

Analisi Matematica II
Integrali superficiali (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Poniamo $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva, in quanto $\Phi(x, y) = \Phi(x', y') \implies (x, y) = (x', y')$. Inoltre, $\text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} =$

2. Infine, Φ è evidentemente suriettiva, cioè la sua immagine è il grafico della funzione $z = x^2 + y^2$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un paraboloide ellittico].

(2) Poniamo $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva, in quanto $\Phi(x, y) = \Phi(x', y') \implies (x, y) = (x', y')$. Inoltre, $\text{rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & -2y \end{pmatrix} =$

2. Infine, Φ è evidentemente suriettiva, cioè la sua immagine è il grafico della funzione $z = x^2 - y^2$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un paraboloide iperbolico].

(3) Poniamo $A = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0, 2\pi)$, $\Phi(z, \vartheta) = (z \cos \vartheta, \frac{1}{2}z \sin \vartheta, z)$, $(z, \vartheta) \in \overline{A} = \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A , in quanto se $(z_1, \vartheta_1), (z_2, \vartheta_2) \in A$, si ha $\Phi(z_1, \vartheta_1) = \Phi(z_2, \vartheta_2) \implies$

$$\begin{cases} z_1 = z_2 \\ \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2 \end{cases} \implies (z_1, \vartheta_1) = (z_2, \vartheta_2). \text{ Inoltre, } \Phi_z \wedge \Phi_\vartheta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \vartheta & \frac{1}{2} \sin \vartheta & 1 \\ -z \sin \vartheta & \frac{1}{2} z \cos \vartheta & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} z \cos \vartheta \vec{i} -$$

$z \sin \vartheta \vec{j} + \frac{1}{2} z \vec{k} \neq 0$, se $(z, \vartheta) \in A$. Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

tale che $z^2 = x^2 + 4y^2$, si ha $\begin{cases} \cos \vartheta = \frac{x}{z} \\ \sin \vartheta = \frac{2y}{z} \end{cases}$, che individuano univocamente $\vartheta \in [0, 2\pi]$, per cui

$\Phi(z, \vartheta) = (x, y, z)$; mentre, $\Phi(0, \vartheta) = (0, 0, 0)$, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un cono ellittico].

(4) Poniamo $A = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, $\Phi(z, \vartheta) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, z)$, $(z, \vartheta) \in \overline{A} = \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A , in quanto se $(z_1, \vartheta_1), (z_2, \vartheta_2) \in A$, si ha $\Phi(z_1, \vartheta_1) = \Phi(z_2, \vartheta_2) \implies$

$$\begin{cases} z_1 = z_2 \\ \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2 \end{cases} \implies (z_1, \vartheta_1) = (z_2, \vartheta_2). \text{ Inoltre, } \Phi_z \wedge \Phi_\vartheta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \end{vmatrix} = -\cos \vartheta \vec{i} -$$

$\sin \vartheta \vec{j} \neq 0$, se $(z, \vartheta) \in A$. Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $x^2 + y^2 = 1$,

si ha $\begin{cases} \cos \vartheta = x \\ \sin \vartheta = y \end{cases}$, che individuano univocamente $\vartheta \in [0, 2\pi]$, per cui $\Phi(z, \vartheta) = (x, y, z)$. Quindi Φ

è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un cilindro rotondo].

(5) Poniamo $A = \mathbb{R}^2$, $\Phi(z, t) = (\cosh t, \sinh t, z)$, $(z, t) \in \overline{A} = \mathbb{R}^2$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva

$$\text{in } A, \text{ in quanto se } (z_1, t_1), (z_2, t_2) \in A, \text{ si ha } \Phi(z_1, t_1) = \Phi(z_2, t_2) \implies \begin{cases} z_1 = z_2 \\ \cosh t_1 = \cosh t_2 \\ \sinh t_1 = \sinh t_2 \end{cases} \implies$$

$$(z_1, t_1) = (z_2, t_2). \text{ Inoltre, } \Phi_z \wedge \Phi_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \end{vmatrix} = -\cosh t \vec{i} + \sinh t \vec{j} \neq 0, \text{ se } (z, t) \in A. \text{ Infine,}$$

Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $x^2 - y^2 = 1, x > 0$, si ha $\begin{cases} \cosh t = x \\ \sinh t = y, \end{cases}$ che individuano univocamente $t \in \mathbb{R}$, per cui $\Phi(z, t) = (x, y, z)$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [una falda di un cilindro iperbolico].

(6) Poniamo $A := (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, $\Phi(\vartheta, \varphi) = (3 \cos \vartheta \sin \varphi, 3 \sin \vartheta \sin \varphi, 1 + 3 \cos \varphi)$, $(\vartheta, \varphi) \in \overline{A} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A , in quanto se $(\vartheta_1, \varphi_1), (\vartheta_2, \varphi_2) \in A$, si

$$\text{ha } \Phi(\vartheta_1, \varphi_1) = \Phi(\vartheta_2, \varphi_2) \implies \begin{cases} \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2 \\ \cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 \end{cases} \implies (\vartheta_1, \varphi_1) = (\vartheta_2, \varphi_2). \text{ Inoltre, } \Phi_\vartheta \wedge \Phi_\varphi =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 \sin \varphi \sin \vartheta & 3 \sin \varphi \cos \vartheta & 0 \\ 3 \cos \varphi \cos \vartheta & 3 \cos \varphi \sin \vartheta & -3 \sin \varphi \end{vmatrix} = -9 \sin^2 \varphi \cos \vartheta \vec{i} - 9 \sin^2 \varphi \sin \vartheta \vec{j} - 9 \sin \varphi \cos \varphi \vec{k} \neq 0, \text{ in } A.$$

Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 4), (0, 0, -2)\}$ tale che $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$, si ha

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{3}(z - 1) \\ \cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{9 - (z - 1)^2}} \\ \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{9 - (z - 1)^2}}, \end{cases} \text{ che individuano univocamente } \varphi \in (0, \pi), \text{ e } \vartheta \in [0, 2\pi], \text{ per}$$

cui $\Phi(\vartheta, \varphi) = (x, y, z)$; mentre, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $\Phi(\vartheta, 0) = (0, 0, 4)$, $\Phi(\vartheta, \pi) = (0, 0, -2)$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [una sfera].

(7) Poniamo $A := (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, $\Phi(\vartheta, \varphi) = (2 \cos \vartheta \sin \varphi, 1 + \sin \vartheta \sin \varphi, \frac{2}{3} \cos \varphi)$, $(\vartheta, \varphi) \in \overline{A} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A , in quanto se $(\vartheta_1, \varphi_1), (\vartheta_2, \varphi_2) \in A$, si

$$\text{ha } \Phi(\vartheta_1, \varphi_1) = \Phi(\vartheta_2, \varphi_2) \implies \begin{cases} \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2 \\ \cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 \end{cases} \implies (\vartheta_1, \varphi_1) = (\vartheta_2, \varphi_2). \text{ Inoltre, } \Phi_\vartheta \wedge \Phi_\varphi =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \sin \varphi \sin \vartheta & \sin \varphi \cos \vartheta & 0 \\ 2 \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & -\frac{2}{3} \sin \varphi \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} \sin^2 \varphi \cos \vartheta \vec{i} - \frac{4}{3} \sin^2 \varphi \sin \vartheta \vec{j} - 2 \sin \varphi \cos \varphi \vec{k} \neq 0, \text{ in } A.$$

Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, \pm \frac{2}{3})\}$ tale che $x^2 + 4(y - 1)^2 + 9z^2 = 1$,

$$\text{si ha } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{3}{2}z \\ \cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{4 - 9z^2}} \\ \sin \vartheta = \frac{2(y - 1)}{\sqrt{4 - 9z^2}}, \end{cases} \text{ che individuano univocamente } \varphi \in (0, \pi), \text{ e } \vartheta \in [0, 2\pi], \text{ per cui } \Phi(\vartheta, \varphi) =$$

(x, y, z) ; mentre, per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $\Phi(\vartheta, 0) = (0, 0, \frac{2}{3})$, $\Phi(\vartheta, \pi) = (0, 0, -\frac{2}{3})$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un'ellisse].

(8) Poniamo $A := (0, 2\pi) \times (0, +\infty)$, $\Phi(\vartheta, t) = (\cos \vartheta \sinh t, \frac{1}{2} \sin \vartheta \sinh t, -\frac{1}{3} \cosh t)$, $(\vartheta, t) \in \overline{A} = [0, 2\pi] \times [0, +\infty)$. Allora $\Phi \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A , in quanto se $(\vartheta_1, t_1), (\vartheta_2, t_2) \in A$, si

$$\text{ha } \Phi(\vartheta_1, t_1) = \Phi(\vartheta_2, t_2) \implies \begin{cases} \cos \vartheta_1 \sinh t_1 = \cos \vartheta_2 \sinh t_2 \\ \sin \vartheta_1 \sinh t_1 = \sin \vartheta_2 \sinh t_2 \\ \cosh t_1 = \cosh t_2 \end{cases} \implies t_1 = t_2, \text{ e quindi } \vartheta_1 = \vartheta_2.$$

Inoltre, $\Phi_{\vartheta} \wedge \Phi_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \vartheta \sinh t & \frac{1}{2} \cos \vartheta \sinh t & 0 \\ \cos \vartheta \cosh t & \frac{1}{2} \sin \vartheta \cosh t & -\frac{1}{3} \sinh t \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} \sinh^2 t \cos \vartheta \vec{i} - \frac{1}{3} \sinh^2 t \sin \vartheta \vec{j} - \frac{1}{2} \sinh t \cosh t \vec{k} \neq 0$, in A . Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $x^2 +$

$$4y^2 - 9z^2 = -1, z < 0, \text{ si ha } \begin{cases} \cosh t = -3z \\ \cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{9z^2-1}} \\ \sin \vartheta = \frac{2y}{\sqrt{9z^2-1}}, \end{cases} \text{ che individuano univocamente } t > 0, \text{ e } \vartheta \in [0, 2\pi],$$

per cui $\Phi(\vartheta, \varphi) = (x, y, z)$. Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [una falda di un iperboloide ellittico].

(9) Poniamo $A := (0, 2\pi) \times (0, +\infty)$, $\Phi(\vartheta, t) = (1 + \cos \vartheta \cosh t, \sin \vartheta \cosh t, \sinh t)$, $(\vartheta, t) \in \bar{A} = [0, 2\pi] \times [0, +\infty)$. Allora $\Phi \in C^1(\bar{A}; \mathbb{R}^3)$, ed è iniettiva in A , in quanto se $(\vartheta_1, t_1), (\vartheta_2, t_2) \in A$, si ha

$$\Phi(\vartheta_1, t_1) = \Phi(\vartheta_2, t_2) \implies \begin{cases} \cos \vartheta_1 \cosh t_1 = \cos \vartheta_2 \cosh t_2 \\ \sin \vartheta_1 \cosh t_1 = \sin \vartheta_2 \cosh t_2 \\ \sinh t_1 = \sinh t_2 \end{cases} \implies t_1 = t_2, \text{ e quindi } \vartheta_1 = \vartheta_2. \text{ Inoltre,}$$

$$\Phi_{\vartheta} \wedge \Phi_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \vartheta \cosh t & \cos \vartheta \cosh t & 0 \\ \cos \vartheta \sinh t & \sin \vartheta \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t \cos \vartheta \vec{i} + \cosh^2 t \sin \vartheta \vec{j} - \sinh t \cosh t \vec{k} \neq 0,$$

in A . Infine, Φ è suriettiva, in quanto, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $(x-1)^2 + y^2 - z^2 = 1$, si ha

$$\begin{cases} \sinh t = z \\ \cos \vartheta = \frac{x-1}{\sqrt{1+z^2}} \\ \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{1+z^2}}, \end{cases} \text{ che individuano univocamente } t > 0, \text{ e } \vartheta \in [0, 2\pi], \text{ per cui } \Phi(\vartheta, \varphi) = (x, y, z).$$

Quindi Φ è una rappresentazione parametrica regolare della superficie proposta [un iperboloide iperbolico].

□

Svolgimento esercizio 2

(1) Osserviamo che $P_0 = (1, 1, 1) = \Phi(1, 1)$, per cui $\Phi_u(1, 1) = (1, 0, v)|_{(1,1)} = (1, 0, 1)$, e $\Phi_v(1, 1) = (0, 1, u)|_{(1,1)} = (0, 1, 1)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(1, 1) \wedge$

$$\Phi_v(1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \text{ una rappresentazione parametrica della retta normale è } \vec{r}(\lambda) =$$

$P_0 + \lambda \vec{n}(P_0) = (1 - \lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0) \rangle = -(x-1) - (y-1) + (z-1) \iff z = x + y - 1$.

(2) Osserviamo che $P_0 = (1, 1, 1) = \Phi(1, 0)$, per cui $\Phi_u(1, 0) = (1, 1, 2u)|_{(1,0)} = (1, 1, 2)$, e $\Phi_v(1, 0) = (1, -1, 2v)|_{(1,0)} = (1, -1, 0)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(1, 0) \wedge$

$$\Phi_v(1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \text{ una rappresentazione parametrica della retta normale è}$$

$\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda \vec{n}(P_0) = (1 + 2\lambda, 1 + 2\lambda, 1 - 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0) \rangle = 2(x-1) + 2(y-1) - 2(z-1) \iff z = x + y - 1$.

- (3) Osserviamo che $P_0 = (1, 1, 0) = \Phi(1, 0)$, per cui $\Phi_u(1, 0) = (2u, 2u, v)|_{(1,0)} = (2, 2, 0)$, e $\Phi_v(1, 0) = (2v, -2v, u)|_{(1,0)} = (0, 0, 1)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(1, 0) \wedge \Phi_v(1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1 + 2\lambda, 1 - 2\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0) \rangle = 2(x - 1) + 2(y - 1) \iff x - y = 0$.
- (4) Osserviamo che $P_0 = (1, 0, 0) = \Phi(0, 0)$, per cui $\Phi_u(0, 0) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)|_{(0,0)} = (0, 0, 1)$, e $\Phi_v(0, 0) = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)|_{(0,0)} = (0, 1, 0)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(0, 0) \wedge \Phi_v(0, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1 - \lambda, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0) \rangle = -(x - 1) \iff x - 1 = 0$.
- (5) Osserviamo che $P_0 = (1, 1, 0) = \Phi(1, 0)$, per cui $\Phi_u(1, 0) = (2u \cos v, 1, 2u \sin v)|_{(1,0)} = (2, 1, 0)$, e $\Phi_v(1, 0) = (-u^2 \sin v, 0, u^2 \cos v)|_{(1,0)} = (0, 0, 1)$, e quindi un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = \Phi_u(1, 0) \wedge \Phi_v(1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1 + \lambda, 1 - 2\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0) \rangle = (x - 1) - 2(y - 1) \iff x - 2y + 1 = 0$.
- (6) Osserviamo che $P_0 = (1, 0, 0)$, per cui un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = (2x, 2y, 2z)|_{(1,0,0)} = 2\vec{i}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1 + 2\lambda, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0) \rangle = 2(x - 1) \iff x - 1 = 0$.
- (7) Osserviamo che $P_0 = (1, 1, 1)$, per cui un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = (2x, 2y, -2z)|_{(1,1,1)} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1 + 2\lambda, 1 + 2\lambda, 1 - 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0) \rangle = 2(x - 1) + 2(y - 1) - 2(z - 1) \iff z = x + y - 1$.
- (8) Osserviamo che $P_0 = (1, 0, 0)$, per cui un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = (2x, 2y, 0)|_{(1,0,0)} = 2\vec{i}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1 + 2\lambda, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0) \rangle = 2(x - 1) \iff x - 1 = 0$.
- (9) Osserviamo che $P_0 = (1, 0, 1)$, per cui un vettore normale alla superficie in P_0 è $\vec{n}(P_0) = (-2x, -2y, 1)|_{(1,0,1)} = -2\vec{i} + \vec{k}$, una rappresentazione parametrica della retta normale è $\vec{r}(\lambda) = P_0 + \lambda\vec{n}(P_0) = (1 - 2\lambda, 0, 1 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e il piano tangente ha equazione $0 = \langle P - P_0, \vec{n}(P_0) \rangle = -2(x - 1) + (z - 1) \iff z = 2x - 1$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) La superficie proposta è il grafico di una funzione f di dominio $D = [1, 2]^2$, per cui

$$\begin{aligned}\text{area}(S) &= \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}} dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dx dy \stackrel{(a)}{=} \sqrt{2} \int_1^2 dx \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{y}} dy \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^2 \cdot \left[2\sqrt{y} \right]_1^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} (2\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1) = \frac{4}{3} (5\sqrt{2} - 6),\end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

(2) La superficie proposta è il grafico di una funzione f di dominio $D = [0, 1]^2$, per cui

$$\begin{aligned}\text{area}(S) &= \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{2 + 4y^2} dy \\ &\stackrel{(a)}{=} \sqrt{2} \int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{z^2 + 1}{2z} \frac{z^2 + 1}{2\sqrt{2}z^2} dz = \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} \right) dz \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{z^2}{2} + 2 \log |z| - \frac{1}{2z^2} \right]_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2} \log(\sqrt{2} + \sqrt{3}),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $\sqrt{1 + 2y^2} = z - \sqrt{2}y \implies y = \frac{z^2-1}{2\sqrt{2}z}$, $dy = \frac{z^2+1}{2\sqrt{2}z^2} dz$, e $\sqrt{1 + 2y^2} = \frac{z^2+1}{2z}$.

(3) La superficie proposta è il grafico di una funzione f di dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq x\}$, per cui

$$\begin{aligned}\text{area}(S) &= \iint_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}} dx dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\vartheta \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{\varrho^2}} \varrho d\varrho = \frac{\pi}{2} \int_1^2 \sqrt{\varrho^2 + 1} d\varrho \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{z^2 + 1}{2z} \frac{z^2 + 1}{2z^2} dz = \frac{\pi}{8} \int_1^2 \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} \right) dz \\ &= \frac{\pi}{8} \left[\frac{z^2}{2} + 2 \log |z| - \frac{1}{2z^2} \right]_1^2 = \frac{\pi}{8} \left(\frac{15}{8} + 2 \log 2 \right),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $\sqrt{1 + \varrho^2} = z - \varrho \implies \varrho = \frac{z^2-1}{2z}$, $d\varrho = \frac{z^2+1}{2z^2} dz$, e $\sqrt{1 + \varrho^2} = \frac{z^2+1}{2z}$.

(4) Osserviamo che $\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v & 1 & 1 \\ u & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + (u+v)\vec{j} - (u-v)\vec{k}$, per cui $\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|^2 =$

$4 + (u+v)^2 + (u-v)^2 = 4 + 2u^2 + 2v^2$, e quindi, posto $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$, si ha

$$\begin{aligned}\text{area}(S) &= \iint_D \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| du dv = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{4 + 2\varrho^2} \varrho d\varrho \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{\pi}{2} \frac{1}{4} \int_4^6 \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{8} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_4^6 = \frac{\pi}{6} (3\sqrt{6} - 4),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $4 + 2\rho^2 = t \implies 4\rho d\rho = dt$.

$$(5) \text{ Osserviamo che } \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & 0 & 0 \\ -u \sin v & 1 & -\sin v \end{vmatrix} = \sin v \cos v \vec{j} + \cos v \vec{k}, \text{ per cui}$$

$\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|^2 = \sin^2 v \cos^2 v + \cos^2 v = \cos^2 v (1 + \sin^2 v)$, e quindi, posto $D = [0, 1] \times [0, \pi]$, si ha

$$\begin{aligned} \text{area}(S) &= \iint_D \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| \, dudv = \int_0^1 du \int_0^\pi |\cos v| \sqrt{1 + \sin^2 v} \, dv \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos v \sqrt{1 + \sin^2 v} \, dv \stackrel{(a)}{=} 2 \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} \, dt \stackrel{(b)}{=} 2 \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{z^2 + 1}{2z} \frac{z^2 + 1}{2z^2} \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} \right) dz = \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{2} + 2 \log z - \frac{1}{2z^2} \right]_1^{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $\sin v = t \implies \cos v \, dv = dt$, e in (b) il cambiamento di variabile $\sqrt{1 + t^2} = z - t \implies t = \frac{z^2 - 1}{2z}$, $dt = \frac{z^2 + 1}{2z^2} \, dz$, e $\sqrt{1 + t^2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$.

$$(6) \text{ Osserviamo che } \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{u} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{v} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{v} \vec{i} + \frac{1}{uv} \vec{k}, \text{ per cui } \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|^2 =$$

$\frac{1}{v^2} + \frac{1}{u^2 v^2} = \frac{1}{v^2} (1 + \frac{1}{u^2})$, e quindi, posto $D = [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}] \times [1, e]$, si ha

$$\begin{aligned} \text{area}(S) &= \iint_D \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| \, dudv = \int_{3/4}^{4/3} du \int_1^e \frac{1}{v} \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} \, dv \\ &= \int_{3/4}^{4/3} \left[\log v \right]_1^e \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u} \, du \stackrel{(a)}{=} \int_2^3 \frac{z^2 + 1}{2z} \frac{2z}{z^2 - 1} \frac{z^2 + 1}{2z^2} \, dz \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{2} \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z - 1} - \frac{2}{z + 1} \right) dz = \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{z} + 2 \log |z - 1| - 2 \log |z + 1| \right]_2^3 = \frac{5}{12} + \log 3, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $\sqrt{1 + u^2} = z - u \implies u = \frac{z^2 - 1}{2z}$, $du = \frac{z^2 + 1}{2z^2} \, dz$, e $\sqrt{1 + u^2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$, e in (b) la decomposizione $\frac{(z^2 + 1)^2}{z^2(z^2 - 1)} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z - 1} - \frac{2}{z + 1}$. $\square$

Svolgimento esercizio 4

$$(1) \text{ Una parametrizzazione di } S \text{ è } \Phi(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}x^2 + y^2), (x, y) \in D, \text{ per cui } \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}, \text{ e } \|\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y)\|^2 = x^2 + 4y^2 + 1. \text{ Allora}$$

$$\begin{aligned} \int_S y^2 \, d\sigma &= \iint_D y^2 \sqrt{1 + x^2 + 4y^2} \, dx dy \stackrel{(a)}{=} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \frac{1}{4} \varrho^2 \sin^2 \vartheta \sqrt{1 + \varrho^2} \frac{1}{2} \varrho d\varrho \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} d\vartheta \int_1^2 (z - 1) \sqrt{z} \cdot \frac{1}{2} dz = \frac{1}{32} \left[\frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{4} \sin 2\vartheta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{2}{5} z^{5/2} - \frac{2}{3} z^{3/2} \right]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{120} (\sqrt{5} + 1), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \frac{1}{2}\varrho \sin \vartheta$, e in (b) il cambiamento di variabile $z = 1 + \varrho^2 \implies dz = 2\varrho d\varrho$.

- (2) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $(x, y) \in D$, per cui $\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}$, e $\|\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y)\|^2 = 4x^2 + 4y^2 + 1$. Allora

$$\begin{aligned} \int_S \frac{x}{\sqrt{4z+1}} d\sigma &= \iint_D \frac{x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy \stackrel{(a)}{=} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\vartheta \int_0^{1/2} \varrho \cos \vartheta \varrho d\varrho \\ &= \left[\sin \vartheta \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{3} \varrho^3 \right]_0^{1/2} = -\frac{1}{12}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$.

- (3) Osserviamo che $\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & 0 & 0 \\ -u \sin v & 1 & -\sin v \end{vmatrix} = \sin v \cos v \vec{j} + \cos v \vec{k}$, e $\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|^2 = \sin^2 v \cos^2 v + \cos^2 v = \cos^2 v (1 + \sin^2 v)$. Posto $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq u\}$, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}} d\sigma &= \iint_D \frac{u \cos v}{\sqrt{1+\sin^2 v}} \cos v \sqrt{1+\sin^2 v} dx dy = \int_0^{\pi/2} u du \int_0^u \frac{1+\cos 2v}{2} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} u \left[v + \frac{1}{2} \sin 2v \right]_{v=0}^{v=u} du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} u \left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) du \\ &= \frac{1}{6} \left[u^3 \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \left[u \frac{-\cos 2u}{2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2u}{2} du \\ &= \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{16} + \frac{1}{16} \left[\sin 2\vartheta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{16}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$.

- (4) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, per cui $\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{j} + \vec{k}$, e $\|\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y)\|^2 = 2$.

Allora

$$\begin{aligned} \int_S (x^2 + y^2) d\sigma &= \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{(a)}{=} \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \varrho d\varrho \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{1}{4} \varrho^4 \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabile $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$.

□

Svolgimento esercizio 5

- (1) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Poiché $\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, ne segue che Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y = \langle y(1-x-y)\vec{i} + x(1-x-y)\vec{j} + xy\vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \rangle = (x+y)(1-x-y) + xy$, e quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma &= - \iint_D \vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy = - \iint_D (x + y - x^2 - y^2 - xy) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{2} x y^2 - xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3 + \frac{1}{2}x(1-x)^2 - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 \right) dx = \left[-\frac{1}{6}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{24}x^4 \right]_0^1 = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

- (2) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Poiché $\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}$, ne segue che Φ è la rappresentazione positiva. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y = \langle 2y\vec{i} + 2x\vec{j} + 3y\vec{k}, -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k} \rangle = -8xy + 3y$, e quindi si ha

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = \iint_D \vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy = \iint_D (-8xy + 3y) dx dy \stackrel{(a)}{=} 0,$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

- (3) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Poiché $\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}$, ne segue che Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y = \langle xy\vec{i} + x(x^2 + y^2)\vec{j} + (1 + x^2y + y^3)\vec{k}, -2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k} \rangle = -2xy^2 - 2xy(x^2 + y^2) + 1 + x^2y + y^3$, e quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma &= - \iint_D \vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy \\ &= \iint_D (2xy^2 + 2xy(x^2 + y^2) - 1 - x^2y - y^3) dx dy \stackrel{(a)}{=} -\text{area}(D) = -4\pi, \end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

- (4) Una parametrizzazione di S è $\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Poiché $\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$, e $\Phi_x(0, 0) \wedge \Phi_y(0, 0) = \vec{k}$, ne segue che Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y = \langle x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + (1 - x^2 - y^2)\vec{k}, 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k} \rangle =$

$2x^3 + 2y^3 + 1 - x^2 - y^2$, e quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma &= - \iint_D \vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy = - \iint_D (2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2 + 1) dx dy \\ &\stackrel{(a)}{=} - \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (1 - \varrho^2) \varrho d\varrho = -2\pi \left[\frac{1}{2} \varrho^2 - \frac{1}{4} \varrho^4 \right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio, e il cambiamento di variabile $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$.

(5) Una parametrizzazione di S è $\Phi(\vartheta, \varphi) = (\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \varphi)$, $(\vartheta, \varphi) \in D := [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Poiché $\Phi_\vartheta(\vartheta, \varphi) \wedge \Phi_\varphi(\vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & 0 \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \end{vmatrix} = -\cos \vartheta \sin^2 \varphi \vec{i} - \sin \vartheta \sin^2 \varphi \vec{j} - \sin \varphi \cos \varphi \vec{k}$, ne segue che Φ è la rappresentazione positiva. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(\vartheta, \varphi)) \cdot \Phi_\vartheta(\vartheta, \varphi) \wedge \Phi_\varphi(\vartheta, \varphi) = \langle \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \vec{i} + \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \vec{j} + \cos \vartheta \sin \vartheta \sin^2 \varphi, -\cos \vartheta \sin^2 \varphi \vec{i} - \sin \vartheta \sin^2 \varphi \vec{j} - \sin \varphi \cos \varphi \vec{k} \rangle = -3 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^3 \varphi \cos \varphi$, e quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma &= \iint_D \vec{F}(\Phi(\vartheta, \varphi)) \cdot \Phi_\vartheta(\vartheta, \varphi) \wedge \Phi_\varphi(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi = -3 \iint_D \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^3 \varphi \cos \varphi d\vartheta d\varphi \\ &= -3 \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi = -3 \left[\frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{4} \sin^4 \varphi \right]_0^{\pi/2} = -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

(6) Una parametrizzazione di S è $\Phi(\vartheta, \varphi) = (\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \frac{1}{2} \cos \varphi)$, $(\vartheta, \varphi) \in D := [0, 2\pi] \times$

$[0, \pi]$. Poiché $\Phi_\vartheta(\vartheta, \varphi) \wedge \Phi_\varphi(\vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & 0 \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi & -\frac{1}{2} \sin \varphi \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cos \vartheta \sin^2 \varphi \vec{i} - \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin^2 \varphi \vec{j} -$

$\sin \varphi \cos \varphi \vec{k}$, e $\Phi_\vartheta(0, \frac{\pi}{2}) \wedge \Phi_\varphi(0, \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \vec{i}$, ne segue che Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre, $\vec{F}(\Phi(\vartheta, \varphi)) \cdot \Phi_\vartheta(\vartheta, \varphi) \wedge \Phi_\varphi(\vartheta, \varphi) = \langle \cos \vartheta \sin \varphi \vec{i}, -\frac{1}{2} \cos \vartheta \sin^2 \varphi \vec{i} - \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin^2 \varphi \vec{j} - \sin \varphi \cos \varphi \vec{k} \rangle = -\frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \sin^3 \varphi$, e quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma &= - \iint_D \vec{F}(\Phi(\vartheta, \varphi)) \cdot \Phi_\vartheta(\vartheta, \varphi) \wedge \Phi_\varphi(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2} \iint_D \cos^2 \vartheta \sin^3 \varphi d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} d\vartheta \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \left[\vartheta + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

□

Svolgimento esercizio 6

(1) Usiamo il teorema di Stokes. Intanto $\partial^+ S$ si compone di due cammini regolari chiusi disgiunti γ_0 e γ_1 . Siano, allora, S_0 la superficie $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, che soddisfa $\partial^+ S_0 = \gamma_0$, e S_1 la superficie $z = 3 - x - 2y$, $x^2 + y^2 \leq 1$, che soddisfa $\partial^- S_1 = \gamma_1$. Una rappresentazione parametrica di S_0

è $\Phi^0(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, mentre una rappresentazione parametrica di S_1 è $\Phi^1(x, y) = (x, y, 3 - x - 2y)$, $(x, y) \in D$, e si ha

$$\begin{aligned}\Phi_x^0(x, y) \wedge \Phi_y^0(x, y) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}, \\ \Phi_x^1(x, y) \wedge \Phi_y^1(x, y) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.\end{aligned}$$

Inoltre $F(x, y, z) = (2x^3 + z)\vec{i} + (x^2y + 3y^3)\vec{j} + (xz^2 + 4z^3)\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^3 + z & x^2y + 3y^3 & xz^2 + 4z^3 \end{vmatrix} = (1 - z^2)\vec{j} + 2xy\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ S} \omega &= \int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \int_{S_0} \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi d\sigma - \int_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi d\sigma \\ &= \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi^0(x, y)) \cdot \Phi_x^0(x, y) \wedge \Phi_y^0(x, y) dx dy - \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi^1(x, y)) \cdot \Phi_x^1(x, y) \wedge \Phi_y^1(x, y) dx dy \\ &= \iint_D (2xy + (16 - 12x - 24y + 2x^2 + 6xy + 8y^2)) dx dy = \iint_D (16 + 2x^2 + 8y^2) dx dy \\ &= 32\pi + 2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \cos^2 \vartheta d\varrho + 8 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \sin^2 \vartheta d\varrho = 32\pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{137}{4} \pi.\end{aligned}$$

(2) Usiamo il teorema di Stokes. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x, y) = (x, y, y)$, $(x, y) \in D$, e si ha

$$\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x, y, z) = (x^3 + y^2)\vec{i} + (xy^2 + y^4)\vec{j} + (xz - 2z^4)\vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + y^2 & xy^2 + y^4 & xz - 2z^4 \end{vmatrix} = -z\vec{j} + (y^2 - 2y)\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_\Phi d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy \\ &= \iint_D (y^2 - y) dx dy = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \sin^2 \vartheta \varrho d\varrho = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

(3) Usiamo il teorema di Stokes. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x, y) = (x, y, 1 + xy)$, $(x, y) \in D$, e si ha

$$\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x, y, z) = x^2\vec{i} + z^2(x-1)\vec{j} + (y+xy+2z^7)\vec{k}$, per cui si ha

$$\text{rot } F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xz^2 - z^2 & y + xy + 2z^7 \end{vmatrix} = (1+x+2z-2xz)\vec{i} - y\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_S \text{rot } F \cdot \nu_{\Phi} d\sigma = \iint_D (\text{rot } F)(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy \\ &= \iint_D (1-3y+4xy-2xy^2+3x^2y^2) dx dy = 3 \iint_D x^2 y^2 dx dy \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^5 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta d\varrho = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\vartheta) d\vartheta \left[\frac{\varrho^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 4\vartheta}{2} \right)^2 d\vartheta \\ &= \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos 4\vartheta + \cos^2 4\vartheta) d\vartheta = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 8\vartheta}{2} d\vartheta = \frac{3\pi}{32}. \end{aligned}$$

(4) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $z = 2y + 3\sin(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 \leq 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x, y) = (x, y, 2y + 3\sin(x^2 + y^2))$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e si ha

$$\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 6x \cos(x^2 + y^2) \\ 0 & 1 & 2 + 6y \cos(x^2 + y^2) \end{vmatrix} = -6x \cos(x^2 + y^2) \vec{i} - 2(1 + 3y \cos(x^2 + y^2)) \vec{j} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x, y, z) = x^7 y \vec{i} + (1 + y^8) \vec{j} + (xy^2 + z^9) \vec{k}$, per cui si ha

$$\text{rot } F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^7 y & 1 + y^8 & xy^2 + z^9 \end{vmatrix} = 2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} - x^7 \vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_S \text{rot } F \cdot \nu_{\Phi} d\sigma = \iint_D (\text{rot } F)(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy \\ &= \iint_D (-x^7 + 2y^2 + 6y(y^2 - 2x^2) \cos(x^2 + y^2)) dx dy = 2 \iint_D y^2 dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \sin^2 \vartheta \varrho d\varrho = \pi \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(5) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $y = \log(1 + 4x^2 + z^2)$, $x^2 + \frac{1}{4}z^2 \leq 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(u, v) = (u, \log(1 + 4u^2 + v^2), v)$, $(u, v) \in D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + \frac{1}{4}v^2 \leq 1\}$, e si ha

$$\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{8u}{1+4u^2+v^2} & 0 \\ 0 & \frac{2v}{1+4u^2+v^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{8u}{1+4u^2+v^2} \vec{i} - \vec{j} + \frac{2v}{1+4u^2+v^2} \vec{k},$$

per cui Φ è la rappresentazione negativa. Inoltre $F(x, y, z) = yz^2 \vec{i} + 3z^2 \vec{j} - 3x \vec{k}$, per cui si ha

$$\text{rot } F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & 3z^2 & -3x \end{vmatrix} = -6z \vec{i} + (3 + 2yz) \vec{j} - z^2 \vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_S \text{rot } F \cdot \nu_{\Phi} d\sigma = - \iint_D (\text{rot } F)(\Phi(u, v)) \cdot \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) dudv \\ &= - \iint_D \left(-3 - 2v \log(1 + 4u^2 + v^2) - \frac{2v(24u + v^2)}{1 + 4u^2 + v^2} \right) dudv = 3 \text{area}(D) = 6\pi. \end{aligned}$$

(6) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $x = e^{y^2 - z^2}$, $\frac{1}{4}y^2 + z^2 \leq 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(u, v) = (e^{u^2 - v^2}, u, v)$, $(u, v) \in D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}u^2 + v^2 \leq 1\}$, e si ha

$$\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2ue^{u^2 - v^2} & 1 & 0 \\ -2ve^{u^2 - v^2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2ue^{u^2 - v^2} \vec{j} + 2ve^{u^2 - v^2} \vec{k},$$

per cui Φ è la rappresentazione positiva. Inoltre $F(x, y, z) = -3z \vec{i} + 3x^2 \vec{j} + yz^2 \vec{k}$, per cui si ha

$$\text{rot } F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3z & 3x^2 & yz^2 \end{vmatrix} = z^2 \vec{i} - 3\vec{j} + 6x \vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_S \text{rot } F \cdot \nu_{\Phi} d\sigma = \iint_D (\text{rot } F)(\Phi(u, v)) \cdot \Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) dudv \\ &= \iint_D (6ue^{u^2 - v^2} + 12ve^{2(u^2 - v^2)} + v^2) dudv = \iint_D v^2 dudv \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \sin^2 \vartheta \cdot 2\varrho d\varrho = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 d\vartheta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(7) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $z = x + y$, $x^2 + y^2 \leq 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x, y) = (x, y, x + y)$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e si ha

$$\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x, y, z) = (x + y) \vec{i} + (x^3 + y) \vec{j} + (x + y + z^3) \vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y & x^3 + y & x + y + z^3 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + (3x^2 - 1) \vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_{\Phi} d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy \\ &= \iint_D (3x^2 - 1) dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (3\rho^2 \cos^2 \vartheta - 1) \rho d\rho = \frac{3\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(8) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $z = 1 + y$, $x^2 + y^2 \leq 1$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x, y) = (x, y, 1 + y)$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e si ha

$$\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x, y, z) = (x^2 - yz) \vec{i} + (y^2 + xz^2) \vec{j} + (z^2 - xy) \vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 + xz^2 & z^2 - xy \end{vmatrix} = -(x + 2xz) \vec{i} + (z^2 + z) \vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_{\Phi} d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy \\ &= \iint_D (2 + 3y + y^2) dx dy = \iint_D (2 + y^2) dx dy \\ &= 2 \operatorname{area}(D) + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho^2 \sin^2 \vartheta \rho d\rho = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

(9) Usiamo il teorema di Stokes. Sia S la superficie $z = 1 - x - y$, $(x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$, che soddisfa $\partial^+ S = \gamma$. Una rappresentazione parametrica di S è $\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$, $(x, y) \in D$, e si ha

$$\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Inoltre $F(x, y, z) = (x^2 + y^2) \vec{i} + (y^2 + z^2) \vec{j} + (x^2 + z^2) \vec{k}$, per cui si ha

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & x^2 + z^2 \end{vmatrix} = -2z \vec{i} - 2x \vec{j} - 2y \vec{k}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu_{\Phi} d\sigma = \iint_D (\operatorname{rot} F)(\Phi(x, y)) \cdot \Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) dx dy \\ &= \iint_D -2 dx dy = -2 \operatorname{area}(D) = -1.\end{aligned}$$

□

Svolgimento esercizio 7

- (1) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &\stackrel{(a)}{=} 6 \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz = 6 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 2,\end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

- (2) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 2(x + y + z)$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D 2(x + y + z) dx dy dz \\ &\stackrel{(a)}{=} 2 \int_0^1 z dz \iint_{E_z} dx dy = 2 \int_0^1 z \cdot \pi z^2 dz = 2\pi \left[\frac{1}{4} z^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio, e $E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

- (3) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \stackrel{(a)}{=} 3 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \cdot \varrho^2 \sin \varphi d\varrho \\ &= 3 \left[-\cos \varphi \right]_0^{\pi} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{5} \varrho^5 \right]_0^1 = \frac{12}{5} \pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di coordinate $x = \varrho \cos \vartheta \sin \varphi$, $y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = \varrho \cos \varphi$.

- (4) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = x^2 + y^2$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz \stackrel{(a)}{=} \iint_C (x^2 + y^2) dx dy \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{1+x^2+y^2} dz \\ &= \iint_C (x^2 + y^2)(1 + x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \stackrel{(b)}{=} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2(1 + \varrho^2 - 2\varrho) \varrho d\varrho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} \varrho^4 - \frac{2}{5} \varrho^5 + \frac{1}{6} \varrho^6 \right]_0^1 = \frac{\pi}{30},\end{aligned}$$

dove in (a) si è posto $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e in (b) si è usato il cambiamento di coordinate $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$.

(5) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz \stackrel{(a)}{=} \int_0^1 dz \iint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2 \cos \vartheta} \varrho^2 d\varrho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} \varrho^3 \right]_0^{2 \cos \vartheta} d\vartheta = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \stackrel{(c)}{=} \frac{8}{3} \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{8}{3} \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 = \frac{32}{9}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è posto $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$, in (b) si è usato il cambiamento di coordinate $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, e in (c) il cambiamento di coordinate $t = \sin \vartheta$.

(6) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 3(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D 3(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz \\ &= 3 \operatorname{vol}(D) - 3 \int_0^1 dz \iint_{[0,1]^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \stackrel{(a)}{=} 3 - 6 \iint_E \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &\stackrel{(b)}{=} 3 - 6 \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{1/\cos \vartheta} \varrho^2 d\varrho = 3 - 6 \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{3} \varrho^3 \right]_0^{1/\cos \vartheta} d\vartheta = 3 - 2 \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} \\ &= 3 - 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \vartheta}{(1 - \sin^2 \vartheta)^2} d\vartheta \stackrel{(c)}{=} 3 - 2 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{(1 - t^2)^2} \\ &\stackrel{(d)}{=} 3 - \frac{1}{2} \left[-\log |t-1| - \frac{1}{t-1} + \log |t+1| - \frac{1}{t+1} \right]_0^{\sqrt{2}/2} = 3 + \frac{1}{2} \left[\log \frac{|t-1|}{|t+1|} - \frac{2t}{1-t^2} \right]_0^{\sqrt{2}/2} \\ &= 3 + \frac{1}{2} \log(3 - 2\sqrt{2}) - \sqrt{2}, \end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio e $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$, in (b) il cambiamento di coordinate $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, in (c) il cambiamento di coordinate $t = \sin \vartheta$, e in (d) la decomposizione $\frac{1}{(t^2-1)^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t+1)^2}$.

(7) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 3x^2 + 12y^2 + 1$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D (3x^2 + 12y^2 + 1) dx dy dz \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (12\varrho^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + 12\varrho^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + 1) \cdot 2\sqrt{2} \varrho^2 \sin \varphi d\varrho \\ &= 4\sqrt{2}\pi \int_0^\pi \left[\frac{12}{5} \varrho^5 \sin^3 \varphi + \frac{1}{3} \varrho^3 \sin \varphi \right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} d\varphi = 4\sqrt{2}\pi \int_0^\pi \left(\frac{12}{5} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi + \frac{1}{3} \sin \varphi \right) d\varphi \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{48\sqrt{2}}{5} \pi \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt + \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi \left[-\cos \varphi \right]_0^\pi = \frac{48\sqrt{2}}{5} \pi \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 + \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi = \frac{232}{15} \sqrt{2} \pi, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di coordinate $x = 2\varrho \cos \vartheta \sin \varphi$, $y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = \sqrt{2}\varrho \cos \varphi$, e in (b) il cambiamento di coordinate $t = \cos \varphi$.

(8) Si ha $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = (y - x)e^{x+y}$, per cui, dal teorema della divergenza, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} = \iiint_D (y - x)e^{x+y} dx dy dz \\ &\stackrel{(a)}{=} \iint_C (y - x)e^{x+y} dx dy \int_0^{x+y} dz = \iint_C (y^2 - x^2)e^{x+y} dx dy \\ &\stackrel{(b)}{=} -\frac{1}{2} \iint_{[0,2]^2} s t e^s ds dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^2 \cdot \left[(s - 1)e^s \right]_0^2 = -e^2 - 1, \end{aligned}$$

dove in (a) si è posto $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 2 - |y|\}$, e in (b) si è usato il cambiamento di coordinate $x = \frac{s+t}{2}$, $y = \frac{s-t}{2} \implies dx dy = -\frac{1}{2} ds dt$. □

Svolgimento esercizio 8

(1) Possiamo aggiungere una superficie S_0 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$, $S_0 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x \wedge \Phi_y = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^-$, e, poiché $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, otteniamo

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iint_C (x + y) dx dy = 0.$$

(2) Possiamo aggiungere una superficie S_0 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3}\}$, $S_0 := \{(x, y, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{3})$, $(x, y) \in C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x \wedge \Phi_y = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^-$, e, poiché $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iint_C (x + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho^2 \sin^2 \vartheta \varrho d\varrho \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} \left[\frac{1}{4} \varrho^4 \right]_0^1 d\vartheta = \frac{1}{8} \left[\vartheta - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(3) Possiamo aggiungere una superficie S_0 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \leq 0\}$, $S_0 := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi(x, z) = (x, 0, z)$, $(x, z) \in C := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x \wedge \Phi_z = -\vec{j}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^-$, e, poiché $\operatorname{div} \vec{F} = 3$, otteniamo

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = 3 \operatorname{vol}(D) - \iint_C 0 dx dz = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi = 2\pi.$$

(4) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq y \leq 2\}$, $S_0 := \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 9\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x, z) =$

$(x, 0, z), (x, z) \in C_0 := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 9\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x^0 \wedge \Phi_z^0 = -\vec{j}$, e $S_1 := \{(x, 2, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 5\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^1(x, z) = (x, 0, z)$, $(x, z) \in C_1 := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 5\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi_x^1 \wedge \Phi_z^1 = -\vec{j}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^+ \cup S_1^-$, e, poiché $\text{div } \vec{F} = 0$, otteniamo

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma = \iiint_D \text{div } \vec{F} - \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma = \iint_{C_0} z dx dz - \iint_{C_1} z dx dz \stackrel{(a)}{=} 0.$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio.

- (5) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$, $S_0 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in C_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x^0 \wedge \Phi_y^0 = \vec{k}$, e $S_1 := \{(x, y, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq \frac{1}{4}\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^1(x, y) = (x, y, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(x, y) \in C_{\sqrt{3}/2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq \frac{1}{4}\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi_x^1 \wedge \Phi_y^1 = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^- \cup S_1^+$, e, poiché $\text{div } \vec{F} = 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \text{div } \vec{F} + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma - \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/2} dz \iint_{C_z} dx dy + \iint_{C_0} 0 dx dy - \iint_{C_{\sqrt{3}/2}} \frac{\sqrt{3}}{2} dx dy \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_0^{\sqrt{3}/2} \text{area}(C_z) dz - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{area}(C_{\sqrt{3}/2}) \\ &\stackrel{(b)}{=} 8\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} (1 - z^2) dz - \pi\sqrt{3} = 8\pi \left[z - \frac{1}{3}z^3 \right]_0^{\sqrt{3}/2} - \pi\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è posto $C_z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1 - z^2\}$, e in (b) si è usata la formula $\text{area}(C_z) = 8\pi(1 - z^2)$ che dà l'area dell'ellisse.

- (6) Possiamo aggiungere una superficie S_0 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0, 2\pi], \varrho \in [0, 1], 1 - \varrho \leq z \leq 2\}$, e $S_0 := \{(x, y, 2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in C_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x \wedge \Phi_y = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^+$, e, poiché $\text{div } \vec{F} = 0$, otteniamo

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma = \iiint_D \text{div } \vec{F} - \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = - \iint_C 0 dx dy = 0.$$

- (7) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi], \\ \sin x, & x \in [\pi, \frac{5}{2}\pi], \end{cases} \quad D := \{(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0, 2\pi], \varrho \in [0, \frac{5}{2}\pi], f(\varrho) \leq z \leq 1\}$, $S_0 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in C_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x^0 \wedge \Phi_y^0 = \vec{k}$, $S_1 := \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{25}{4}\pi^2\}$, di rappresentazione

parametrica $\Phi^1(x, y) = (x, y, 1)$, $(x, y) \in C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{25}{4}\pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi_x^1 \wedge \Phi_y^1 = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^- \cup S_0^- \cup S_1^+$, e, poiché $\text{div } \vec{F} = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_i d\sigma &= - \iiint_D \text{div } \vec{F} - \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma = - \iint_{C_0} dx dy + \iint_{C_1} dx dy \\ &= \text{area}(C_1) - \text{area}(C_0) = \frac{25}{4}\pi^3 - \pi^3 = \frac{21}{4}\pi^3. \end{aligned}$$

(8) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi], \\ \sin x, & x \in [\pi, 3\pi], \end{cases} \quad D :=$

$\{(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0, 2\pi], \varrho \in [0, 3\pi], -\sqrt{9\pi^2 - \varrho^2} \leq z \leq f(\varrho)\}$, $S_0 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in C_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x^0 \wedge \Phi_y^0 = \vec{k}$, $S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\pi^2, z \leq 0\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^1(x, y) = (x, y, -\sqrt{9\pi^2 - x^2 - y^2})$, $(x, y) \in C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi_x^1 \wedge \Phi_y^1 = -\frac{x}{\sqrt{9\pi^2 - x^2 - y^2}} \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{9\pi^2 - x^2 - y^2}} \vec{j} + \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^+ \cup S_1^-$, e, poiché $\text{div } \vec{F} = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \text{div } \vec{F} - \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma \stackrel{(a)}{=} - \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{k} d\sigma + \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 d\sigma \\ &= - \iint_{C_0} dx dy + \iint_{C_2} dx dy = \text{area}(C_2) - \text{area}(C_0) = 9\pi^3 - \pi^3 = 8\pi^3, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il fatto che $\vec{F}$ ha divergenza nulla per sostituire il calcolo del flusso attraverso S_1 con quello attraverso $S_2 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9\pi^2\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^2(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in C_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$, e orientata da $\vec{n}_2 = \Phi_x^2 \wedge \Phi_y^2 = \vec{k}$.

(9) Possiamo aggiungere due superfici S_0 ed S_1 ad S per ottenere una superficie chiusa, e poter applicare il teorema della divergenza. Ad esempio, poniamo $D := \{(\varrho \cos \vartheta, (1 + \varrho \sin \vartheta) \cos \varphi, (1 + \varrho \sin \vartheta) \sin \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \vartheta \in [0, \pi], \varrho \in [0, 1], \varphi \in [0, \pi]\}$, $S_0 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \geq 1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^0(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in C_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \geq 1\}$, e orientata da $\vec{n}_0 = \Phi_x^0 \wedge \Phi_y^0 = \vec{k}$, $S_1 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 1, y \leq -1\}$, di rappresentazione parametrica $\Phi^1(x, y) = (x, y, 0)$, $(x, y) \in C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 1, y \leq -1\}$, e orientata da $\vec{n}_1 = \Phi_x^1 \wedge \Phi_y^1 = \vec{k}$. Allora $\partial^+ D = S^+ \cup S_0^- \cup S_1^-$, e, poiché $\text{div } \vec{F} = 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e d\sigma &= \iiint_D \text{div } \vec{F} + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 d\sigma = \text{vol}(D) + \iint_{C_0} 0 dx dy + \iint_{C_1} 0 dx dy \\ &\stackrel{(a)}{=} \iiint_T \varrho(1 + \varrho \sin \vartheta) d\varrho d\vartheta d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^1 \varrho(1 + \varrho \sin \vartheta) d\varrho \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\varrho^2 + \frac{1}{3}\varrho^3 \sin \vartheta \right]_0^1 d\vartheta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{3}\cos \vartheta \right]_0^\pi d\varphi = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi^2, \end{aligned}$$

dove in (a) si è posto $T := [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$, e si è usato il fatto che lo Jacobiano del cambiamento

di variabili $(x, y, z) \mapsto (\varrho, \vartheta, \varphi)$ è $J(\varrho, \vartheta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\varrho \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \cos \varphi & \varrho \cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 & -(1 + \varrho \sin \vartheta) \sin \varphi & (1 + \varrho \sin \vartheta) \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho(1 + \varrho \sin \vartheta)$.

□