Analisi Matematica I (29/01/2020)

Esercizio A1. [punti 4] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 6$, centrato nel punto $x_0 = 0$, per la funzione

$$f(x) = \sin(e^{x^2} - \cos(x\sqrt{2}))\,.$$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppi di Taylor, per $y \to 0$:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{720} + o(y^7), \qquad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4).$$

Allora

$$\begin{aligned} e^{x^2} - \cos(\sqrt{2}x) &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 - 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^6) \\ &= 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + o(x^6), \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \sin(e^{x^2} - \cos(\sqrt{2}x)) &= 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 - \frac{1}{6}\big(2x^2 + o(x^3)\big)^3 + o(x^6) \\ &= 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{52}{45}x^6 + o(x^6). \end{aligned}$$

Esercizio A2. [punti 7] Determinare il limite, per $x \to 0^+$, e $x \to +\infty$, della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\left(x + \cos\sqrt{2x}\,\right)^{2/x} - 1}{\log(1+x)}\,(2x+5)\,.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor, per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5).$$

Per $x \to 0^+$ si ha $x + \cos\sqrt{2x} = x + 1 - x + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$, da cui segue

$$\begin{aligned}\left(x + \cos\sqrt{2x}\,\right)^{2/x} &= \exp\left\{\frac{2}{x}\log\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right\} = \exp\left\{\frac{2}{x}\left(\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right\}\\ &= \exp\left\{\frac{x}{3} + o(x)\right\} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}x + o(x)}{x + o(x)}(5 + o(1)) = \frac{5}{3}.$$

D'altra parte, per $x \to +\infty$,

$$\left(x + \cos\sqrt{2x}\,\right)^{2/x} = \exp\left\{\frac{2}{x}\log\left(x + \cos\sqrt{2x}\,\right)\right\} = \exp\{\frac{2\log x}{x}(1 + o(1))\} = 1 + 2\frac{\log x}{x} + o\Big(\frac{\log x}{x}\Big),$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\frac{\log x}{x}(1 + o(1))}{\log x(1 + o(1))}\,2x(1 + o(1)) = 4.$$

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log |3e^x - 2e^{2x}|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento: Il dominio è $\{x \in \mathbb{R} \mid 3e^x - 2e^{2x} \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\log \frac{3}{2}\}$. Si ha, per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \log(2e^{2x} - 3e^x) = 2x + \log(2 - 3e^{-x}) = 2x + \log 2 + o(1),$$

mentre, per $x \to -\infty$,

$$f(x) = \log(3e^x - 2e^{2x}) = x + \log(3 - 2e^x) = x + \log 3 + o(1),$$

e

$$\lim_{x \to (\log \frac{3}{2})^\pm} f(x) \overset{(a)}{=} \lim_{z \to 0^\pm} \log |z| = -\infty,$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $z = 2e^{2x} - 3e^x$.

Allora $x = \log \frac{3}{2}$ è un asintoto verticale, mentre $y = x + \log 3$ è asintoto obliquo, per $x \to -\infty$, e $y = 2x + \log 2$ è asintoto obliquo, per $x \to +\infty$.

Per $x \neq \log \frac{3}{2}$, si ha

$$f'(x) = \frac{3e^x - 4e^{2x}}{3e^x - 2e^{2x}} = \frac{4e^x - 3}{2e^x - 3},$$

pertanto f è crescente per $x \leq \log \frac{3}{4}$ e per $x > \log \frac{3}{2}$, e f è decrescente per $\log \frac{3}{4} \leq x < \log \frac{3}{2}$, e $x = \log \frac{3}{4}$ è un punto di massimo relativo, $f(\log \frac{3}{4}) = \log \frac{9}{8}$.

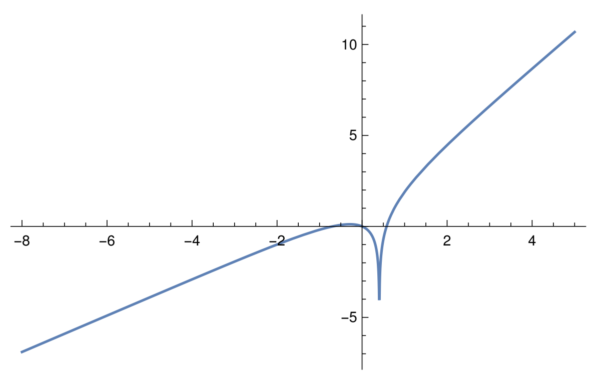

Figura 1: Grafico della funzione.

Esercizio A4. [punti 6] Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/4} \sqrt{x}\arcsin(1-4x)\,dx\,.$$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\arcsin(1-4x)\,dx &\overset{(a)}{=} \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-4x) - \int \frac{2}{3}x^{3/2}\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2x^2}}\,dx \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-4x) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}}\,dx \\
&\overset{(b)}{=} \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-4x) + \frac{\sqrt{2}}{3}\int (y^2-1)\,dy \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-4x) + \frac{\sqrt{2}}{3}\Big(\frac{1}{3}y^3 - y\Big) + c \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-4x) + \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-2x}\Big(\frac{1}{3}(1-2x) - 1\Big) + c \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-4x) - \frac{2\sqrt{2}}{9}(x+1)\sqrt{1-2x} + c,
\end{aligned}$$

dove si è usata in (a) l'integrazione per parti, con

$$\begin{cases} f(x) = \arcsin(1-4x), & f'(x) = \frac{-4}{\sqrt{1-(1-4x)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2x^2}} \\ g'(x) = \sqrt{x}, & g(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}, \end{cases}$$

e in (b) la sostituzione $y = \sqrt{1-2x} \implies x = \frac{1}{2}(1-y^2)$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/4} \sqrt{x}\arcsin(1-4x)\,dx &= \Big[\frac{2}{3}x^{3/2}\arcsin(1-4x) - \frac{2\sqrt{2}}{9}(x+1)\sqrt{1-2x}\Big]_0^{1/4} \\
&= -\frac{5}{18} + \frac{2\sqrt{2}}{9}.
\end{aligned}$$

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 e^{-x}}{\sqrt{3+e^{-x}}} \\ y(0) = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{3+e^{-x}}}\,dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y} + c.$$

Risolviamo il secondo integrale, con la sostituzione $e^{-x} = t$. Si ha

$$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{3+e^{-x}}}\,dx = -\int \frac{1}{\sqrt{3+t}}\,dt = -2\sqrt{3+t} + c = -2\sqrt{3+e^{-x}} + c.$$

Pertanto

$$-\frac{1}{y} = -2\sqrt{3+e^{-x}} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{5}$ si ottiene $c = -1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+e^{-x}} + 1}.$$