o(1)}{x-\sqrt{6}}\right) - \sqrt{6} + o(1)\right\} = \mp\frac{\pi}{2} - \sqrt{6}.$$

Per $0 < x < \sqrt{6}$ e $x > \sqrt{6}$, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-7}{x-\sqrt{6}}\right)^2}\,\frac{2x(x-\sqrt{6})-(x^2-7)}{(x-\sqrt{6})^2} - 1 = \frac{x^2-2\sqrt{6}x+7}{(x-\sqrt{6})^2+(x^2-7)^2} - 1 \\ &= \frac{1-(x^2-7)^2}{(x-\sqrt{6})^2+(x^2-7)^2}, \end{aligned}$$

per cui f è crescente in $(\sqrt{6}, \sqrt{8}]$, e decrescente in $[0, \sqrt{6})$, e in $[\sqrt{8}, +\infty)$. Inoltre, $x = \sqrt{8}$ è un punto di massimo relativo, $f(\sqrt{8}) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{6}}\right) - \sqrt{8}$.

Infine,

$$\lim_{x\to\sqrt{6}^\pm} f'(x) = \lim_{x\to\sqrt{6}^\pm} \frac{o(1)}{1+o(1)} = 0,$$
$$f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \mp\frac{48}{55},$$

e quindi, per la disparità di f', anche

$$\lim_{x\to(-\sqrt{6})^\pm} f'(x) = 0.$$

Allora $x = 0$ è un punto angoloso, mentre la posizione limite delle rette tangenti, per $x \to (\pm\sqrt{6})^\pm$, è orizzontale.

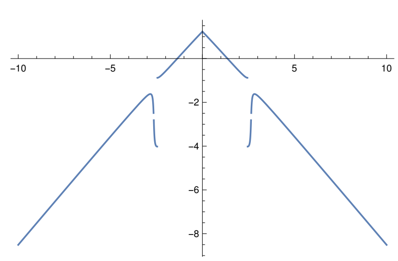

Figura 1: Grafico della funzione.

Esercizio A4. [punti 6] Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos x)\,dx\,.$$

Svolgimento: Usando la sostituzione $t = \cos x$, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos x)\,dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\log(1-\cos x)\,dx\\ &= 2\int_0^1 t\log(1-t)\,dt.\end{aligned}$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int t\log(1-t)dt &\overset{(a)}{=} \frac{t^2}{2}\log(1-t) - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t-1}dt\\ &= \frac{t^2}{2}\log(1-t) - \frac{1}{2}\int \Big(t+1+\frac{1}{t-1}\Big)dt\\ &= \frac{t^2}{2}\log(1-t) - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} - \frac{\log|t-1|}{2} + c,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato

$$\begin{cases} f(t) = \log(1-t), & f'(t) = \frac{-1}{1-t},\\ g'(t) = t, & g(t) = \frac{t^2}{2}.\end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\log(1-\cos x)\,dx &= \Big[(t^2-1)\log(1-t) - \frac{t^2}{2} - t\Big]_0^1\\ &= \lim_{t\to 1^-}\Big((t^2-1)\log(1-t) - \frac{t^2}{2} - t\Big)\\ &\overset{(b)}{=} -\frac{3}{2} + \lim_{y\to 0^+} y(y+2)\log y = -\frac{3}{2},\end{aligned}$$

dove in (b) si è usato il cambio di variabile $y = 1-t$ nel primo addendo.

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x(x+2)(y-3)}{1+x^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int (y-3)\,dy = \int \frac{x(x+2)}{x^2+1}\,dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int \frac{1}{y-3}\,dy = \log|y-3| + c'.$$

Risolviamo il secondo integrale:

$$\int \frac{x(x+2)}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = x - \arctan x + \log(x^2+1) + c''.$$

Pertanto

$$\log|y-3| = x - \arctan x + \log(x^2+1) + c \implies y - 3 = ke^{x-\arctan x + \log(1+x^2)}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ottiene $k = -2$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y_C(x) = 3 - 2e^{x-\arctan x+\log(1+x^2)} = 3 - 2(x^2+1)e^{x-\arctan x}.$$