Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 30/01/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, centrato nel punto $x_0 = 0$, per la funzione

$$f(x) = \log(x^3 + \cos x) - \frac{x^2}{2}\,.$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n)}{\sin^2\left(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right)}\,.$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin(|x^2 + 3x + 2| - 1)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 3$.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y(16 - x^2)} \\ y(0) = -4. \end{cases}$$

Svolgimento:

Analisi Matematica I (30/01/2019)

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, centrato nel punto $x_0 = 0$, per la funzione

$$f(x) = \log(x^3 + \cos x) - \frac{x^2}{2}\,.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5)\,.$$

Pertanto

$$x^3 + \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
\log(x^3 + \cos x) &= \log\big(1 + (x^3 + \cos x - 1)\big)\\
&= -\frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^3 + o(x^5)\\
&= -\frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{4} + x^6 - x^5\Big) + o(x^5)\\
&= -\frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{x^4}{12} + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)\,.
\end{aligned}$$

Si deduce

$$f(x) = -x^2 + x^3 - \frac{x^4}{12} + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5).$$

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n)}{\sin^2\left(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right)}\,.$$

Svolgimento: Si ha

$$\frac{n(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n)}{\sin^2\left(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right)} \overset{(a)}{=} \frac{\frac{e^{-2n}}{2n}(1+o(1))}{\frac{e^{-2n}}{n}(1+o(1))} \to \frac{1}{2},$$

dove in (a) si è usato

(i) $(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\log(1+e^{-n})\right) = \exp\left\{\frac{1}{n}\Big(e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})\Big)\right\}$
$= 1 + \frac{1}{n}\Big(e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})\Big) + \frac{1}{2n^2}\Big(e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})\Big)^2 + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n^2}\Big)$
$= 1 + \frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{e^{-2n}}{2n^2} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n^2}\Big),$

(ii) $\log(1+e^n) = n + \log(1+e^{-n}) = n + e^{-n} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{3}e^{-3n} + o(e^{-3n}),$

(iii) $n\cdot(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n) = n + e^{-n} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{e^{-2n}}{2n^2} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n^2}\Big) - n - e^{-n} + \frac{1}{2}e^{-2n} - \frac{1}{3}e^{-3n} + o(e^{-3n}) = \frac{e^{-2n}}{2n} + o\Big(\frac{e^{-2n}}{n}\Big) = \frac{e^{-2n}}{2n}(1+o(1)),$

(iv) $\sin^2\left(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right) = \left(\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right)^2(1+o(1)) = \frac{e^{-2n}}{n}\Big(1 + \frac{\sqrt{n}e^n}{n!}\Big)^2(1+o(1)) = \frac{e^{-2n}}{n}(1+o(1)),$

dove, nell'ultimo passaggio, si è usato $\frac{\sqrt{n}e^n}{n!} = \frac{e}{\sqrt{n}}\frac{e^{n-1}}{(n-1)!} \to 0$.

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin(|x^2 + 3x + 2| - 1)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento: Si ha $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq |x^2 + 3x + 2| - 1 \leq 1\} = \{-3 \leq x \leq 0\}$. La funzione è continua, perchè composizione di funzioni continue.
Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per ogni $x \in (-3, 0)$,

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x+3}{\sqrt{1-(x^2+3x+3)^2}}, & x \in (-2,-1), \\ \frac{2x+3}{\sqrt{1-(x^2+3x+1)^2}}, & x \in (-3,-2) \cup (-1,0), \end{cases}$$

pertanto f è decrescente in $[-3,-2]$ e in $[-\frac{3}{2},-1]$, e f è crescente in $[-2,-\frac{3}{2}]$, e in $[-1,0]$, mentre $x = -2$, $x = -1$ sono punti di minimo relativo, e $x = -\frac{3}{2}$ è un punto di massimo relativo.
Inoltre $f(-3) = f(0) = \frac{\pi}{2}$, e $f(-2) = f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, e si ha

$$\lim_{x\to(-3)^+} f'(x) = \lim_{x\to(-3)^+} \frac{-3+o(1)}{|o(1)|} = -\infty, \quad \lim_{x\to(-2)^\pm} f'(x) = \lim_{x\to(-2)^\pm} \frac{\pm 1+o(1)}{|o(1)|} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to(-1)^\pm} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^\pm} \frac{\pm 1+o(1)}{|o(1)|} = \pm\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3+o(1)}{|o(1)|} = +\infty,$$

per cui $x = -2$, $x = -1$ sono punti di cuspide.

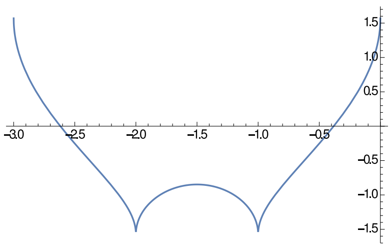


Figura 1: Grafico della funzione.

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 3$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$. Poiché, per $x \to 0^+$, $f_\alpha(x) = \dfrac{1+o(1)}{\sqrt{1-(1-2x+o(x))}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^{x_0} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Poiché, per $x \to +\infty$, $f_\alpha(x) = e^{-\alpha x}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff$ $\alpha > 0$. Ne segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff$ $\alpha > 0$.
Determiniamo una primitiva di f_3. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx &\overset{(a)}{=} -\frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{y}{1-y}}\, dy \overset{(b)}{=} -\frac{1}{2}\int z\, \frac{2z}{(z^2+1)^2}\, dz \\
&\overset{(c)}{=} -\frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{z^2+1} - \frac{d}{dz}\frac{z}{z^2+1}\Big)\, dz = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(z) + \frac{z}{2(z^2+1)} + C \\
&= -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\,\Big) + \frac{1}{2}\sqrt{y(1-y)} + C \\
&= -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big(\sqrt{\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}}\,\Big) + \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2x}(1-e^{-2x})} + C,
\end{aligned}$$

dove si sono usate in (a) la sostituzione $e^{-2x} = y \implies x = -\frac{1}{2}\log y$, $dx = -\frac{1}{2y}\, dy$, in (b) la sostituzione $\sqrt{\frac{y}{1-y}} = z \implies y = \frac{z^2}{z^2+1}$, $dy = \frac{2z}{(z^2+1)^2}\, dz$, e in (c) la decomposizione $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z^2+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dz}\Big(\dfrac{z}{z^2+1}\Big)$.

Allora $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx = \lim_{b\to+\infty}\Big\{-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big(\sqrt{\frac{e^{-2b}}{1-e^{-2b}}}\,\Big) + \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2b}(1-e^{-2b})}\Big\} +$

$\displaystyle -\lim_{a\to0^+}\Big\{-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big(\sqrt{\frac{e^{-2a}}{1-e^{-2a}}}\,\Big) + \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2a}(1-e^{-2a})}\Big\} =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\lim_{s\to0^+}\Big\{\sqrt{s(1-s)} - \operatorname{arctg}\Big(\sqrt{\frac{s}{1-s}}\,\Big)\Big\} + \frac{1}{2}\lim_{t\to1^-}\Big\{\operatorname{arctg}\Big(\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\Big) - \sqrt{t(1-t)}\Big\} = \frac{\pi}{4}.$

Alternativamente, usando il teorema di integrazione per sostituzione per gli integrali impropri, si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx &\overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{y}{1-y}}\, dy \overset{(b)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\infty} z\, \frac{2z}{(z^2+1)^2}\, dz \\
&\overset{(c)}{=} \lim_{b\to+\infty}\Big[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(z) - \frac{z}{2(z^2+1)}\Big]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(b) - \frac{b}{2(b^2+1)}\Big) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y(16-x^2)} \\ y(0) = -4. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int y dy = \int \frac{1}{16-x^2} dx.$$

Il primo integrale fornisce $\int y dy = \frac{y^2}{2} + c$.
Risolviamo il secondo integrale:

$$\int \frac{1}{16-x^2}\, dx = \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-4}\right) dx = \frac{1}{8}\log\frac{|x+4|}{|x-4|} + c' = \frac{1}{8}\log\left(\frac{4+x}{4-x}\right) + c'.$$

Pertanto

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{8}\log\left(\frac{4+x}{4-x}\right) + C.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -4$ si ottiene $C = 8$. Pertanto, usando di nuovo la condizione iniziale, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\sqrt{16 + \frac{1}{4}\log\left(\frac{4+x}{4-x}\right)}, \quad x \in \Big(-\frac{4(1-e^{-64})}{1+e^{-64}}, 4\Big).$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 20/02/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, centrato nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$, per la funzione

$$f(x) = (\sin x - 3\cos x)(2x - \pi)\,.$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cos^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{2n^3}{2n+1}\right).$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(3 - x - \log|5 - x|)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_4^{+\infty} \frac{\log(x-3)\big(\arctan(x-4)\big)^{2\alpha-1}}{(x-4)^{5\alpha-1}}\,dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{4+\sqrt{x}}y = \dfrac{(4+\sqrt{x})^8}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento:

Analisi Matematica I (20/02/2019)

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, centrato nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$, per la funzione

$$f(x) = (\sin x - 3\cos x)(2x - \pi)\,.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5).$$

Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = (\sin x - 3\cos x)(2x-\pi) = 2y\Big(\sin\Big(y + \frac{\pi}{2}\Big) - 3\cos\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = 2y(\cos y + 3\sin y).$$

Per $y \to 0$ risulta:

$$2y(\cos y + \sin y) = 2y\Big(1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{y^4}{24} + o(y^4) + 3y - \frac{3}{6}y^3 + o(y^4)\Big) = 2y + 6y^2 - y^3 - y^4 + \frac{1}{12}y^5 + o(y^5).$$

Pertanto, per $x \to \frac{\pi}{2}$ si ha

$$f(x) = 2\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) + 6\Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)^2 - \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^3 - \Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)^4 + \frac{1}{12}\Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)^5 + o\Big(\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^5\Big).$$

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2\cos^n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{2n^3}{2n+1}\right).$$

Svolgimento: Si ha:

$$\begin{aligned}
\cos^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) &= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^n = \Big(1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^n \\
&= \exp\left(n\log\left(1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right)\right) = \exp\left(n\Big(-\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= 1 - \frac{1}{2n} - \frac{7}{8n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

e

$$\frac{2n^3}{2n+1} = n^2\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} = n^2\Big(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) = n^2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} + o(1).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
n^2\cos^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{2n^3}{2n+1} &= n^2\Big(1 - \frac{1}{2n} - \frac{7}{8n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) - n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + o(1) \\
&= -\frac{9}{8} + o(1) \to -\frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(3 - x - \log|5 - x|)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento: Si ha dom $f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. La funzione è continua, perchè composizione di funzioni continue.
Per $x \to \pm\infty$, si ha

$$f(x) = \mathrm{arctg}(-x(1 + o(1)) = \mp\frac{\pi}{2}(1 + o(1)),$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = \mp\frac{\pi}{2}$, per $x \to \pm\infty$. Inoltre,

$$\lim_{x\to 5^\pm} f(x) = \lim_{x\to 5^\pm} \mathrm{arctg}(-\log|x - 5|(1 + o(1))) = \frac{\pi}{2}.$$

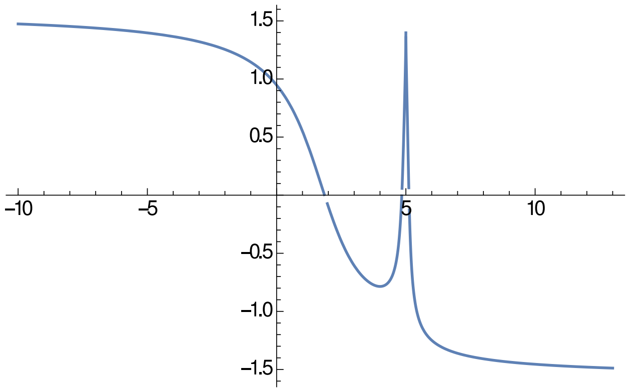
Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per ogni $x \neq 5$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \frac{1}{x-5}}{1 + (x - 3 + \log|x - 5|)^2} = \frac{x - 4}{5 - x}\,\frac{1}{1 + (x - 3 + \log|x - 5|)^2}\,,$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in [4, 5)$. Quindi f è crescente in $[4, 5)$, e decrescente in $(-\infty, 4]$ e in $(5, +\infty)$, per cui $x = 4$ è un punto di minimo locale, e $f(4) = -\frac{\pi}{4}$. Infine,

$$\lim_{x\to 5^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 5^\pm} \frac{1 + o(1)}{(5 - x)(\log|x - 5|)^2(1 + o(1))} = \mp\infty.$$

Il grafico di f è riportato in figura.



Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_4^{+\infty} \frac{\log(x-3)\big(\arctan(x-4)\big)^{2\alpha-1}}{(x-4)^{5\alpha-1}}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{\log(x-3)\big(\arctan(x-4)\big)^{2\alpha-1}}{(x-4)^{5\alpha-1}}$. Poiché, per $x \to 4^+$,

$$f_\alpha(x) = \frac{(x-4)(1+o(1))(x-4)^{2\alpha-1}(1+o(1))}{(x-4)^{5\alpha-1}} = \frac{1}{(x-4)^{3\alpha-1}}(1+o(1)),$$

allora l'integrale $\int_4^{x_0} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff$ $3\alpha - 1 < 1$ $\iff$ $\alpha < \frac{2}{3}$. Poiché, per $x \to +\infty$,

$$f_\alpha(x) = \frac{(\frac{\pi}{2})^{2\alpha-1}\log x(1+o(1))}{x^{5\alpha-1}(1+o(1))} = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2\alpha-1}\frac{\log x}{x^{5\alpha-1}}(1+o(1)),$$

allora l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff$ $5\alpha - 1 > 1$ $\iff$ $\alpha > \frac{2}{5}$. Ne segue che l'integrale $\int_4^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff$ $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{2}{3}$.
Determiniamo una primitiva di $f_{1/2}$. Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(x-3)}{(x-4)^{3/2}}\,dx &\overset{(a)}{=} 2\int \frac{\log(z^2+1)}{z^2}\,dz \overset{(b)}{=} -\frac{2}{z}\log(z^2+1) + 4\int \frac{dz}{z^2+1}\\ &= -\frac{2}{z}\log(z^2+1) + 4\,\mathrm{arctg}\, z + C = -\frac{2\log(x-3)}{\sqrt{x-4}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-4} + C,\end{aligned}$$

dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x-4} = z \implies x = z^2+4$, $dx = 2z\,dz$, e in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(z) = \log(z^2+1), & f'(z) = \frac{2z}{z^2+1},\\ g'(z) = \frac{1}{z^2}, & g(z) = -\frac{1}{z}.\end{cases}$
Allora

$$\begin{aligned}\int_4^{\infty} \frac{\log(x-3)}{(x-4)^{3/2}}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\Big(-\frac{2\log(b-3)}{\sqrt{b-4}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{b-4}\Big)\\ &\quad - \lim_{a\to4^+}\Big(-\frac{2\log(a-3)}{\sqrt{a-4}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{a-4}\Big) = 2\pi.\end{aligned}$$

Alternativamente, usando il teorema di integrazione per sostituzione per gli integrali impropri, si ha

$$\begin{aligned}&\int_4^{\infty}\frac{\log(x-3)}{(x-4)^{3/2}}\,dx \overset{(a)}{=} 2\int_0^{\infty}\frac{\log(z^2+1)}{z^2}\,dz\\ &\quad= \lim_{b\to+\infty}\Big(-\frac{2}{b}\log(b^2+1) + 4\,\mathrm{arctg}\, b\Big) - \lim_{a\to0^+}\Big(-\frac{2}{a}\log(a^2+1) + 4\,\mathrm{arctg}\, a\Big) = 2\pi.\end{aligned}$$

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{4+\sqrt{x}}y = \dfrac{(4+\sqrt{x})^8}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento: È un'equazione differenziale del primo ordine lineare non omogenea. L'equazione omogenea associata ha soluzione

$$\begin{aligned} \log|y| &= \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{4+\sqrt{x}}\,dx \overset{(a)}{=} -\int \frac{2t}{4+t}\,dt = -2t + 8\int \frac{1}{4+t}\,dt \\ &= -2t + 8\log|t+4| + C = -2\sqrt{x} + 8\log(4+\sqrt{x}) + C, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $t = \sqrt{x}$. Allora

$$y_{om}(t) = ke^{-2\sqrt{x}}(4+\sqrt{x})^8, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma

$$y_p(t) = k(x)e^{-2\sqrt{x}}(4+\sqrt{x})^8.$$

Allora

$$\begin{aligned} k'(x)e^{-2\sqrt{x}}(4+\sqrt{x})^8 &= \frac{(4+\sqrt{x})^8}{\sqrt{x}} \iff k'(x) = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \\ k(x) &= \int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \overset{(b)}{=} \int e^t\,dt = e^t + c = e^{2\sqrt{x}} + c, \end{aligned}$$

dove in (b) si è usata la sostituzione $t = 2\sqrt{x}$. Allora

$$y_p(t) = (4+\sqrt{x})^8,$$

e la soluzione generale dell'equazione non omogenea è

$$y_g(t) = ke^{-2\sqrt{x}}(4+\sqrt{x})^8 + (4+\sqrt{x})^8 = (1+ke^{-2\sqrt{x}})(4+\sqrt{x})^8.$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene $k = -e^2$, per cui la soluzione del problema di Cauchy è

$$y_C(t) = (1 - e^{2(1-\sqrt{x})})(4+\sqrt{x})^8, \quad x > 0.$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/06/2019

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, con centro in $x_0 = 1$, per la funzione

$$f(x) = \cos\big(\pi(1 + x^2)\big) + x\,.$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A2. [punti 5] Determinare i limiti, per $x \to 0^+$, e $x \to +\infty$, della seguente funzione

$$f(x) = \left(2e^{2x} - \log(1 + 4x) - 1\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2 + 2x}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{4x} - 1}{e^{3x}(e^{2x} - e^{-2x})^{\alpha}}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{3}{2}$.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-2y} \arctan \sqrt{x+1} \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento:

Analisi Matematica I (19/06/2019)

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, con centro in $x_0 = 1$, per la funzione

$$f(x) = \cos\big(\pi(1 + x^2)\big) + x\,.$$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppo di Taylor per $y \to 0$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5).$$

Posto $y = x - 1$, si ha

$$f(x) = f(1 + y) = \cos\big(\pi(2 + 2y + y^2)\big) + y + 1 = \cos\big(\pi(2y + y^2)\big) + y + 1.$$

Per $y \to 0$ risulta:

$$\begin{aligned}
\cos\big(\pi(2y + y^2)\big) &= 1 - \frac{\pi^2(2y + y^2)^2}{2} + \frac{\pi^4(2y + y^2)^4}{24} + o(y^5) \\
&= 1 - \frac{\pi^2}{2}(4y^2 + 4y^3 + y^4) + \frac{2}{3}\pi^4 y^4\Big(1 + \frac{y}{2}\Big)^4 + o(y^5) \\
&= 1 - 2\pi^2 y^2 - 2\pi^2 y^3 + \Big(\frac{2}{3}\pi^4 - \frac{\pi^2}{2}\Big)y^4 + \frac{4}{3}\pi^4 y^5 + o(y^5).
\end{aligned}$$

Pertanto, per $x \to 1$ si ha:

$$f(x) = 2 + (x-1) - 2\pi^2(x-1)^2 - 2\pi^2(x-1)^3 + \Big(\frac{2}{3}\pi^4 - \frac{\pi^2}{2}\Big)(x-1)^4 + \frac{4}{3}\pi^4(x-1)^5 + o((x-1)^5).$$

Esercizio A2. [punti 5] Determinare i limiti, per $x \to 0^+$, e $x \to +\infty$, della seguente funzione

$$f(x) = \Big(2e^{2x} - \log(1 + 4x) - 1\Big)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Svolgimento: Per $x \to 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \Big(2e^{2x} - \log(1 + 4x) - 1\Big)^{\frac{1}{x^2}} \\
&= \bigg(2\Big(1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)\Big) - \Big(4x - 8x^2 + o(x^2)\Big) - 1\bigg)^{\frac{1}{x^2}} \\
&= \Big(1 + 12x^2 + o(x^2)\Big)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\Big(\frac{1}{x^2}\log\Big(1 + 12x^2 + o(x^2)\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(\frac{1}{x^2}\Big(12x^2 + o(x^2)\Big)\Big) = \exp\Big(12 + o(1)\Big) \to e^{12}.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\Big(\frac{1}{x^2}\log(2e^{2x}(1 + o(1))\Big) = \lim_{x\to+\infty} \exp\Big(\frac{2x(1 + o(1))}{x^2}\Big) = 1.$$

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2 + 2x}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento: Si ha $\operatorname{dom} f = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$. La funzione è continua, perchè composizione e prodotto di funzioni continue.
Per $x \to \pm\infty$, si ha

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)|x|\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = |x|\left(1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \pm(x+2) + o(1),$$

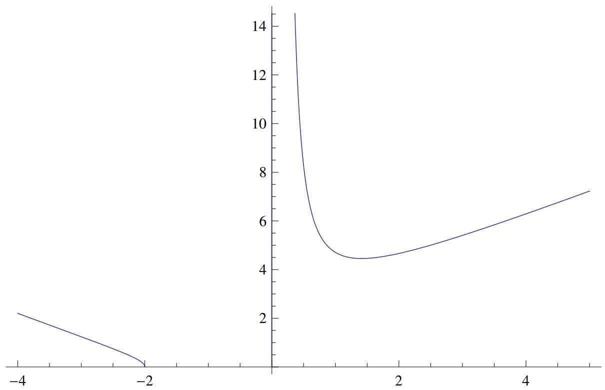
per cui f ha asintoto orizzontale $y = \pm(x + 2)$, per $x \to \pm\infty$. Inoltre, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per ogni $x \in \operatorname{dom} f$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}\sqrt{x^2 + 2x} + e^{1/x}\frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = e^{1/x}\,\frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x^2 + 2x}}\,,$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in [\sqrt{2}, +\infty)$. Quindi f è crescente in $[\sqrt{2}, +\infty)$, e decrescente in $(-\infty, -2]$ e in $(0, \sqrt{2}]$, per cui $x = \sqrt{2}$ è un punto di minimo locale. Infine,

$$\lim_{x\to(-2)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{2 + o(1)}{-|o(1)|} = -\infty.$$

Il grafico di f è riportato in figura.



Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{4x}-1}{e^{3x}(e^{2x}-e^{-2x})^\alpha}\,dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{3}{2}$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{e^{4x}-1}{e^{3x}(e^{2x}-e^{-2x})^\alpha}$. Poiché, per $x \to 0^+$,

$$f_\alpha(x) = \frac{4x(1+o(1))}{(4x)^\alpha(1+o(1))} = \frac{1}{(4x)^{\alpha-1}}(1+o(1)),$$

allora l'integrale $\int_0^{x_0} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$. Poiché, per $x \to +\infty$,

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{4x}(1+o(1))}{e^{3x}e^{2\alpha x}(1+o(1))} = \frac{1}{e^{(2\alpha-1)x}}(1+o(1)),$$

allora l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff 2\alpha - 1 > 0 \iff \alpha > \frac{1}{2}$. Ne segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \frac{1}{2} < \alpha < 2$.
Determiniamo una primitiva di $f_{3/2}$. Si ha

$$\int \frac{e^{4x}-1}{e^{3x}(e^{2x}-e^{-2x})^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{e^{4x}-1}{(e^{4x}-1)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{dy}{4y\sqrt{y-1}} \overset{(b)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1}$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{y-1} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{e^{4x}-1} + C,$$

dove si sono usate in (a) la sostituzione $e^{4x} = y \implies x = \frac{1}{4}\log y,\ dx = \frac{dy}{4y}$, e in (b) la sostituzione $\sqrt{y-1} = z \implies y = z^2+1,\ dy = 2z\,dz$.
Allora

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{4x}-1}{e^{3x}(e^{2x}-e^{-2x})^{\frac{3}{2}}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{e^{4b}-1} - \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{e^{4a}-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Alternativamente, usando il teorema di integrazione per sostituzione per gli integrali impropri,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{4x}-1}{e^{3x}(e^{2x}-e^{-2x})^{\frac{3}{2}}}\,dx \overset{(a)}{=} \int_1^{\infty}\frac{dy}{4y\sqrt{y-1}} \overset{(b)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-2y} \arctan \sqrt{x+1} \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili

$$\int e^{2y}\, dy = \int \arctan \sqrt{x+1}\, dx.$$

Risolviamo il primo integrale

$$\int e^{2y}\, dy = \frac{e^{2y}}{2} + c.$$

Risolviamo il secondo integrale, con la sostituzione $\sqrt{x+1} = t$,

$$\int \arctan \sqrt{x+1}\, dx = 2 \int t \arctan t\, dt = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = t^2 \arctan t - t + \arctan t + c'$$
$$= (x+2) \arctan \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} + c'.$$

Pertanto

$$\frac{e^{2y}}{2} = (x+2) \arctan \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} + C.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(-1) = 1$, si ottiene $C = \frac{e^2}{2}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2} \log \left(2(x+2) \arctan \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + e^2 \right).$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 10/07/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, centrato nel punto $x_0 = 0$, per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x + x^2 + e^{-x}}\,.$$

Cognome **Nome**

Esercizio A2. [punti 5] Determinare i limiti, per $x \to 0^+$, e $x \to 2$, della seguente funzione

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x}) \log \big(\big| \sin \frac{\pi x}{2} \big| \big)}{\big((x-2)^2 + \log(\frac{x}{2})\big) \log(|x-2|)} \,.$$

Cognome **Nome**

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 5 \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\log|x^2 - 1|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Cognome **Nome**

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1 - e^{-\sqrt{x-1}})}{e^{\alpha\sqrt{x-1}}(x-1)^\alpha}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Cognome **Nome**

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 8y = 5\cos(2x) \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1. \end{cases}$$

Analisi Matematica I (10/07/2019)

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, centrato nel punto $x_0 = 0$, per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x + x^2 + e^{-x}}\,.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} + o(y^5), \qquad \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3).$$

Pertanto risulta

$$x + x^2 + e^{-x} - 1 = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x + x^2 + e^{-x}} &= \frac{1}{1 + (x + x^2 + e^{-x} - 1)} \\
&= 1 - \Big(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\Big) + \Big(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^2 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{9}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{53}{24}x^4 - \frac{59}{120}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Esercizio A2. [punti 5] Determinare i limiti, per $x \to 0^+$, e $x \to 2$, della seguente funzione

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x}) \log\left(\left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|\right)}{\left((x-2)^2 + \log(\frac{x}{2})\right)\log(|x-2|)}\,.$$

Svolgimento: Per $x \to 0^+$ si ha:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}(1 + o(1)) \log\left(\frac{\pi x}{2}(1 + o(1))\right)}{\log x(1 + o(1)) \log 2(1 + o(1))} = \frac{\sqrt{2}}{\log 2}(1 + o(1)) \to \frac{\sqrt{2}}{\log 2}.$$

Posto $y = x - 2$, si ha

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{y+2}) \log\left(\left|\sin \frac{\pi(y+2)}{2}\right|\right)}{\left(y^2 + \log(\frac{y+2}{2})\right)\log(|y|)} = -\sqrt{2}\frac{(\sqrt{1 + \frac{y}{2}} - 1) \log\left(\left|\sin \frac{\pi y}{2}\right|\right)}{\left(y^2 + \log(1 + \frac{y}{2})\right)\log(|y|)} \overset{(a)}{\to} -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

dove in (a) si sono usati i seguenti risultati, per $y \to 0$:

(i) $\sqrt{1 + \dfrac{y}{2}} - 1 = \dfrac{y}{4}(1 + o(1)),$

(ii) $y^2 + \log\left(1 + \dfrac{y}{2}\right) = \dfrac{y}{2}(1 + o(1)),$

(iii) $\dfrac{\log\left(\left|\sin \frac{\pi y}{2}\right|\right)}{\log(|y|)} = \dfrac{\log|y|(1 + o(1))}{\log|y|} = 1 + o(1).$

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 5 \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \log |x^2 - 1|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento: Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. La funzione è continua, perchè composizione e somma di funzioni continue, e pari.
Per $x \to \pm\infty$, si ha

$$f(x) = -4 \log |x|(1 + o(1)),$$

per cui f non ha asintoto orizzontale, né asintonto obliquo, per $x \to \pm\infty$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to (-1)^\pm} f(x) &= \frac{5\pi}{4} - 2 \lim_{x \to (-1)^\pm} \log |o(1)| = +\infty, \\
\lim_{x \to 1^\pm} f(x) &= \frac{5\pi}{4} - 2 \lim_{x \to 1^\pm} \log |o(1)| = +\infty, \\
\lim_{x \to 0^\pm} f(x) &= 5 \lim_{x \to 0^\pm} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)(1 + o(1)) = \frac{5}{2}\pi.
\end{aligned}$$

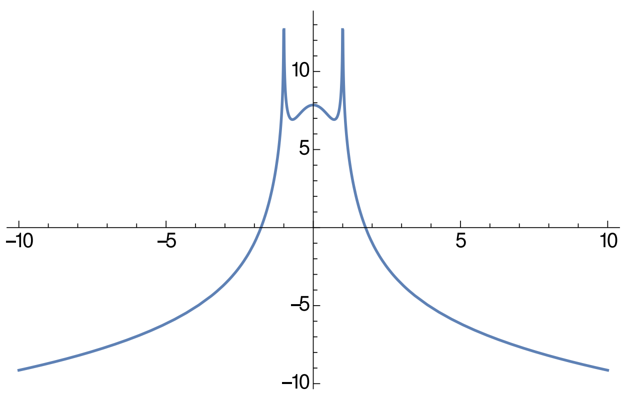
Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per ogni $x \in \operatorname{dom} f$,

$$f'(x) = \frac{-\frac{10}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^4}} - \frac{4x}{x^2 - 1} = \frac{-2x(2x^4 + 5x^2 - 3)}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup [-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$. Quindi f è crescente in $(-\infty, -1)$, in $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, e in $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, e decrescente in $(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$, in $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, e in $(1, +\infty)$, per cui $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di minimo locale. Infine,

$$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = 0.$$

Il grafico di f è riportato in figura.



Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1-e^{-\sqrt{x-1}})}{e^{\alpha\sqrt{x-1}}(x-1)^\alpha}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{\log(1-e^{-\sqrt{x-1}})}{e^{\alpha\sqrt{x-1}}(x-1)^\alpha}$. Poiché, per $x \to 1^+$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\log(\sqrt{x-1})(1+o(1))}{(x-1)^\alpha(1+o(1))},$$

allora l'integrale $\int_1^{x_0} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff$ $\alpha < 1$. Poiché, per $x \to +\infty$,

$$f_\alpha(x) = \frac{-e^{-\sqrt{x}}(1+o(1))}{e^{\alpha\sqrt{x}}x^\alpha(1+o(1))} = -\frac{1}{e^{(\alpha+1)\sqrt{x}}x^\alpha}(1+o(1)) = \begin{cases} o(\frac{1}{x^2}), & \alpha > -1, \\ \to -\infty, & \alpha \le -1, \end{cases}$$

allora l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff$ $\alpha > -1$. Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff$ $-1 < \alpha < 1$. Determiniamo una primitiva di $f_{1/2}$. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log(1-e^{-\sqrt{x-1}})}{e^{\sqrt{x-1}/2}\sqrt{x-1}}\, dx &\overset{(a)}{=} \int \frac{\log(1-e^{-y})}{ye^{y/2}}\, 2y\, dy \overset{(b)}{=} -4\int \log(1-z^2)\, dz \\
&\overset{(c)}{=} -4z\log(1-z^2) + \int \frac{8z^2}{z^2-1}\, dz \\
&\overset{(d)}{=} -4z\log(1-z^2) + 8z + 4\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C \\
&= -4e^{-\sqrt{x-1}/2}\log(1-e^{-\sqrt{x-1}}) + 8e^{-\sqrt{x-1}/2} + 4\log\left(\frac{1-e^{-\sqrt{x-1}/2}}{1+e^{-\sqrt{x-1}/2}}\right) + C,
\end{aligned}$$

dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x-1} = y \implies x = y^2+1$, $dx = 2y\, dy$, in (b) la sostituzione $e^{-y/2} = z \implies y = -2\log z$, $dy = \frac{-2dz}{z}$, in (c) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(z) = \log(1-z^2), & f'(z) = \frac{2z}{z^2-1}, \\ g'(z) = 1, & g(z) = z, \end{cases}$ e in (d) la decomposizione $\dfrac{8z^2}{z^2-1} = 8 + \dfrac{4}{z-1} - \dfrac{4}{z+1}$.
Allora

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\log(1-e^{-\sqrt{x-1}})}{e^{\sqrt{x-1}/2}\sqrt{x-1}}\, dx &= \lim_{b\to+\infty}\left\{ -4e^{-\sqrt{b-1}/2}\log(1-e^{-\sqrt{b-1}}) + 8e^{-\sqrt{b-1}/2} + 4\log\left(\frac{1-e^{-\sqrt{b-1}/2}}{1+e^{-\sqrt{b-1}/2}}\right)\right\} \\
&\quad - \lim_{a\to1^+}\left\{ -4e^{-\sqrt{a-1}/2}\log(1-e^{-\sqrt{a-1}}) + 8e^{-\sqrt{a-1}/2} + 4\log\left(\frac{1-e^{-\sqrt{a-1}/2}}{1+e^{-\sqrt{a-1}/2}}\right)\right\} \\
&\overset{(e)}{=} \lim_{c\to1^-}\left\{4c\log(1-c^2) - 8c - 4\log\left(\frac{1-c}{1+c}\right)\right\} \\
&= \lim_{c\to1^-}\Big\{4(c+1)\log(1+c) - 8c + 4(c-1)\log(1-c)\Big\} = 8(\log 2 - 1),
\end{aligned}$$

dove in (e) si è usato il teorema di cambiamento di variabili nei limiti con $c = e^{-\sqrt{a-1}/2}$.
Alternativamente, usando il teorema di integrazione per sostituzione per gli integrali impropri, si ha

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\log(1-e^{-\sqrt{x-1}})}{e^{\sqrt{x-1}/2}\sqrt{x-1}}\, dx &\overset{(a)}{=} \int_0^{\infty} \frac{2\log(1-e^{-y})}{e^{y/2}}\, dy \overset{(b)}{=} 4\int_0^1 \log(1-z^2)\, dz \\
&= \lim_{c\to1^-}\Big[-4z\log(1-z^2) + 8z + 4\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\Big]_0^c \\
&= \lim_{c\to1^-}\Big\{4(c+1)\log(1+c) - 8c + 4(c-1)\log(1-c)\Big\} = 8(\log 2 - 1).
\end{aligned}$$

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 8y = 5\cos(2x) \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del secondo ordine non omogenea. Dato che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$ sono $\lambda = -2 \pm 2i$, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

è

$$y_{om}(x) = c_1 e^{-2x}\cos(2x) + c_2 e^{-2x}\sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che $\pm 2i$ non sono soluzioni dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x),$$

da cui, sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(4a + 8b)\cos(2x) + (4b - 8a)\sin 2x = 5\cos(2x).$$

Si ottiene così $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$y_{gen}(x) = c_1 e^{-2x}\cos(2x) + c_2 e^{-2x}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ si ha:

$$c_1 + \frac{1}{4} = 0, \quad -2c_1 + 2c_2 + 1 = 1$$

da cui segue

$$c_1 = -\frac{1}{4}, \qquad c_2 = -\frac{1}{4}.$$

Si conclude che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x}\cos(2x) - \frac{1}{4}e^{-2x}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 05/09/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 6$, centrato nel punto $x_0 = 0$, per la funzione

$$f(x) = x\log(1+\sin^2 x) + 2x^3\,.$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(n + n\sin\frac{1}{n}\right)^n - e\,n^n}{(n+\log n)^n - n^{n+1}}\, n\big(\log(n+2)\big)^2 .$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}\Big(-3+(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, intervalli di convessità o concavità, punti di flesso. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-2}^{1} \frac{\sqrt{x+2} \cdot \log(x+2)}{(2-x-x^2)^\alpha}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x + x^2} = \log x \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento:

Analisi Matematica I (05/09/2019)

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 6$, centrato nel punto $x_0 = 0$, per la funzione

$$f(x) = x\log(1+\sin^2 x) + 2x^3 .$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + o(y^6), \qquad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

Risulta

$$\sin^2 x = \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\log(1+\sin^2 x) &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - \frac{1}{2}\Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\Big)^3 + o(x^5)\\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} + o(x^5) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^5).\end{aligned}$$

da cui segue

$$f(x) = x\log(1+\sin^2 x) + 2x^3 = 3x^3 - \frac{5}{6}x^5 + o(x^6).$$

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big(n + n\sin\frac{1}{n}\big)^n - e\,n^n}{(n+\log n)^n - n^{n+1}} n\big(\log(n+2)\big)^2 .$$

Svolgimento: Si ha

$$\frac{\big(n + n\sin\frac{1}{n}\big)^n - e\,n^n}{(n+\log n)^n - n^{n+1}} n\big(\log(n+2)\big)^2 \overset{(a)}{=} \frac{-\frac{e}{2}n^{n-1}(1+o(1))}{-\frac{1}{2}n^n(\log n)^2(1+o(1))}\, n(\log n)^2(1+o(1)) \to e,$$

dove in (a) si sono usati:

(i) $\Big(1+\sin\frac{1}{n}\Big)^n = \Big(1+\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)^n = \exp\Big(n\log\Big(1+\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big) = \exp\Big(n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big) = \exp\Big(1 - \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = e\cdot e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})} = e\Big(1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = e - \frac{e}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$,

(ii) $\Big(n+n\sin\frac{1}{n}\Big)^n - en^n = n^n\Big(1+\sin\frac{1}{n}\Big)^n - en^n = -\frac{e}{2}n^{n-1}(1+o(1))$,

(iii) $\Big(1+\frac{\log n}{n}\Big)^n = \exp\Big(n\log\Big(1+\frac{\log n}{n}\Big)\Big) = \exp\Big(n\Big(\frac{\log n}{n} - \frac{(\log n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{(\log n)^2}{n^2}\Big)\Big)\Big) = \exp\Big(\log n - \frac{(\log n)^2}{2n} + o\Big(\frac{(\log n)^2}{n}\Big)\Big) = ne^{-\frac{(\log n)^2}{2n}+o(\frac{(\log n)^2}{n})} = n\Big(1 - \frac{(\log n)^2}{2n} + o\Big(\frac{(\log n)^2}{n}\Big)\Big) = n - \frac{1}{2}(\log n)^2 + o\big((\log n)^2\big)$,

(iv) $(n+\log n)^n - n^{n+1} = n^n\Big(1+\frac{\log n}{n}\Big)^n - n^{n+1} = -\frac{1}{2}n^n(\log n)^2(1+o(1))$,

(v) $\big(\log(n+2)\big)^2 = (\log n)^2(1+o(1))$.

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}\Big(-3 + (x-1)^{\frac{1}{3}}\Big)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, intervalli di convessità o concavità, punti di flesso. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento: Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. La funzione è continua, perchè composizione e prodotto di funzioni continue. Osserviamo che $f(x) = x - 1 - 3(x-1)^{2/3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} x(1+o(1)) = \pm\infty, \\ m_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1+o(1))}{x} = 1, \\ q_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big) &= \lim_{x\to\pm\infty} -3x^{2/3}(1+o(1)) = -\infty, \end{aligned}$$

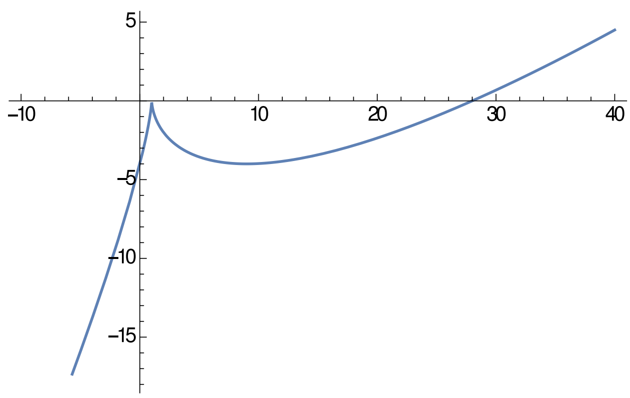
per cui f non ha asintoto orizzontale, né asintonto obliquo, per $x \to \pm\infty$. Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per ogni $x \neq 1$,

$$f'(x) = 1 - 2(x-1)^{-1/3} = \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{\sqrt[3]{x-1}},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x < 1 \vee \sqrt[3]{x-1} \geq 2 \iff x \in (-\infty, 1) \cup [9, +\infty)$. Quindi f è crescente in $(-\infty, 1]$, e in $[9, +\infty)$, e decrescente in $[0, 9]$, per cui $x = 0$ è un punto di massimo locale, mentre $x = 9$ è un punto di minimo locale. Inoltre, $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \mp\infty$, per cui $x = 1$ è un punto di cuspide.
Infine, per ogni $x \neq 1$,

$$f''(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-4/3},$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Quindi f è convessa in $(-\infty, 1]$, e in $[1, +\infty)$.
Il grafico di f è riportato in figura.



Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-2}^{1} \frac{\sqrt{x+2} \cdot \log(x+2)}{(2-x-x^2)^\alpha}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{\sqrt{x+2} \cdot \log(x+2)}{(2-x-x^2)^\alpha} = \dfrac{\log(x+2)}{(1-x)^\alpha (x+2)^{\alpha-1/2}}$. Poiché, per $x \to (-2)^+$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\log(x+2)}{3^\alpha (x+2)^{\alpha-1/2}}(1+o(1)),$$

allora l'integrale $\int_{-2}^{x_0} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff \alpha - \frac{1}{2} < 1 \iff \alpha < \frac{3}{2}$. Poiché, per $x \to 1^-$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\log 3}{(1-x)^\alpha 3^{\alpha-1/2}}(1+o(1)),$$

allora l'integrale $\int_{x_0}^{1} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff \alpha < 1$. Ne segue che l'integrale $\int_{-2}^{1} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff \alpha < 1$.

Determiniamo una primitiva di $f_{1/2}$. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log(x+2)}{\sqrt{1-x}}\, dx &\overset{(a)}{=} -2\int \log(3-z^2)\, dz \overset{(b)}{=} -2z\log(3-z^2) + 4\int \frac{z^2}{z^2-3} \\
&\overset{(c)}{=} -2z\log(3-z^2) + 4z + 2\sqrt{3}\log\left|\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}\right| + C \\
&= -2\sqrt{1-x}\log(x+2) + 4\sqrt{1-x} + 2\sqrt{3}\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}}\right| + C,
\end{aligned}$$

dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{1-x} = z \implies x = 1-z^2$, $dx = -2z\, dz$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(z) = \log(3-z^2), & f'(z) = \frac{2z}{z^2-3}, \\ g'(z) = 1, & g(z) = z, \end{cases}$ e in (c) la decomposizione $\dfrac{4z^2}{z^2-3} = 4 + \dfrac{2\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}} - \dfrac{2\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}$.

Allora

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} \frac{\log(x+2)}{\sqrt{1-x}}\, dx &= \lim_{b\to 1^-} \left\{ -2\sqrt{1-b}\log(b+2) + 4\sqrt{1-b} + 2\sqrt{3}\log\left|\frac{\sqrt{1-b}-\sqrt{3}}{\sqrt{1-b}+\sqrt{3}}\right| \right\} \\
&\quad - \lim_{a\to(-2)^+} \left\{ -2\sqrt{1-a}\log(a+2) + 4\sqrt{1-a} + 2\sqrt{3}\log\left|\frac{\sqrt{1-a}-\sqrt{3}}{\sqrt{1-a}+\sqrt{3}}\right| \right\} \\
&= \lim_{a\to(-2)^+} \left\{ 2\sqrt{1-a}\log(a+2) - 4\sqrt{1-a} - 2\sqrt{3}\log\left(\frac{a+2}{(\sqrt{1-a}+\sqrt{3})^2}\right) \right\} \\
&\overset{(d)}{=} 4\sqrt{3}(\log(2\sqrt{3})-1) - \lim_{c\to 0^+} c\log c = 4\sqrt{3}(\log(2\sqrt{3})-1),
\end{aligned}$$

dove in (d) si è usato il teorema di cambiamento di variabili nei limiti, con $c = a+2$.

Alternativamente, usando il teorema di integrazione per sostituzione per gli integrali impropri, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} \frac{\log(x+2)}{\sqrt{1-x}}\, dx &\overset{(a)}{=} 2\int_0^{\sqrt{3}} \log(3-z^2)\, dz = \lim_{b\to(\sqrt{3})^-} \left[2z\log(3-z^2) - 4z - 2\sqrt{3}\log\left|\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}\right| \right]_0^b \\
&= \lim_{b\to(\sqrt{3})^-} \left\{ 2b\log(3-b^2) - 4b - 2\sqrt{3}\log\left(\frac{3-b^2}{(b+\sqrt{3})^2}\right) \right\} = 4\sqrt{3}(\log(2\sqrt{3})-1).
\end{aligned}$$

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x+x^2} = \log x \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: È un'equazione differenziale del primo ordine lineare non omogenea. L'equazione omogenea associata ha soluzione

$$\log|y| = \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x+x^2}\,dx \overset{(a)}{=} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + C,$$

dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Allora

$$y_{om}(t) = \frac{kx}{x+1}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma

$$y_p(t) = \frac{k(x)x}{x+1}.$$

Allora

$$\begin{aligned} k'(x)\frac{x}{x+1} &= \log x \iff k'(x) = \frac{(x+1)\log x}{x} \\ k(x) &= \int \frac{(x+1)\log x}{x}\,dx \overset{(b)}{=} (x+\log x)\log x - \int \left(1 + \frac{\log x}{x}\right)dx \\ &= (x+\log x)\log x - x - \frac{1}{2}(\log x)^2 + c = x\log x - x + \frac{1}{2}(\log x)^2 + c, \end{aligned}$$

dove in (b) si è usata l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log x, & f'(x) = \frac{1}{x}, \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{x}, & g(x) = x + \log x. \end{cases}$ Allora

$$y_p(t) = \frac{x}{x+1}\left(x\log x - x + \frac{1}{2}(\log x)^2\right),$$

e la soluzione generale dell'equazione non omogenea è

$$y_g(t) = \frac{kx}{x+1} + \frac{x}{x+1}\left(x\log x - x + \frac{1}{2}(\log x)^2\right).$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene $k = 3$, per cui la soluzione del problema di Cauchy è

$$y_C(t) = \frac{x}{x+1}\left(3 + x\log x - x + \frac{1}{2}(\log x)^2\right), \quad x > 0.$$

Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/09/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, centrato nel punto $x_0 = 0$, per la funzione

$$f(x) = \arctan(x + x^3)\,.$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A2. [punti 6] Determinare il limite, per $x \to 0^+$, e $x \to +\infty$, della seguente funzione

$$f(x) = \left(\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}} - 1 + 5\sqrt{x}\right)\log\left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right).$$

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2x^2 - x + 1}{|x| - 1}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^5 \frac{1}{x^\alpha} \log\left(\frac{x}{5-x}\right) dx \, .$$

Calcolarne il valore per $\alpha = -1$.

Svolgimento:

Cognome **Nome**

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+1}}y \\ y(-2) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento:

Analisi Matematica I (18/09/2019)

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$, centrato nel punto $x_0 = 0$, per la funzione

$$f(x) = \arctan(x + x^3)\,.$$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + o(y^6).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
&\arctan(x + x^3)\\
&= x + x^3 - \frac{1}{3}\Big(x + x^3\Big)^3 + \frac{1}{5}\Big(x + x^3\Big)^5 + o(x^6)\\
&= x + x^3 - \frac{x^3}{3}\Big(1 + x^2\Big)^3 + \frac{x^5}{5}\Big(1 + x^2\Big)^5 + o(x^6)\\
&= x + x^3 - \frac{x^3}{3}\Big(1 + 3x^2 + o(x^2)\Big) + \frac{x^5}{5}\Big(1 + o(x)\Big) + o(x^6)\\
&= x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Esercizio A2. [punti 6] Determinare il limite, per $x \to 0^+$, e $x \to +\infty$, della seguente funzione

$$f(x) = \Big(\big(1 + \sqrt{x}\big)^{\frac{1}{x}} - 1 + 5\sqrt{x}\Big)\log\Big(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\Big)\,.$$

Svolgimento: Per $x \to +\infty$ si ha:

$$\big(1 + \sqrt{x}\big)^{\frac{1}{x}} - 1 = \exp\Big(\frac{1}{x}\log\big(1 + \sqrt{x}\big)\Big) - 1 = \exp\Big(\frac{\log x}{2x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) - 1 = \frac{\log x}{2x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

da cui segue

$$\big(1 + \sqrt{x}\big)^{\frac{1}{x}} - 1 + 5\sqrt{x} = 5\sqrt{x}(1 + o(1)).$$

Inoltre

$$\log\Big(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\Big) = \log\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big) = -\frac{1}{2}\log x(1 + o(1)).$$

Pertanto $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. D'altra parte, per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned}
\big(1 + \sqrt{x}\big)^{\frac{1}{x}} &= \exp\Big(\frac{1}{x}\Big(\log\big(1 + \sqrt{x}\big)\Big)\Big) = \exp\Big(\frac{1}{x}\Big(\sqrt{x} - \frac{x}{2} + o(x)\Big)\Big) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + o(1)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}(1 + o(1)),
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\big(1 + \sqrt{x}\big)^{\frac{1}{x}} - 1 + 5\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{e}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}(1 + o(1)).$$

Inoltre

$$\log\Big(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\Big) = -e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}(1 + o(1)).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Esercizio A3. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

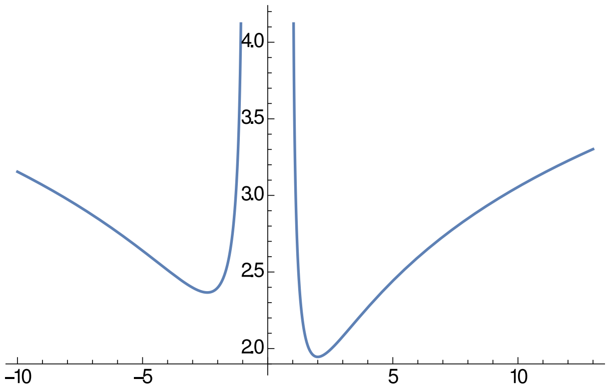
$$f(x) = \log\left(\frac{2x^2 - x + 1}{|x| - 1}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f''.

Svolgimento: Si ha $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, in quanto $2x^2 - x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. La funzione è continua, perché composizione e rapporto di funzioni continue.
Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \log|x|(1 + o(1))$, per cui f non ha asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \to \pm\infty$. Inoltre, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$. Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per ogni $x \in \operatorname{dom} f$,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(4x-1)(x-1) - (2x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} \dfrac{x-1}{2x^2 - x + 1} = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)(2x^2 - x + 1)}, & x > 1, \\ \dfrac{(4x-1)(-x-1) + (2x^2 - x + 1)}{(x+1)^2} \dfrac{-x-1}{2x^2 - x + 1} = \dfrac{2(x^2 + 2x - 1)}{(x+1)(2x^2 - x + 1)}, & x < -1, \end{cases}$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-1 - \sqrt{2}, -1) \cup [2, +\infty)$. Quindi f è crescente in $[-1-\sqrt{2}, -1)$, e in $[2, +\infty)$, e decrescente in $(-\infty, -1-\sqrt{2}]$, e in $(1, 2]$, per cui $x = -1-\sqrt{2}$ e $x = 2$ sono punti di minimo locale.
Il grafico di f è riportato in figura.



Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^5 \frac{1}{x^\alpha} \log\left(\frac{x}{5-x}\right) dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = -1$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{1}{x^\alpha} \log\left(\dfrac{x}{5-x}\right)$. Poiché, per $x \to 0^+$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\log x(1+o(1))}{x^\alpha},$$

allora l'integrale $\int_0^{x_0} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \alpha < 1$. Poiché, per $x \to 5^-$,

$$f_\alpha(x) = \frac{(-\log(5-x)(1+o(1))}{5^\alpha(1+o(1))},$$

allora l'integrale $\int_{x_0}^5 f_\alpha(x)\,dx$ converge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Ne segue che l'integrale $\int_0^5 f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \alpha < 1$.

Determiniamo una primitiva di f_{-1}. Si ha

$$\begin{aligned}
\int x \log\left(\frac{x}{5-x}\right) dx &\overset{(a)}{=} \frac{x^2}{2} \log\left(\frac{x}{5-x}\right) + \frac{5}{2} \int \frac{x}{x-5}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2} \log\left(\frac{x}{5-x}\right) + \frac{5}{2}x + \frac{25}{2} \log|x-5| + C \\
&= \frac{x^2}{2} \log x + \frac{1}{2}(25-x^2)\log(5-x) + \frac{5}{2}x + C,
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log(\frac{x}{5-x}), & f'(x) = \frac{5}{x(5-x)}, \\ g'(x) = x, & g(x) = \frac{x^2}{2}. \end{cases}$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_0^5 x \log\left(\frac{x}{5-x}\right) dx &= \lim_{b \to 5^-} \left\{ \frac{b^2}{2} \log b + \frac{1}{2}(25-b^2)\log(5-b) + \frac{5}{2}b \right\} \\
&\quad - \lim_{a \to 0^+} \left\{ \frac{a^2}{2} \log a + \frac{1}{2}(25-a^2)\log(5-a) + \frac{5}{2}a \right\} \\
&= \frac{25}{2}\log 5 + \frac{25}{2} - \frac{25}{2}\log 5 = \frac{25}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio A5. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+1}} y \\ y(-2) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili. Si ha

$$\log|y| = \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+1}} dx = \sqrt{(x+2)^2+1} + c.$$

Si deduce

$$y(x) = Ce^{\sqrt{(x+2)^2+1}},$$

da cui, imponendo la condizione iniziale $y(-2) = 1$ si determina la costante C:

$$C = \frac{1}{e}.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{e} e^{\sqrt{(x+2)^2+1}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$