Analisi Matematica I (Fs-L) 30/1/2018

Risposte non giustificate non verranno considerate. Consegnare solo la "bella copia". Scrivere anche sul retro del foglio.

Cognome:	1		
	2		
Nome:	3		Versione A
	4		
Matricola:	5		
	TOTALE		

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 6, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = \log(1 + e^{-x^2}) - 2\sin(x^2)\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n - \log n)^n (n+9)^n \log n}{(n^2 + 5\log n)^n - (n^2+2)^n}\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A3. [punti 5] Risolvere l'equazione $z^2|z^2| + 16i = z^2 + 16i|z^2|$.

Svolgimento:

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(4 + x^2)}{\big|\log(1 + x) + \log(\log(1 + x))\big|^{\alpha} (x + 4)^{2-\alpha}}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 0$.

Svolgimento:

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Analisi Matematica I (Fs-L) 30/1/2018

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 6, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = \log(1 + e^{-x^2}) - 2\sin(x^2)\,.$$

Svolgimento: Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log\Big(2 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)\Big) - 2\Big(x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^8)\Big) \\
&= \log 2 + \log\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^6 + o(x^6)\Big) - 2x^2 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) \\
&= \log 2 + \Big(- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^6 + o(x^6)\Big) - \frac{1}{2}\Big(- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^6 + o(x^6)\Big)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{3}\Big(- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^6 + o(x^6)\Big)^3 + o(x^7) - 2x^2 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) \\
&= \log 2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^6 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{24}x^6 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) \\
&= \log 2 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6),
\end{aligned}$$

dove si sono usati gli sviluppi $e^z = 1 + z + \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{6}z^3 + o(z^3)$, con $z = -x^2$, per cui $o(z^3) = o(x^6)$, $\log(1+z) = z - \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{3}z^3 + o(z^3)$, con $z = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^6 + o(x^6)$, per cui $o(z^3) = o(x^6)$, e $\sin z = x - \dfrac{1}{6}z^3 + o(z^4)$, con $z = x^2$, per cui $o(z^4) = o(x^8)$.

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n - \log n)^n (n+9)^n \log n}{(n^2 + 5\log n)^n - (n^2+2)^n}\,.$$

Svolgimento: Si ha

$$\frac{(n - \log n)^n (n+9)^n \log n}{(n^2 + 5\log n)^n - (n^2+2)^n} \overset{(a)}{=} \frac{(1 - \frac{\log n}{n})^n (1 + \frac{9}{n})^n \log n}{(1 + \frac{5\log n}{n^2})^n - (1 + \frac{2}{n^2})^n} \overset{(b)}{=} \frac{\frac{e^9 \log n}{n}(1 + o(1))}{\frac{5\log n}{n}(1 + o(1))} \to \frac{e^9}{5},$$

dove in (a) si è diviso numeratore e denominatore per n^{2n}, e in (b) si sono usati i risultati:
(i) $\Big(1 - \dfrac{\log n}{n}\Big)^n = \exp\Big\{n\log\Big(1 - \dfrac{\log n}{n}\Big)\Big\} = \exp\Big\{n\Big(- \dfrac{\log n}{n} - \dfrac{(\log n)^2}{2n^2} + o\Big(\dfrac{(\log n)^2}{n^2}\Big)\Big)\Big\} = \exp\big\{ - \log n + o(1)\big\} = \dfrac{1}{n}(1 + o(1))$;
(ii) $\Big(1 + \dfrac{5\log n}{n^2}\Big)^n = \exp\Big\{n\log\Big(1 + \dfrac{5\log n}{n^2}\Big)\Big\} = \exp\Big\{n\dfrac{5\log n}{n^2}(1 + o(1))\Big\} = 1 + \dfrac{5\log n}{n}(1 + o(1))$;
(iii) $\Big(1 + \dfrac{2}{n^2}\Big)^n = \exp\Big\{n\log\Big(1 + \dfrac{2}{n^2}\Big)\Big\} = \exp\Big\{n\dfrac{2}{n^2}(1 + o(1))\Big\} = 1 + \dfrac{2}{n}(1 + o(1))$.

Esercizio A3. [punti 5] Risolvere l'equazione $z^2|z^2| + 16i = z^2 + 16i|z^2|$.

Svolgimento: Si ha

$$z^2|z^2|16i = z^2 + 16i|z^2| \iff (z^2 - 16i)(|z^2| - 1) = 0 \iff |z| = 1 \ \vee \ z^2 = 16i$$
$$\iff |z| = 1 \ \vee \ z = 4\sqrt{i} = \pm 4\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = \pm 2\sqrt{2}(1+i).$$

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(4+x^2)}{\big|\log(1+x) + \log(\log(1+x))\big|^\alpha (x+4)^{2-\alpha}}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 0$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{\log(4+x^2)}{|\log(1+x) + \log(\log(1+x))|^\alpha (x+4)^{2-\alpha}}$. Poiché, per $x \to 0^+$, $f_\alpha(x) = \dfrac{x^2(1+o(1))}{|\log x|^\alpha 4^{2-\alpha}(1+o(1))} = \dfrac{1}{4^{2-\alpha}x^{-2}|\log x|^\alpha}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^{x_0} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Poiché, per $x \to +\infty$, $f_\alpha(x) = \dfrac{2\log x(1+o(1))}{(\log x)^\alpha x^{2-\alpha}(1+o(1))} = \dfrac{2}{x^{2-\alpha}(\log x)^{\alpha-1}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff 2-\alpha > 1 \iff \alpha < 1$. Ne segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff \alpha < 1$.
Determiniamo una primitiva di f_0. Si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log(x^2+4)}{(x+4)^2}\, dx &\overset{(a)}{=} -\frac{\log(x^2+4)}{x+4} + \int \frac{2x\, dx}{(x+4)(x^2+4)}\, dx \\
&\overset{(b)}{=} -\frac{\log(4+x^2)}{x+4} - \frac{2}{5}\int \frac{1}{x+4}\, dx + \frac{1}{5}\int \frac{2x}{x^2+4}\, dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\, d\Big(\frac{x}{2}\Big) \\
&= -\frac{\log(4+x^2)}{x+4} - \frac{2}{5}\log|x+4| + \frac{1}{5}\log(x^2+4) + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x}{2}\Big) + C,
\end{aligned}$$

dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log(x^2+4), & f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}, \\ g'(x) = \frac{1}{(x+4)^2}, & g(x) = -\frac{1}{x+4}, \end{cases}$ e in (b) la decomposizione $\dfrac{2x}{(x+4)(x^2+4)} = -\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{2}{5}\dfrac{x+1}{x^2+4} = -\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{5}\dfrac{2x}{x^2+4} + \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}$.

Allora $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x^2+4)}{(x+4)^2}\, dx = \lim_{\omega\to+\infty}\Big[-\frac{\log(4+x^2)}{x+4} - \frac{2}{5}\log|x+4| + \frac{1}{5}\log(x^2+4) + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big]_0^\omega = \lim_{\omega\to+\infty}\Big\{-\frac{\log(4+\omega^2)}{\omega+4} + \frac{1}{5}\log\Big(\frac{\omega^2+4}{(\omega+4)^2}\Big) + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big\} + \frac{9}{20}\log 4 = \frac{\pi}{10} + \frac{9}{10}\log 2.$

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

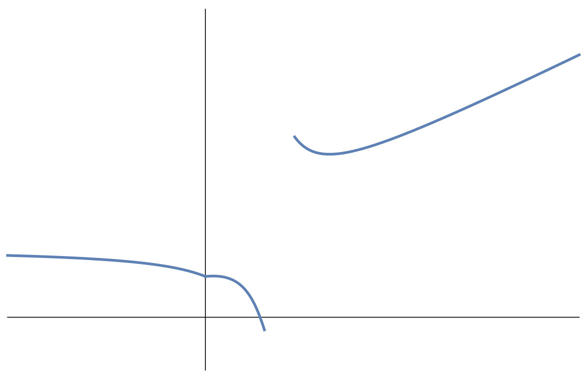
Svolgimento: Si ha dom $f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. La funzione è continua, perchè composizione, rapporto, e combinazione lineare di funzioni continue.
Per $x \to +\infty$, si ha $f(x) = x + 3 \operatorname{arctg}(1 + o(1)) = x + \frac{3\pi}{4} + o(1)$, per cui f ha asintoto obliquo $y = x + \frac{3\pi}{4}$. Per $x \to -\infty$, si ha $f(x) = 3 \operatorname{arctg}(1 + o(1)) = \frac{3\pi}{4} + o(1)$, per cui f ha asintoto orizzontale $y = \frac{3\pi}{4}$. Inoltre, $\lim_{x \to 3^\pm} f(x) = \lim_{x \to 3^\pm} x + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x-3}\right) = 3 \pm \frac{3\pi}{2}$. Calcoliamo la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(x)}{2} + \frac{-\frac{6}{(x-3)^2}}{1 + (\frac{x-1}{x-3})^2} = \begin{cases} -\frac{3}{x^2-4x+5}, & x < 0, \\ \frac{x^2-4x+2}{x^2-4x+5}, & x > 0, \end{cases}$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (0, 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}, +\infty)$. Quindi f è crescente in $[0, 2 - \sqrt{2}]$, e in $[2 + \sqrt{2}, +\infty)$, e decrescente in $(-\infty, 0]$, in $[2 - \sqrt{2}, 3)$, e in $(3, 2 + \sqrt{2}]$. Allora, $x = 0$ e $x = 2 + \sqrt{2}$ sono punti di minimo locale, con $f(0) = 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, e $x = 2 - \sqrt{2}$ è un punto di massimo locale. Inoltre, $f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\frac{3}{5}$, e $f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{2}{5}$. Quindi $x = 0$ è un punto angoloso.
Infine,

$$f''(x) = \frac{6(x-2)}{(x^2 - 4x + 5)^2}, \; x \notin \{0, 3\},$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in [2, 3) \cup (3, +\infty)$. Quindi f è convessa in $[2, 3)$, e in $(3, +\infty)$, e concava in $(-\infty, 0]$, e in $[0, 3)$, mentre $x = 2$ è un punto di flesso. Il grafico di f è riportato in figura.



Analisi Matematica I (Fs-L) 19/2/2018

Risposte non giustificate non verranno considerate. Consegnare solo la "bella copia". Scrivere anche sul retro del foglio.

Cognome:	1		
	2		
Nome:	3		Versione A
	4		
Matricola:	5		
	TOTALE		

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 5, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = \sin(x - x^2) - x \log(1 + x + x^2)\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{2/n^2} + \cos(\frac{1}{n})\right)^{n^2}}{\left(1 + \cos(\frac{3}{n}) + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A3. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 4e^{2t} + 12t - 4 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento:

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_4^{+\infty} \frac{x+1}{x^{3\alpha}(x^\alpha + 2)(\sqrt{x}+1)} \, dx \, .$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento:

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x + 3 + \log\left|\frac{x+5}{x+3}\right|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 5, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = \sin(x - x^2) - x\log(1 + x + x^2)\,.$$

Svolgimento: Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \Big((x-x^2) - \frac{1}{6}(x-x^2)^3 + \frac{1}{120}(x-x^2)^5 + o(x^6)\Big) \\ &\quad - x\Big((x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 - \frac{1}{4}(x+x^2)^4 + o(x^4)\Big) \\ &= \Big(x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\Big) \\ &\quad - x\Big(x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^4 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\Big) \\ &= \Big(x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{59}{120}x^5 + o(x^5)\Big) - \Big(x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + o(x^5)\Big) \\ &= x - 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{89}{120}x^5 + o(x^5), \end{aligned}$$

dove si sono usati gli sviluppi $\sin z = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + o(z^6)$, con $z = x - x^2$, per cui $o(z^6) = o(x^6)$, e $\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + o(z^4)$, con $z = x + x^2$, per cui $o(z^4) = o(x^4)$.

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{2/n^2} + \cos(\frac{1}{n})\right)^{n^2}}{\left(1 + \cos(\frac{3}{n}) + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\,.$$

Svolgimento: Si ha

$$\frac{\left(e^{2/n^2} + \cos(\frac{1}{n})\right)^{n^2}}{\left(1 + \cos(\frac{3}{n}) + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \overset{(a)}{=} \frac{2^{n^2}e^{3/4}(1+o(1))}{2^{n^2}e^{-7/4}(1+o(1))} \to e^{5/2},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $e^{2/n^2} + \cos(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + 1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = 2 + \frac{3}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$;
(ii) $\left(e^{2/n^2} + \cos(\frac{1}{n})\right)^{n^2} = 2^{n^2}\left(1 + \frac{3}{4n^2}(1+o(1))\right)^{n^2} = 2^{n^2}\exp\left\{n^2\log\left(1 + \frac{3}{4n^2}(1+o(1))\right)\right\} = 2^{n^2}\exp\left\{n^2\frac{3}{4n^2}(1+o(1))\right\} = 2^{n^2}e^{3/4}(1+o(1))$;
(iii) $1 + \cos(\frac{3}{n}) + \frac{1}{n^2} = 1 + 1 - \frac{9}{2n^2} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = 2 - \frac{7}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$;
(iv) $\left(1 + \cos(\frac{3}{n}) + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = 2^{n^2}\left(1 - \frac{7}{4n^2}(1+o(1))\right)^{n^2} = 2^{n^2}\exp\left\{n^2\log\left(1 - \frac{7}{2n^2}(1+o(1))\right)\right\} = 2^{n^2}\exp\left\{n^2\frac{-7}{4n^2}(1+o(1))\right\} = 2^{n^2}e^{-7/4}(1+o(1))$.

Esercizio A3. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 4e^{2t} + 12t - 4 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento: È un'equazione differenziale del secondo ordine lineare non omogenea. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ha soluzioni $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$. L'equazione omogenea associata ha soluzione $y_{om}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma $y_p(t) = ate^{2t} + bt + c$. Sostituendo nell'equazione differenziale, otteniamo $4ae^{2t} + 4ate^{2t} - 5(ae^{2t} + 2ate^{2t} + b) + 6ate^{2t} + 6bt + 6c = -ae^{2t} + 6bt - 5b + 6c = 4e^{2t} + 12t - 4 \iff a = -4,\ b = 2,\ c = 1$, per cui $y_p(t) = -4te^{2t} + 2t + 1$, e la soluzione generale dell'equazione non omogenea è $y_{gen}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - 4te^{2t} + 2t + 1$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = c_1 + c_2 + 1 \\ 0 = y'_{gen}(0) = 2c_1 + 3c_2 - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 2. \end{cases}$$

Allora $y_{Cauchy}(t) = -2e^{2t} + 2e^{3t} - 4te^{2t} + 2t + 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_4^{+\infty} \frac{x+1}{x^{3\alpha}(x^\alpha + 2)(\sqrt{x} + 1)} \, dx \, .$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{x+1}{x^{3\alpha}(x^\alpha + 2)(\sqrt{x}+1)}$ e studiamone il comportamento asintotico per $x \to +\infty$. Per $\alpha > 0$, $f_\alpha(x) = \dfrac{x(1+o(1))}{x^{4\alpha+\frac{1}{2}}(1+o(1))} = \dfrac{1}{x^{4\alpha-\frac{1}{2}}}(1+o(1))$, per cui l'integrale $\int_4^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff 4\alpha - \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{3}{8}$. Per $\alpha = 0$, $f_0(x) = \dfrac{x(1+o(1))}{2\sqrt{x}(1+o(1))} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}(1+o(1))$, e $\int_4^{+\infty} f_0(x)\, dx$ non converge. Per $\alpha < 0$, $f_\alpha(x) = \dfrac{x(1+o(1))}{2x^{3\alpha+\frac{1}{2}}(1+o(1))} = \dfrac{1}{2x^{3\alpha-\frac{1}{2}}}(1+o(1))$, per cui l'integrale $\int_4^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff 3\alpha - \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$, che è assurdo. Ne segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ converge $\iff \alpha > \frac{3}{8}$.
Determiniamo una primitiva di $f_{1/2}$. Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^{3/2}(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} \, dx &\overset{(a)}{=} \int \frac{z^2+1}{z^3(z+2)(z+1)} 2z\, dz = \int \frac{2(z^2+1)\, dz}{z^2(z+1)(z+2)} \\ &\overset{(b)}{=} -\frac{3}{2} \log|z| - \frac{1}{z} + 4\log|z+1| - \frac{5}{2}\log|z+2| + C \\ &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{(\sqrt{x}+1)^8}{x^{3/2}(\sqrt{x}+2)^5}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}} + C, \end{aligned}$$

dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x} = z \implies x = z^2$, $dx = 2z\, dz$, e in (b) la decomposizione $\dfrac{2(z^2+1)}{z^2(z+1)(z+2)} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + 4\dfrac{1}{z+1} - \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{z+2}$.

Allora $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{x+1}{x^{3/2}(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} \, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \log\left(\frac{(\sqrt{x}+1)^8}{x^{3/2}(\sqrt{x}+2)^5}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]_4^\omega =$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{(\sqrt{\omega}+1)^8}{\omega^{3/2}(\sqrt{\omega}+2)^5}\right) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{3^8}{2^3 \cdot 4^5} = \frac{1}{2} + \frac{13}{2}\log 2 - 4\log 3.$$

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x + 3 + \log\left|\frac{x+5}{x+3}\right|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

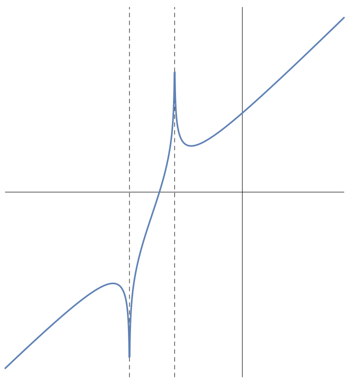
Svolgimento: Si ha dom $f = (-\infty, -5) \cup (-5, -3) \cup (-3, +\infty)$. La funzione è continua, perchè composizione, rapporto, e combinazione lineare di funzioni continue.
Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = x + 3 + o(1)$, per cui f ha asintoto obliquo $y = x + 3$, per $x \to \pm\infty$. Inoltre, $\lim_{x\to(-5)^\pm} f(x) = -\infty$, e $\lim_{x\to(-3)^\pm} f(x) = +\infty$. Calcoliamo la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = 1 + \frac{x+3}{x+5}\,\frac{x+3-(x+5)}{(x+3)^2} = 1 - \frac{2}{(x+3)(x+5)} = \frac{x^2+8x+13}{(x+3)(x+5)},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -4-\sqrt{3}] \cup (-5, -3) \cup [-4+\sqrt{3}, +\infty)$. Quindi f è crescente in $(-\infty, -4-\sqrt{3}]$, in $(-5, -3)$, e in $[-4+\sqrt{3}, +\infty)$, e decrescente in $[-4-\sqrt{3}, -5)$, e in $(-3, -4+\sqrt{3}]$, e ha un punto di massimo locale in $x = -4-\sqrt{3}$, e un punto di minimo locale in $-4+\sqrt{3}$.
Infine,

$$f''(x) = \frac{4(x+4)}{(x+3)^2(x+5)^2},$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in [-4, -3) \cup (-3, +\infty)$. Quindi f è convessa in $[-4, -3)$, e in $(-3, +\infty)$, e concava in $(-\infty, -5)$, in $(-5, -4]$, e in $(3, +\infty)$, mentre $x = -4$ è un punto di flesso. Il grafico di f è riportato in figura.



Analisi Matematica I (Fs-L) 19/6/2018

Risposte non giustificate non verranno considerate. Consegnare solo la "bella copia". Scrivere anche sul retro del foglio.

Cognome:	1		
	2		
Nome:	3		Versione A
	4		
Matricola:	5		
	TOTALE		

Esercizio A1. [punti 5] Disporre in ordine crescente di infinitesimo [cioè, $f \prec g \iff g = o(f)$], per $x \to 0^+$, le seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{(\log(1+x))^2 - \sin(x^2 - 4x^3) - 3x^3}{\operatorname{arctg}(x \log x)}\,, \qquad g(x) = \frac{e^{-x^2} - \cos^2(x)}{\sin(2x - x^3)}\,,$$

$$h(x) = \frac{2\operatorname{arctg}(x^2) - \operatorname{arctg}(2x^2)}{x^4 + \log(1 + \frac{x^3}{\log x})}\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+4n)^n(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})^{n/2}}{(4+\frac{1}{n})^n(1+\sqrt{n+2\log n})}\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A3. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\arcsin t}{y} \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Svolgimento:

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-3} e^{-\alpha x} \log(4 + e^{-2x})\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 3$.

Svolgimento:

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \pi - 2\arcsin\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Esercizio A1. [punti 5] Disporre in ordine crescente di infinitesimo [cioè, $f \prec g \iff g = o(f)$], per $x \to 0^+$, le seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{(\log(1+x))^2 - \sin(x^2 - 4x^3) - 3x^3}{\operatorname{arctg}(x\log x)}, \qquad g(x) = \frac{e^{-x^2} - \cos^2(x)}{\sin(2x - x^3)},$$
$$h(x) = \frac{2\operatorname{arctg}(x^2) - \operatorname{arctg}(2x^2)}{x^4 + \log(1 + \frac{x^3}{\log x})}.$$

Svolgimento: Si ha, per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\big(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\big)^2 - \big(x^2 - 4x^3 + o(x^4)\big) - 3x^3}{x\log x(1+o(1))}\\
&= \frac{\big(x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)\big) - \big(x^2 - 4x^3 + o(x^4)\big) - 3x^3}{x\log x(1+o(1))} = \frac{11}{12}\,\frac{x^3}{\log x}(1+o(1)),\\
g(x) &= \frac{\big(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\big) - \big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\big)^2}{(2x - x^3)(1+o(1))}\\
&= \frac{\big(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\big) - \big(1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\big)}{2x(1+o(1))} = \frac{1}{12}x^3(1+o(1)),\\
h(x) &= \frac{2\big(x^2 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^9)\big) - \big(2x^2 - \frac{8}{3}x^6 + o(x^9)\big)}{x^4 + \frac{x^3}{\log x}(1+o(1))}\\
&= \frac{2x^6(1+o(1)}{\frac{x^3}{\log x}(1+o(1))} = 2x^3\log x(1+o(1)),
\end{aligned}$$

per cui $h \prec g \prec f$.

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+4n)^n(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})^{n/2}}{(4+\frac{1}{n})^n(1+\sqrt{n+2\log n})}.$$

Svolgimento: Si ha

$$\frac{(3+4n)^n(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})^{n/2}}{(4+\frac{1}{n})^n(1+\sqrt{n+2\log n})} \overset{(a)}{=} \frac{e^{3/4}4^n n^n(1+o(1))\frac{e^{-1/4}\sqrt{n}}{n^n}(1+o(1))}{4^n e^{1/4}(1+o(1))\sqrt{n}(1+o(1))} \to e^{1/4},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $(3+4n)^n = 4^n n^n(1+\frac{3}{4n})^n = e^{3/4}4^n n^n(1+o(1))$;
(ii) $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = n^{1/n}\exp\big(\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})\big) - n^{1/n} = n^{1/n}\exp\big\{\frac{1}{n}(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))\big\} - n^{1/n} = n^{1/n}\big\{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^3} + o(\frac{1}{n^3})\big\} - n^{1/n} = \frac{n^{1/n}}{n^2}\big(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\big)$;
(iii) $\big(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\big)^{n/2} = \frac{\sqrt{n}}{n^n}\exp\big\{\frac{n}{2}\log\big(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\big)\big\} = \frac{\sqrt{n}}{n^n}\exp\big\{\frac{n}{2}\big(-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\big)\big\} = \frac{e^{-1/4}\sqrt{n}}{n^n}(1+o(1))$;
(iv) $(4+\frac{1}{n})^n = 4^n(1+\frac{1}{4n})^n = 4^n e^{1/4}(1+o(1))$.

Esercizio A3. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\arcsin t}{y} \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Svolgimento: È un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. La soluzione generale è $\frac{1}{2}y^2 = \int y\,dy = \int \arcsin t\,dt \overset{(a)}{=} t\arcsin t - \int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} \overset{(b)}{=} t\arcsin t + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = t\arcsin t + \sqrt{z} + C = t\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C$, dove in (a) si è usata l'integrazione per parti, e in (b) la sostituzione $z = 1 - t^2 \implies dz = -2t\,dt$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$2 = \frac{1}{2}y_{gen}(0)^2 = 1 + C \iff C = 1,$$

per cui $y^2 = 2(t\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + 1)$, e $y = \pm\sqrt{2(t\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + 1)}$, e dalla condizione iniziale segue che dobbiamo scegliere il segno negativo. Allora

$$y_{Cauchy}(t) = -\sqrt{2(t\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + 1)},$$

e l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è $t \in (-1, 1)$ [perché il radicando è somma di quantità positive].

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-3} e^{-\alpha x} \log(4 + e^{-2x})\,dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 3$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := x^{\alpha-3}e^{-\alpha x}\log(4 + e^{-2x})$ e studiamone il comportamento asintotico per $x \to +\infty$. Per $\alpha > 0$, $f_\alpha(x) = x^{\alpha-3}e^{-\alpha x}\log 4(1 + o(1)) = o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$, per cui l'integrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\forall \alpha > 0$. Per $\alpha = 0$, $f_0(x) = \dfrac{\log 5}{x^3}$, e $\int_1^{+\infty} f_0(x)\,dx$ converge. Per $\alpha < 0$, $f_\alpha(x) = x^{\alpha-3}e^{-\alpha x}\log 4(1 + o(1)) \to +\infty$, per cui l'integrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ non converge. Studiamo il comportamento asintotico di f_α per $x \to 0^+$. Si ha $f_\alpha(x) = x^{\alpha-3}\log 5(1 + o(1))$, per cui $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ converge precisamente quando $\alpha - 3 > -1 \iff \alpha > 2$. Ne segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \alpha > 2$.

Determiniamo le primitive di f_3. Si ha

$$\begin{aligned}\int e^{-3x}\log(4 + e^{-2x})\,dx &\overset{(a)}{=} -\int z^2\log(4 + z^2)\,dz \overset{(b)}{=} -\frac{1}{3}z^3\log(z^2 + 4) + \frac{2}{3}\int \frac{z^4 dz}{z^2 + 4} \\ &\overset{(c)}{=} -\frac{1}{3}z^3\log(z^2 + 4) + \frac{2}{3}\Big(\frac{z^3}{3} - 4z + 8\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{z}{2}\Big) + C\Big) \\ &= -\frac{1}{3}e^{-3x}\log(e^{-2x} + 4) + \frac{2}{9}e^{-3x} - \frac{8}{3}e^{-x} + \frac{16}{3}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{e^{-x}}{2}\Big) + C,\end{aligned}$$

dove si sono usate in (a) la sostituzione $z = e^{-x} \implies dz = -e^{-x}\,dx$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(z) = \log(4 + z^2), & f'(z) = \frac{2z}{4+z^2} \\ g'(z) = z^2, & g(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$, e in (c) la decomposizione $\frac{z^4}{z^2+4} = z^2 - 4 + \frac{16}{z^2+4}$, e il risultato $\int \frac{dz}{z^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\frac{z}{2})}{(\frac{z}{2})^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(\frac{z}{2}) + C$.

Allora $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}\log(4+e^{-2x})\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\Big[-\frac{1}{3}e^{-3x}\log(e^{-2x}+4)+\frac{2}{9}e^{-3x}-\frac{8}{3}e^{-x}+\frac{16}{3}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{e^{-x}}{2}\Big)\Big]_0^\omega =$

$$= \frac{1}{3}\log 5 + \frac{22}{9} - \frac{16}{3}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{2}\Big).$$

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \pi - 2\arcsin\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

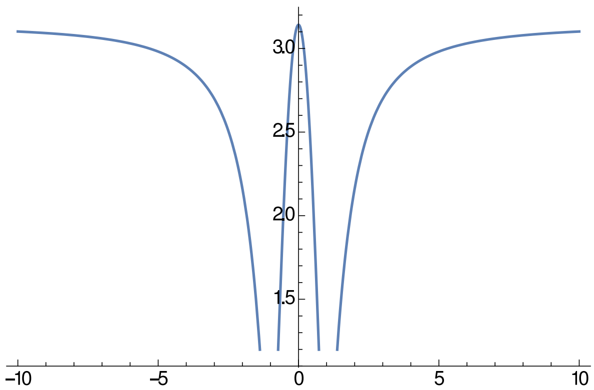
Svolgimento: Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. La funzione è continua, perchè composizione e rapporto di funzioni continue.
Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \pi + o(1)$, per cui f ha asintoto orizzontale $y = \pi$, per $x \to \pm\infty$.
Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per ogni $x \neq \pm 1$,

$$f'(x) = -2\frac{4x(x^4+1) - 4x^3 \cdot 2x^2}{(x^4+1)^2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x^2}{x^4+1})^2}} = \frac{8x(x^4-1)}{(x^4+1)\sqrt{(x^4-1)^2}} = \frac{8x\,\mathrm{sgn}(x^4-1)}{x^4+1},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-1,0] \cup (1,+\infty)$. Quindi f è crescente in $[-1,0]$, e in $[1,+\infty)$, e decrescente in $(-\infty,-1]$, e in $[0,1]$. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^\pm} f'(x) = \pm 4$, e $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \pm 4$, per cui $x = \pm 1$ sono punti angolosi.
Infine, per ogni $x \neq \pm 1$,

$$f''(x) = \frac{8(1-4x^4)\,\mathrm{sgn}(x^4-1)}{(x^4+1)^2},$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$. Quindi f è convessa in $[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, e in $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, e concava in $(-\infty,-1]$, in $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, e in $[1,+\infty)$, mentre $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di flesso. Il grafico di f è riportato in figura.



Analisi Matematica I (Fs-L) 10/7/2018

Risposte non giustificate non verranno considerate. Consegnare solo la "bella copia". Scrivere anche sul retro del foglio.

Cognome:	1		
	2		
Nome:	3		Versione A
	4		
Matricola:	5		
	TOTALE		

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 6, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = \log(1 + \sin x^2) - 2e^{x^2}\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + 2\sqrt[n]{4} + 2\sqrt[n]{3})^n \log(1 + \log n)}{(5^n - (5 - \frac{1}{n})^n)\log(\frac{1}{n} + \frac{1}{\log n})}\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A3. [punti 5] Risolvere l'equazione $z^4 = 4\Big(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\Big)^2$.

Svolgimento:

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^4 \frac{(5+3\sqrt{x})(\operatorname{arctg} x)^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^\alpha}\,dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento:

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \big(2|x| - 1\big) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Analisi Matematica I (Fs-L) 10/7/2018

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 6, centrato in $x_0 = 0$, della funzione
$$f(x) = \log(1 + \sin x^2) - 2e^{x^2}.$$

Svolgimento: Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log\Big(1 + x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^9)\Big) - 2\Big(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^7)\Big)\\
&= \Big(x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^9)\Big) - \frac{1}{2}\Big(x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^9)\Big)^2\\
&\quad + \frac{1}{3}\Big(x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^9)\Big)^3 + o(x^7) - 2 - 2x^2 - x^4 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^7)\\
&= x^2 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^7) - 2 - 2x^2 - x^4 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^7)\\
&= -2 - x^2 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^7),
\end{aligned}$$

dove si sono usati gli sviluppi:
(*i*) $\sin z = z - \dfrac{1}{6}z^3 + o(z^4)$, con $z = x^2$, per cui $o(z^4) = o(x^8)$;
(*ii*) $\log(1+z) = z - \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{3}z^3 + o(z^3)$, con $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^6 + o(x^7)$, per cui $o(z^3) = o(x^6)$;
(*iii*) $e^z = 1 + z + \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{6}z^3 + o(z^3)$, con $z = x^2$, per cui $o(z^3) = o(x^6)$.

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + 2\sqrt[n]{4} + 2\sqrt[n]{3})^n \log(1 + \log n)}{(5^n - (5 - \frac{1}{n})^n)\log(\frac{1}{n} + \frac{1}{\log n})}.$$

Svolgimento: Si ha
$$\frac{(1 + 2\sqrt[n]{4} + 2\sqrt[n]{3})^n \log(1 + \log n)}{(5^n - (5 - \frac{1}{n})^n)\log(\frac{1}{n} + \frac{1}{\log n})} \overset{(a)}{=} \frac{5^n 12^{2/5}(1 + o(1))\log\log n(1 + o(1))}{5^n(1 - e^{-1/5})(1 + o(1))(-\log\log n)(1 + o(1))} \to \frac{12^{2/5}}{e^{-1/5} - 1},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(*i*) $\sqrt[n]{4} = 4^{1/n} = \exp\Big(\dfrac{\log 4}{n}\Big) = 1 + \dfrac{\log 4}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, e $\sqrt[n]{3} = 1 + \dfrac{\log 3}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, per cui $(1+2\sqrt[n]{4}+2\sqrt[n]{3})^n = \Big(1+2+\dfrac{2\log 4}{n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)+2+\dfrac{2\log 3}{n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)^n = \Big(5+\dfrac{2\log 12}{n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)^n = 5^n\Big(1 + \dfrac{2\log 12}{5n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)^n = 5^n \exp\Big\{n\log\Big(1 + \dfrac{2\log 12}{5n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big\} = 5^n \exp\Big\{n\Big(\dfrac{2\log 12}{5n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big\} = 5^n \exp\Big(\dfrac{2\log 12}{5}\Big)(1 + o(1)) = 5^n 12^{2/5}(1 + o(1))$;
(*ii*) $5^n - \Big(5 - \dfrac{1}{n}\Big)^n = 5^n\Big\{1 - \Big(1 - \dfrac{1}{5n}\Big)^n\Big\} = 5^n(1 - e^{-1/5})(1 + o(1))$;
(*iii*) $\log\Big(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\log n}\Big) = \log\Big(\dfrac{1}{\log n}(1 + o(1))\Big) = -\log\log n(1 + o(1))$.

Esercizio A3. [punti 5] Risolvere l'equazione $z^4 = 4\Big(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\Big)^2$.

Svolgimento: Sia $\omega = 4\Big(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\Big)^2$, e calcoliamo $|\omega| = 4\Big(\dfrac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i\sqrt{3}|}\Big)^2 = 4$, e $\arg(\omega) = 2\arg(1+i\sqrt{3}) - 2\arg(1-i\sqrt{3}) = 2\dfrac{\pi}{3} + 2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi$. Allora $z = \sqrt[4]{\omega} = \Big\{\sqrt{2}\Big(\cos\Big(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}\Big)\Big) : k = 0,1,2,3\Big\} = \Big\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3}), -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i), -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3}), \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)\Big\}$.

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^4 \frac{(5+3\sqrt{x})(\operatorname{arctg} x)^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^\alpha}\,dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{(5+3\sqrt{x})(\operatorname{arctg} x)^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^\alpha}$, $x \in (0,4)$.

Poiché, per $x \to 0^+$, $f_\alpha(x) = \dfrac{5x^{2\alpha-1}(1+o(1))}{4^\alpha x^\alpha(1+o(1))} = \dfrac{5}{4^\alpha x^{1-\alpha}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_0^{x_0} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \alpha > 0$.

Poiché, per $x \to 4^-$, $f_\alpha(x) = \dfrac{10(\operatorname{arctg} 4)^{2\alpha-1}(1+o(1))}{2^\alpha(4-x)^\alpha(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{x_0}^4 f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \alpha < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^4 f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff 0 < \alpha < 1$.

Determiniamo una primitiva di $f_{1/2}$. Si ha

$$\int \frac{5+3\sqrt{x}}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = 5\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{4-x}}\,,$$

ed inoltre

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \overset{(a)}{=} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin\Big(\frac{x-2}{2}\Big) + C,$$

[dove in (a) si è usata la sostituzione $z = \frac{x-2}{2}$] e

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \int \frac{-d(4-x)}{\sqrt{4-x}} = -2\sqrt{4-x} + C\,,$$

per cui

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = 5\arcsin\Big(\frac{x-2}{2}\Big) - 6\sqrt{4-x} + C\,.$$

Allora $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \lim_{b\to4^-}\Big(5\arcsin\Big(\frac{b-2}{2}\Big) - 6\sqrt{4-b}\Big) - \lim_{a\to0^+}\Big(5\arcsin\Big(\frac{a-2}{2}\Big) - 6\sqrt{4-a}\Big) = 5\pi + 12.$

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \big(2|x| - 1\big) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

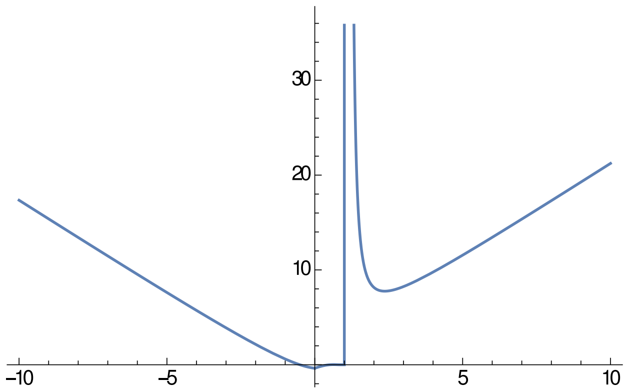
Svolgimento: Si ha $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La funzione è continua, perchè composizione, prodotto e rapporto di funzioni continue.
Per $x \to +\infty$, si ha $f(x) = (2x-1)(1 + \frac{1}{x-1} + o(\frac{1}{x-1})) = 2x - 1 + \frac{2x-1}{x-1} + o(1) = 2x + 1 + o(1)$, per cui f ha asintoto obliquo $y = 2x + 1$.
Per $x \to -\infty$, si ha $f(x) = -(2x+1)(1+\frac{1}{x-1}+o(\frac{1}{x-1})) = -2x-1-\frac{2x+1}{x-1}+o(1) = -2x-3+o(1)$, per cui f ha asintoto orizzontale $y = -2x - 3$.
Inoltre, $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)(1+o(1)) = 0$, e $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)(1+o(1)) = +\infty$, per cui $x = 0$ è asintoto verticale da destra.
Calcoliamo la derivata prima. Si ha

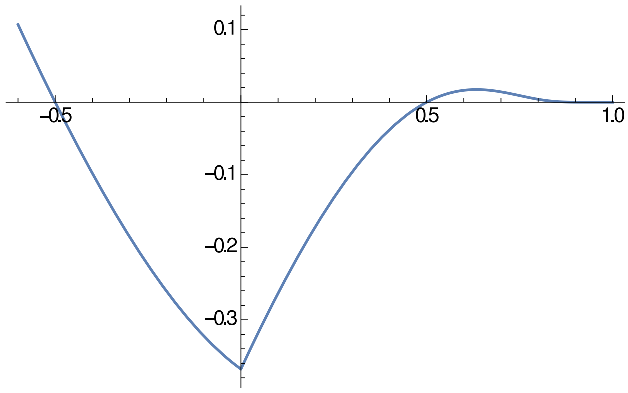
$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(2\,\mathrm{sgn}(x) - \frac{2|x|-1}{(x-1)^2}\right) = \begin{cases} \frac{-2x^2+6x-1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}, & x < 0, \\ \frac{2x^2-6x+3}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \end{cases}$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (0, \frac{3-\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. Quindi f è crescente in $[0, \frac{3-\sqrt{3}}{2}]$, e in $[\frac{3+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, e decrescente in $(-\infty, 0]$, in $[\frac{3-\sqrt{3}}{2}, 1)$, e in $(1, \frac{3+\sqrt{3}}{2}]$. Allora, $x = 0$ e $x = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di minimo relativo, con $f(0) = -\frac{1}{e}$, e $f(\frac{3+\sqrt{3}}{2}) = (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}-1}$, e $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ è un punto di massimo relativo (come si vede meglio nella figura di destra), con $f(\frac{3-\sqrt{3}}{2}) = (2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}-1}$.
Inoltre, $f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = -\frac{1}{e}$, e $f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{3}{e}$. Quindi $x = 0$ è un punto angoloso (come si vede meglio nella figura di destra).
Infine,

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{5-8x}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}}, & x < 0, \\ \dfrac{4x-3}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{3}{4}, 1) \cup (1, +\infty)$. Quindi f è convessa in $(-\infty, 0]$, in $[\frac{3}{4}, 1)$, e in $(1, +\infty)$, e concava in $[0, \frac{3}{4}]$, mentre $x = \frac{3}{4}$ è un punto di flesso (come si vede meglio nella figura di destra). Il grafico di f è riportato nella figura di sinistra.





Analisi Matematica I (Fs-L) 5/9/2018

Risposte non giustificate non verranno considerate. Consegnare solo la "bella copia". Scrivere anche sul retro del foglio.

Cognome:	1	
	2	
Nome:	3	
	4	
Matricola:	5	
	TOTALE	

Versione A

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 5, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = 2x^2(e^{-x} - 1)^2 + \cos^2 x\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{1/n} - \cos(\frac{2}{n})\right)^n}{\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}\right)^n}\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A3. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2t) \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento:

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^{2\alpha}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+2}\right) dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 1$.

Svolgimento:

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x\sqrt[3]{x^2 - 1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Analisi Matematica I (Fs-L) 5/9/2018

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 5, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = 2x^2(e^{-x} - 1)^2 + \cos^2 x\,.$$

Svolgimento: Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2\Big(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - 1\Big)^2 + \Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\Big)^2 \\ &= 2x^2\Big(x^2 - x^3 + o(x^3)\Big) + \Big(1 - x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\Big) \\ &= 1 - x^2 + \frac{7}{3}x^4 - 2x^5 + o(x^5), \end{aligned}$$

dove si sono usati gli sviluppi:
$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + o(z^3)$, con $z = -x$, per cui $o(z^3) = o(x^3)$,
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$.

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big(e^{1/n} - \cos(\frac{2}{n})\big)^n}{\big(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}\big)^n}\,.$$

Svolgimento: Si ha

$$\frac{\big(e^{1/n} - \cos(\frac{2}{n})\big)^n}{\big(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}\big)^n} \overset{(a)}{=} \frac{\frac{e^{5/2}}{n^n}(1 + o(1))}{\frac{e^2}{n^n}(1 + o(1))} \to \sqrt{e},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $\big(e^{1/n} - \cos(\frac{2}{n})\big)^n = \big(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - 1 + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big)^n = \frac{1}{n^n}\big(1 + \frac{5}{2n} + o(\frac{1}{n})\big)^n = \frac{1}{n^n}\exp\big(n\log\big(1 + \frac{5}{2n} + o(\frac{1}{n})\big)\big) = \frac{1}{n^n}\exp\big(n\cdot\frac{5}{2n}(1 + o(1))\big) = \frac{e^{5/2}}{n^n}(1 + o(1))$;
(ii) $\big(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}\big)^n = \frac{1}{n^n}\exp\big(n\log\big(1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}\big)\big) = \frac{1}{n^n}\exp\big(n\cdot\frac{2}{n}(1 + o(1))\big) = \frac{e^2}{n^n}(1 + o(1))$.

Esercizio A3. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2t) \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: È un'equazione differenziale del secondo ordine lineare non omogenea. L'equazione caratteristica $\lambda^2+4=0$ ha soluzioni $\lambda = \pm 2i$. L'equazione omogenea associata ha soluzione $y_{om}(t) = c_1\cos(2t)+c_2\sin(2t)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma $y_p(t) = at\cos(2t) + bt\sin(2t)$. Sostituendo nell'equazione differenziale, otteniamo $-4a\sin(2t)+4b\cos(2t)-4at\cos(2t)-4bt\sin(2t)+4at\cos(2t)+4bt\sin(2t) = \sin(2t) \iff a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$, per cui $y_p(t) = -\frac{1}{4}t\cos(2t)$, e la soluzione generale dell'equazione non omogenea è $y_{gen}(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t)$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = c_1 \\ 1 = y'_{gen}(0) = 2c_2 - \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = \frac{5}{8}. \end{cases}$$

Allora $y_{Cauchy}(t) = \cos(2t) + \frac{5}{8}\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^{2\alpha}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+2}\right) dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 1$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{1}{(x+3)^{2\alpha}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$ e studiamone il comportamento asintotico per $x \to +\infty$. Si ha, $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^{2\alpha+1}}(1+o(1))$, per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff 2\alpha+1 > 1 \iff \alpha > 0$.

Determiniamo le primitive di f_1. Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+3)^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+2}\right) dx &\overset{(a)}{=} -\frac{1}{x+3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+2}\right) - \int \frac{dx}{(x+3)(x^2+4x+5)} \\ &\overset{(b)}{=} -\frac{1}{x+3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+2}\right) - \frac{1}{2}\log|x+3| + \frac{1}{4}\log(x^2+4x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C, \end{aligned}$$

dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x+2}), & f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2+1} \\ g'(x) = \frac{1}{(x+3)^2}, & g(x) = -\frac{1}{x+3} \end{cases}$,
e in (b) la decomposizione $\frac{1}{(x+3)(x^2+4x+5)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+3} - \frac{1}{4}\frac{2x+4}{x^2+4x+5} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+2)^2+1}$.

Allora $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+2}\right) dx = \lim_{\omega\to+\infty} \left\{ -\frac{1}{\omega+3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega+2}\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{\omega^2+4\omega+5}{(\omega+3)^2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\omega+2) \right\} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{9}{5}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2.$

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x\sqrt[3]{x^2-1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

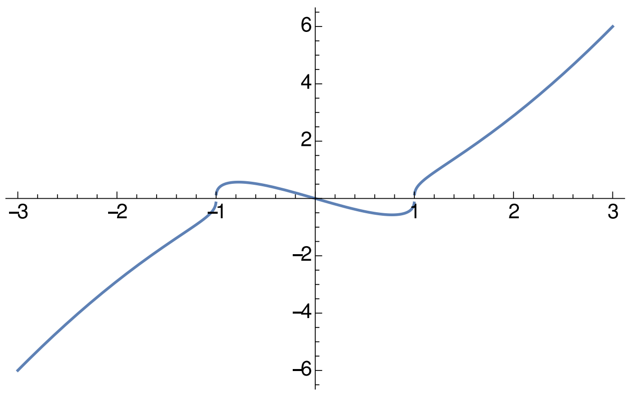
Svolgimento: Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. La funzione è continua, perchè composizione e prodotto di funzioni continue.
Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = x^{4/3}(1 + o(1))$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per $x \neq \pm 1$,

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2-1} + \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{(x^2-1)^{2/3}} = \frac{5x^2-3}{3(x^2-1)^{2/3}}\,,$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}] \cup [\sqrt{\frac{3}{5}}, +\infty)$. Quindi f è crescente in $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}]$, e in $[\sqrt{\frac{3}{5}}, +\infty)$, e decrescente in $[-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}]$, per cui $x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ è un punto di massimo locale, mentre $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ è un punto di minimo locale. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^\pm} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^\pm} \frac{2+o(1)}{3\cdot 4^{1/3}(x+1)^{2/3}(1+o(1)} = +\infty$, e $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{2+o(1)}{3\cdot 4^{1/3}(x-1)^{2/3}(1+o(1)} = +\infty$, per cui $x = \pm 1$ sono punti a tangente verticale.
Infine, per $x \neq \pm 1$, si ha

$$f''(x) = \frac{10x(x^2-1)^{2/3} - \frac{4}{3}x(x^2-1)^{-1/3}(5x^2-3)}{3(x^2-1)^{4/3}} = \frac{2x(5x^2-9)}{3(x^2-1)^{5/3}},$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in [-\frac{3}{\sqrt{5}}, -1) \cup [0, 1) \cup [\frac{3}{\sqrt{5}}, +\infty)$. Quindi f è convessa in $[-\frac{3}{\sqrt{5}}, -1]$, in $[0, 1]$, e in $[\frac{3}{\sqrt{5}}, +\infty)$, e concava in $(-\infty, -\frac{3}{\sqrt{5}}]$, in $[-1, 0]$, e in $[1, \frac{3}{\sqrt{5}}]$, mentre $x = -1$, $x = 0$, e $x = 1$ sono punti di flesso. Il grafico di f è riportato in figura.



Analisi Matematica I (Fs-L) 17/9/2018

Risposte non giustificate non verranno considerate. Consegnare solo la "bella copia". Scrivere anche sul retro del foglio.

Cognome:		1	
		2	
Nome:		3	
		4	
Matricola:		5	
		TOTALE	

Versione A

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = 2e^{x+x^2} - \sin(2x + 3x^2)\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{n^2+5n} + 5^n n^{n^2+4n}} - n^{n+5}}{(5+\frac{1}{n})^n(3n^2 + 2\sqrt{n} + \log n)^2}\,.$$

Svolgimento:

Esercizio A3. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y\,\mathrm{tg}(t) = \mathrm{tg}(t) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento:

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\,\mathrm{arctg}(x \log x)|^{1-\alpha}}{(x+4)^{\alpha}\sqrt{x+5}}\, dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 1$.

Svolgimento:

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 2x + 2) - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Esercizio A1. [punti 5] Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4, centrato in $x_0 = 0$, della funzione

$$f(x) = 2e^{x+x^2} - \sin(2x + 3x^2)\,.$$

Svolgimento: Si ha, per $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2e^{x+x^2} - \sin(2x + 3x^2)\\
&= 2\big(1 + x + x^2 + \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \frac{1}{6}(x + x^2)^3 + \frac{1}{24}(x + x^2)^4 + o(x^4)\big)\\
&\quad - \big(2x + 3x^2 - \frac{1}{6}(2x + 3x^2)^3 + o(x^4)\big)\\
&= 2\big(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{25}{24}x^4 + o(x^3)\big) - \big(2x + 3x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 6x^4 + o(x^3)\big)\\
&= 2 + \frac{11}{3}x^3 + \frac{97}{12}x^4 + o(x^4),
\end{aligned}$$

dove si sono usati gli sviluppi:
$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + o(z^4)$, con $z = x + x^2$, per cui $o(z^4) = o(x^4)$,
$\sin z = z - \frac{1}{6}z^3 + o(z^4)$, con $z = 2x + 3x^2$, per cui $o(z^4) = o(x^4)$.

Esercizio A2. [punti 5] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{n^2+5n} + 5^n n^{n^2+4n}} - n^{n+5}}{(5 + \frac{1}{n})^n (3n^2 + 2\sqrt{n} + \log n)^2}\,.$$

Svolgimento: Si ha

$$\frac{\sqrt[n]{n^{n^2+5n} + 5^n n^{n^2+4n}} - n^{n+5}}{(5 + \frac{1}{n})^n (3n^2 + 2\sqrt{n} + \log n)^2} \overset{(a)}{=} \frac{n^4 5^n (1 + o(1))}{5^n e^{1/5} 9 n^4 (1 + o(1))} \to \frac{1}{9e^{1/5}},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $\sqrt[n]{n^{n^2+5n} + 5^n n^{n^2+4n}} - n^{n+5} = n^{n+5}\big(\sqrt[n]{1 + \frac{5^n}{n}} - 1\big) = n^{n+5}\big\{\exp\big(\frac{1}{n}\log\big(1 + \frac{5^n}{n^n}\big)\big) - 1\big\} = n^{n+5}\big\{\exp\big(\frac{1}{n}\frac{5^n}{n^n}(1 + o(1))\big) - 1\big\} = n^{n+5}\frac{5^n}{n^{n+1}}(1 + o(1)) = n^4 5^n (1 + o(1))$;
(ii) $(5 + \frac{1}{n})^n = 5^n (1 + \frac{1}{5n})^n = 5^n e^{1/5}(1 + o(1))$.

Esercizio A3. [punti 5] Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y\,\mathrm{tg}(t) = \mathrm{tg}(t) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: È un'equazione differenziale del primo ordine lineare non omogenea. L'equazione omogenea associata ha soluzione $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt \iff \log|y| = 2\log|\cos t| + C \iff$ $y_{om}(t) = k\cos^2 t$, con $k \in \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma $y_p(t) = k(t)\cos^2 t$. Allora $-2k(t)\sin t\cos t + k'(t)\cos^2 t + 2k(t)\cos^2 t\,\mathrm{tg}\,t = \mathrm{tg}\,t \iff$ $k'(t) = \frac{\mathrm{tg}\,t}{\cos^2 t} = \frac{\sin t}{\cos^3 t} \iff k(t) = \int \frac{\sin t}{\cos^3 t}\,dt = \frac{1}{2\cos^2 t} + c$, per cui $y_p(t) = \frac{1}{2}$, e la soluzione generale dell'equazione non omogenea è $y_g(t) = k\cos^2 t + \frac{1}{2}$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene $k = \frac{1}{2}$, per cui la soluzione del problema di Cauchy è $y_C(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 t)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Esercizio A4. [punti 7] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\,\mathrm{arctg}(x\log x)|^{1-\alpha}}{(x+4)^\alpha\sqrt{x+5}}\,dx\,.$$

Calcolarne il valore per $\alpha = 1$.

Svolgimento: Sia $f_\alpha(x) := \dfrac{|\,\mathrm{arctg}(x\log x)|^{1-\alpha}}{(x+4)^\alpha\sqrt{x+5}}$. Poiché, per $x \to 0^+$, $f_\alpha(x) = \dfrac{|x\log x|^{1-\alpha}(1+o(1))}{4^\alpha\sqrt{5}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_0^{x_0} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2$. Poiché, per $x \to +\infty$, $f_\alpha(x) = \dfrac{(\frac{\pi}{2})^{1-\alpha}(1+o(1))}{x^{\alpha+1/2}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{x_0}^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \alpha + \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$.
Ne segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge $\iff \frac{1}{2} < \alpha < 2$.
Determiniamo una primitiva di f_1. Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+5}}\,dx &\overset{(a)}{=} \int \frac{2z\,dz}{(z^2-1)z} = \int \frac{2dz}{z^2-1} \\ &\overset{(b)}{=} \log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \log\left|\frac{\sqrt{x+5}-1}{\sqrt{x+5}+1}\right| + C,\end{aligned}$$

dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x+5} = z \implies x = z^2 - 5$, $dx = 2z\,dz$, e in (b) la decomposizione $\dfrac{2}{z^2-1} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+1}$.
Allora $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+5}}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\Big[\log\Big|\frac{\sqrt{x+5}-1}{\sqrt{x+5}+1}\Big|\Big]_0^\omega =$
$\displaystyle= \lim_{\omega\to+\infty}\log\left(\frac{\sqrt{\omega+5}-1}{\sqrt{\omega+5}+1}\right) - \log\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

Esercizio A5. [punti 8] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 2x + 2) - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza o decrescenza, punti di flesso, intervalli di concavità o convessità. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

Svolgimento: Si ha $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La funzione è continua, perchè composizione e rapporto di funzioni continue.
Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = 2 \log x(1 + o(1))$, per cui f non ha asintoto orizzontale, né asintonto obliquo, per $x \to \pm\infty$. Inoltre, $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \mp\pi$. Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per ogni $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{2}{(x-1)^2+1} = \frac{2x}{x^2-2x+2}\,,$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$. Quindi f è crescente in $[0, 1)$, e in $(1, +\infty)$, e decrescente in $(-\infty, 0]$, per cui $x = 0$ è un punto di minimo locale. Inoltre, $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = 2$.
Infine, per ogni $x \neq 1$,

$$f''(x) = -\frac{2(x^2-2)}{(x^2-2x+2)^2},$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{2}, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$. Quindi f è convessa in $[-\sqrt{2}, 1)$, e in $(1, \sqrt{2}]$, e concava in $(-\infty, -\sqrt{2}]$, in $[-\sqrt{2}, +\infty)$, mentre $x = \pm\sqrt{2}$ sono punti di flesso. Il grafico di f è riportato in figura.