Analisi Matematica II
Integrali curvilinei (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (3t^2, 2t),\\
\|\gamma'(t)\|^2 &= 9t^4 + 4t^2 = t^2(9t^2+4),\\
\ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^1 t\sqrt{9t^2+4}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{18}\int_4^{13}\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{27}\Big[x^{2/3}\Big]_4^{13} = \frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8),
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $9t^2+4 = x \implies 18t\,dt = dx$.

(2) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \Big(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{1}{t}\Big),\\
\|\gamma'(t)\|^2 &= \frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2(1-t^2)},\\
\ell(\gamma) &= \int_{1/2}^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} \overset{(a)}{=} \int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x} \overset{(b)}{=} \int_{\mathrm{tg}(\pi/12)}^1 \frac{y^2+1}{2y}\frac{2}{y^2+1}\,dy\\
&= \Big[\log y\Big]_{\mathrm{tg}(\pi/12)}^1 = -\log \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{12},
\end{aligned}$$

dove si è usato, in (a) la sostituzione $t = \sin x \implies dt = \cos x\,dx$, in (b) la sostituzione $x = 2\,\mathrm{arctg}\,y$, per cui $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $dx = \frac{2\,dy}{1+y^2}$.

(3) Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (e^t, 2e^{2t}),\\
\|\gamma'(t)\|^2 &= e^{2t} + 4e^{4t} = e^{2t}(1+4e^{2t}),\\
\ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^1 e^t\sqrt{1+4e^{2t}}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\int_2^{2e}\sqrt{x^2+1}\,dx \overset{(b)}{=} \frac{1}{2}\int_{2+\sqrt{5}}^{2e+\sqrt{4e^2+1}} \frac{y^2+1}{2y}\frac{y^2+1}{2y^2}\,dy\\
&= \frac{1}{8}\int_{2+\sqrt{5}}^{2e+\sqrt{4e^2+1}}\Big(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3}\Big)\,dy = \frac{1}{8}\Big[\frac{y^2}{2} + 2\log y - \frac{1}{2y^2}\Big]_{2+\sqrt{5}}^{2e+\sqrt{4e^2+1}}\\
&= \frac{1}{2}(e\sqrt{4e^2+1} - \sqrt{5}\,) + \frac{1}{4}\log\frac{2e+\sqrt{4e^2+1}}{2+\sqrt{5}},
\end{aligned}$$

dove si è usato, in (a) la sostituzione $2e^t = x \implies 2e^t\,dt = dx$, in (b) la sostituzione $\sqrt{x^2+1} = y - x$, per cui $x = \frac{y^2-1}{2y}$, $\sqrt{x^2+1} = \frac{y^2+1}{2y}$, $dx = \frac{y^2+1}{2y^2}\,dy$.

(4) Si ha, successivamente,

$$
\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (6t+10, 8t+5),\\
\|\gamma'(t)\|^2 &= (6t+10)^2+(8t+5)^2 = 25(4t^2+8t+5),\\
\ell(\gamma) &= \int_{-1}^{1} \|\gamma'(t)\|\,dt = 5\int_{-1}^{1}\sqrt{4t^2+8t+5}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{5}{4}\int_0^8 \sqrt{x^2+1}\,dx \overset{(b)}{=} \frac{5}{4}\int_1^{8+\sqrt{65}} \frac{y^2+1}{2y}\,\frac{y^2+1}{2y^2}\,dy\\
&= \frac{5}{16}\int_1^{8+\sqrt{65}} \Big(y+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^3}\Big)\,dy = \frac{5}{16}\Big[\frac{y^2}{2}+2\log y-\frac{1}{2y^2}\Big]_1^{8+\sqrt{65}} = 5\sqrt{65}+\frac{5}{8}\log(8+\sqrt{65}),
\end{aligned}
$$

dove si è usato, in (a) la sostituzione $4(t+1)=x$, in (b) la sostituzione $\sqrt{x^2+1}=y-x$, per cui $x=\frac{y^2-1}{2y}$, $\sqrt{x^2+1}=\frac{y^2+1}{2y}$, $dx=\frac{y^2+1}{2y^2}\,dy$.

(5) Si ha, successivamente,

$$
\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \Big(1, \sqrt{\frac{2}{t}}, \frac{1}{t}\Big),\\
\|\gamma'(t)\|^2 &= 1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2} = \frac{(t+1)^2}{t^2},\\
\ell(\gamma) &= \int_1^2 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_1^2 \frac{t+1}{t}\,dt = \int_1^2 \Big(1+\frac{1}{t}\Big)\,dt = \Big[t+\log t\Big]_1^2 = 1+\log 2.
\end{aligned}
$$

(6) Si ha, successivamente,

$$
\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \Big(-\frac{1}{2}\sin(2t), -3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t\Big),\\
\|\gamma'(t)\|^2 &= \frac{1}{4}\sin^2(2t)+9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t = \frac{5}{2}\sin^2(2t),\\
\ell(\gamma) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\gamma'(t)\|\,dt = \sqrt{\frac{5}{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(2t)|\,dt = \sqrt{10}\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,dt = -\frac{\sqrt{10}}{2}\Big[\cos(2t)\Big]_0^{\pi/2} = \sqrt{10}.
\end{aligned}
$$

(7) Si ha, successivamente,

$$
\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (-4\sin t+4\sin 4t, 4\cos t-4\cos 4t),\\
\|\gamma'(t)\|^2 &= (-4\sin t+4\sin 4t)^2+(4\cos t-4\cos 4t)^2 = 32(1-\cos 3t) = 64\sin^2\Big(\frac{3}{2}t\Big),\\
\ell(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt = 16\int_0^{2\pi} \Big|\sin\Big(\frac{3}{2}t\Big)\Big|\,dt = 24\int_0^{2\pi/3} \sin\Big(\frac{3}{2}t\Big)\,dt \overset{(a)}{=} 16\int_0^{\pi} \sin x\,dx\\
&= 16\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 32,
\end{aligned}
$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\frac{3}{2}t=x \implies \frac{3}{2}\,dt=dx$.

(8) Si ha, successivamente,

$$
\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (\sinh t\cos t-\cosh t\sin t, \sinh t\sin t-\cosh t\cos t, 1),\\
\|\gamma'(t)\|^2 &= (\sinh t\cos t-\cosh t\sin t)^2+(\sinh t\sin t-\cosh t\cos t)^2+1 = 2(\cosh t)^2,\\
\ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 \cosh t\,dt = \sqrt{2}\Big[\sinh t\Big]_0^1 = \sqrt{2}\sinh 1 = \frac{e^2-1}{e\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

(9) Si ha

$$\ell(\gamma) = \int_0^2 \sqrt{1+9(3+2x)}\, dx \overset{(a)}{=} \frac{1}{9}\int_{2\sqrt{7}}^{8} y^2\, dy = \frac{1}{27}\Big[y^3\Big]_{2\sqrt{7}}^{8} = \frac{512-56\sqrt{7}}{27},$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{18x+28} = y$, per cui $x = \frac{y^2-28}{18}$, $dx = \frac{1}{9}y\, dy$.

(10) Si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} \overset{(a)}{=} \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1+y^2}{1-y^2}\,\frac{2}{1+y^2}\, dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/3} \Big(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1}\Big)\, dy = \Big[\log\Big|\frac{y+1}{y-1}\Big|\Big]_0^{\sqrt{3}/3} = \log\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \log(2+\sqrt{3}\,),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $x = 2\operatorname{arctg} y$, per cui $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, $dx = \frac{2}{y^2+1}\, dy$.

(11) Si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_0^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{1+2x}}\, dx = \int_0^{3/2} \sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}}\, dx \overset{(a)}{=} \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \frac{y^2}{(y^2-1)^2}\, dy \\ &\overset{(b)}{=} \frac{1}{4}\Big[\log\Big|\frac{y-1}{y+1}\Big| - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\Big]_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5},\end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $\sqrt{\frac{2x+2}{2x+1}} = y$, per cui $x = -\frac{y^2-2}{2(y^2-1)}$, $dx = -\frac{y}{(y^2-1)^2}\, dy$, in (b) la decomposizione $\frac{y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{1}{4}\big(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)^2}\big)$.

(12) Si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_0^5 \sqrt{1+\frac{x(9-x)^2}{(6-x)^3}}\, dx = 3\sqrt{3}\int_0^5 \frac{1}{6-x}\sqrt{\frac{8-x}{6-x}}\, dx \overset{(a)}{=} 3\sqrt{3}\int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} \frac{y^2-1}{2}\, y\, \frac{4y}{(y^2-1)^2}\, dy \\ &= 6\sqrt{3}\int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{(y^2-1)^2}\, dy = 6\sqrt{3}\int_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} \Big(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{y-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+1}\Big)\, dy \\ &= 6\sqrt{3}\,\Big[y + \frac{1}{2}\log\Big|\frac{y-1}{y+1}\Big|\Big]_{\sqrt{4/3}}^{\sqrt{3}} = 6 + 3\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 3\sqrt{3}\log\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 6 + 3\sqrt{3}\,\log(2+\sqrt{3}\,),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{\frac{8-x}{6-x}} = y$, per cui $x = \frac{6y^2-8}{y^2-1}$, $dx = \frac{4y}{(y^2-1)^2}\, dy$.

(13) Si ha

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &= \int_1^2 \sqrt{1+(2x)^2}\, dx \overset{(a)}{=} \int_{2+\sqrt{5}}^{4+\sqrt{17}} \frac{y^2+1}{2y}\,\frac{y^2+1}{4y^2}\, dy = \frac{1}{8}\int_{2+\sqrt{5}}^{4+\sqrt{17}} \Big(y + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3}\Big)\, dy \\ &= \frac{1}{8}\Big[\frac{y^2}{2} + 2\log|y| - \frac{1}{2y^2}\Big]_{2+\sqrt{5}}^{4+\sqrt{17}} = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}},\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{1+4x^2} = y-2x$, per cui $x = \frac{y^2-1}{4y}$, $dx = \frac{y^2+1}{4y^2}\, dy$, $\sqrt{1+4x^2} = \frac{y^2+1}{2y}$.

Alternativamente, si ha

$$\ell(\gamma) = \int_1^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\int_{\operatorname{arsinh} 2}^{\operatorname{arsinh} 4} \cosh^2 y\,dy = \frac{1}{4}\int_{\operatorname{arsinh} 2}^{\operatorname{arsinh} 4} (\cosh 2y + 1)\,dy = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}\sinh 2y + y\Big]_{\operatorname{arsinh} 2}^{\operatorname{arsinh} 4}$$
$$= \frac{1}{4}\sinh\operatorname{arsinh} 4\cosh\operatorname{arsinh} 4 - \frac{1}{4}\sinh\operatorname{arsinh} 2\cosh\operatorname{arsinh} 2 + \frac{1}{4}\log\frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}},$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $2x = \sinh y$, $dx = \frac{1}{2}\cosh y\,dy$.

(14) Si ha

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1+(1+\sqrt{x})^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int_1^2 2(y-1)\sqrt{y^2+1}\,dy \overset{(b)}{=} \int_2^5 \sqrt{z}\,dz - 2\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{z^2+1}{2z}\,\frac{z^2+1}{2z^2}\,dz$$
$$= \frac{2}{3}\Big[z^{3/2}\Big]_2^5 - \frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \Big(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\Big)\,dz = \frac{2}{3}\big(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\big) - \frac{1}{2}\Big[\frac{z^2}{2} + 2\log z - \frac{1}{2z^2}\Big]_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{10}{3}\sqrt{5} - \frac{4}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + \sqrt{2} - \log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{2} - \log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}},$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $1+\sqrt{x} = y$, per cui $x = (y-1)^2$, $dx = 2(y-1)\,dy$, in (b) la sostituzione $z = y^2+1$, per cui $dz = 2y\,dy$, nel primo integrale, e $\sqrt{1+y^2} = z - y$, per cui $y = \frac{z^2-1}{2z}$, $dy = \frac{z^2+1}{2z^2}\,dz$, $\sqrt{1+y^2} = \frac{z^2+1}{2z}$, nel secondo integrale.

(15) Si ha

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{9e^{6\vartheta} + e^{6\vartheta}}\,d\vartheta = \sqrt{10}\int_0^1 e^{3\vartheta}\,d\vartheta = \frac{\sqrt{10}}{3}\Big[e^{3\vartheta}\Big]_0^1 = \frac{\sqrt{10}}{3}(e^3 - 1).$$

(16) Si ha

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{4+4\vartheta^2}\,d\vartheta = 2\int_0^1 \sqrt{1+\vartheta^2}\,d\vartheta \overset{(a)}{=} 2\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{z^2+1}{2z}\,\frac{z^2+1}{2z^2}\,dz$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^{1+\sqrt{2}} \Big(z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\Big)\,dz = \frac{1}{2}\Big[\frac{z^2}{2} + 2\log z - \frac{1}{2z^2}\Big]_1^{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{1+\vartheta^2} = z - \vartheta$, per cui $\vartheta = \frac{z^2-1}{2z}$, $d\vartheta = \frac{z^2+1}{2z^2}\,dz$, $\sqrt{1+\vartheta^2} = \frac{z^2+1}{2z}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sin(\pi t) + \cos(2\pi t)$, e $\|\gamma'(t)\| = \pi\sqrt{5}$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \pi\sqrt{5}\int_0^1 \big(\sin(\pi t) + \cos(2\pi t)\big)\,dt = \pi\sqrt{5}\,\Big[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi} + \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\Big]_0^1 = 2\sqrt{5}.$$

(2) Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^\pi f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t|$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^\pi |\cos t|\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = 2\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = 2.$$

(3) Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_{\pi/2}^\pi f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = (2\cos t)^2 \cdot 2\sin t = 8\cos^2 t \sin t$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_{\pi/2}^\pi 16\cos^2 t \sin t\,dt \overset{(a)}{=} 16\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{16}{3}\Big[x^3\Big]_{-1}^0 = \frac{16}{3},$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\cos t = x$, per cui $dx = -\sin t\,dt$.

(4) Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt \overset{(a)}{=} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sin t = x$, per cui $dx = \cos t\,dt$.

(5) Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = (2t)^3 + t^3 = 9t^3$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4+9t^4}$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 9t^3\sqrt{4+9t^4}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{4}\int_4^{13} \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{6}\Big[x^{3/2}\Big]_4^{13} = \frac{1}{6}\big(13\sqrt{13} - 8\big),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $4 + 9t^4 = x$, per cui $dx = 36t^3\,dt$.

(6) Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = 4t$, e $\|\gamma'(t)\| = 5$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{2\pi} 5 \cdot 4t\,dt = \Big[10t^2\Big]_0^{2\pi} = 40\pi^2.$$

(7) Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = t$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1+4t^2}$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{8}\int_1^5 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{12}\Big[x^{3/2}\Big]_1^5 = \frac{1}{12}\big(5\sqrt{5} - 1\big),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1 + 4t^2 = x$, per cui $dx = 8t\,dt$.

(8) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (1-t)\big(1,2\big) + t\big(3,6\big) = (1+2t, 2+4t)$, $t \in [0,1]$. Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{(1+2t) + 2(2+4t)} = \sqrt{5+10t}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = 10\int_0^1 \sqrt{1+2t}\,dt \overset{(a)}{=} 5\int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \frac{10}{3}\Big[x^{3/2}\Big]_1^3 = \frac{10}{3}\big(3\sqrt{3} - 1\big),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1 + 2t = x$, per cui $dx = 2\,dt$.

(9) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t, \log t)$, $t \in [1,2]$. Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_1^2 f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = t^2$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_1^2 t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt = \int_1^2 t\sqrt{t^2+1}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}\Big[x^{3/2}\Big]_2^5 = \frac{1}{3}\big(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\big),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $t^2+1 = x$, per cui $dx = 2t\,dt$.

(10) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t, e^t)$, $t \in [0, \log 2]$. Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^{\log 2} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = e^{2t}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+e^{2t}}$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{\log 2} e^{2t}\sqrt{1+e^{2t}}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}\Big[x^{3/2}\Big]_2^5 = \frac{1}{3}\big(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\big),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1+e^{2t} = x$, per cui $dx = 2e^{2t}\,dt$.

(11) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t, \sqrt{1+t^2})$, $t \in [0,1]$. Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{1+t^2}$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{2t^2+1}{t^2+1}}$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 \sqrt{2t^2+1}\,dt \overset{(a)}{=} \int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{2x}\,\frac{x^2+1}{2\sqrt{2}x^2}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \Big(x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\Big)\,dx$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big[\frac{x^2}{2}+2\log x-\frac{1}{2x^2}\Big]_1^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{2t^2+1} = x-\sqrt{2}t$, per cui $t = \frac{x^2-1}{2\sqrt{2}x}$, $dt = \frac{x^2+1}{2\sqrt{2}x^2}\,dx$, $\sqrt{1+2t^2} = \frac{x^2+1}{2x}$.

(12) Intanto le equazioni parametriche della curva γ sono $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $t \in [0,1]$. Poiché $\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$, calcoliamo $f(\gamma(t)) = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = t$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$. Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{3}\Big[x^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{1}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big),$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $1+t^2 = x$, per cui $dx = 2t\,dt$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (1+t, 2t)$, $t \in [0,1]$. Si ha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 \Big(2t - 2(1+t)\sqrt{2t}\Big)\,dt = \Big[t^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}t^{3/2} - \frac{4\sqrt{2}}{5}t^{5/2}\Big]_0^1 = 1 - \frac{32}{15}\sqrt{2}.$$

(2) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (1+t, 2t)$, $t \in [0,1]$. Si ha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 \Big(4t^2 + 2e^{t+1}\Big)\,dt = \Big[\frac{4}{3}t^3 + 2e^{t+1}\Big]_0^1 = \frac{4}{3} + 2e(e-1).$$

(3) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (1+2t, 1+2t)$, $t \in [0,1]$. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= 2\int_0^1 \Big((1+2t)\log(1+2t) - (1+2t)\operatorname{arctg}(1+2t)\Big)\, dt \overset{(a)}{=} \int_1^3 x(\log x - \operatorname{arctg} x)\, dx \\
&\overset{(b)}{=} \Big[\frac{1}{2}x^2(\log x - \operatorname{arctg} x)\Big]_1^3 - \frac{1}{2}\int_1^3 \Big(x - \frac{x^2}{x^2+1}\Big)\, dx = \frac{1}{2}\Big[x^2(\log x - \operatorname{arctg} x) - \frac{1}{2}x^2 + x - \operatorname{arctg} x\Big]_1^3 \\
&= -1 + \frac{\pi}{4} - 5\operatorname{arctg} 3 + \frac{9}{2}\log 3,
\end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $2t + 1 = x$, per cui $2dt = dx$, e in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log x - \operatorname{arctg} x \implies f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}, \\ g'(x) = x \implies g(x) = \frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

(4) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (t,t)$, $t \in [0,1]$. Si ha

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 \Big(t^{3/2} - te^t\Big)\, dt \overset{(a)}{=} \Big[\frac{2}{5}t^{5/2} - te^t\Big]_0^1 + \int_0^1 e^t\, dt = \Big[\frac{2}{5}t^{5/2} + (1-t)e^t\Big]_0^1 = -\frac{3}{5},$$

dove in (a) si è usata l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(t) = t \implies f'(t) = 1, \\ g'(t) = e^t \implies g(t) = e^t. \end{cases}$

(5) Una parametrizzazione della spezzata è $\gamma(t) = \begin{cases} (1-t, 0), & t \in [0,1], \\ (0, t-1), & t \in [1,2]. \end{cases}$ Si ha

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 \frac{-dt}{(2-t)^2} + \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \Big[\frac{1}{t-2}\Big]_0^1 + \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^2 = 0.$$

(6) Si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_0^\pi \Big(\sin t \cos^2 t(-\sin t) + \cos t \cos t\Big)\, dt = \int_0^\pi \cos^4 t\, dt = \int_0^\pi \Big(\frac{1+\cos 2t}{2}\Big)^2 dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\pi \big(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t\big)\, dt = \frac{1}{4}\int_0^\pi \Big(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\Big)\, dt \\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{3}{2}t + \sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t\Big]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi.
\end{aligned}$$

(7) Si ha

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_0^\pi \Big(\sin^2 t e^{\cos t}(-\sin t) - \cos t \sin t \cos t\Big)\, dt = -\int_0^\pi \Big(\sin^3 t e^{\cos t} + \cos^2 \sin t\Big)\, dt \\
&\overset{(a)}{=} -\int_{-1}^1 \Big((1-x^2)e^x + x^2\Big)\, dx \overset{(b)}{=} \Big[(x^2 - 2x + 1)e^x - \frac{1}{3}x^3\Big]_{-1}^1 = -\frac{2}{3} - \frac{4}{e},
\end{aligned}$$

dove si è usato in (a) la sostituzione $\cos t = x$, per cui $-\sin t\, dt = dx$, e in (b) il risultato $\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$.

(8) Si ha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^\pi \Big(\cos t\sqrt{1-\sin t}(-\sin t) + \cos t\cos t\Big)\,dt \overset{(a)}{=} \int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \Big(1+\cos 2t\Big)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

dove in (a) si è usata la disparità della funzione $\sin t\cos t\sqrt{1-\sin t}$ rispetto all'intervallo d'integrazione.

(9) Si ha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^\pi \Big(t\sin t + t^2\sin t\cdot 2t\Big)\,dt = \int_0^\pi (2t^3+t)\sin t\,dt \overset{(a)}{=} \Big[-(2t^3+t)\cos t\Big]_0^\pi + \int_0^\pi (6t^2+1)\cos t\,dt$$
$$\overset{(b)}{=} \Big[-(2t^3+t)\cos t + (6t^2+1)\sin t\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 12t\sin t\,dt$$
$$\overset{(c)}{=} \Big[-(2t^3+t)\cos t + (6t^2+1)\sin t + 12t\cos t\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 12\cos t\,dt$$
$$= \Big[-(2t^3-11t)\cos t + (6t^2-11)\sin t\Big]_0^\pi = 2\pi^3 - 11\pi,$$

dove si è usata l'integrazione per parti, in (a) con $\begin{cases} f(t) = 2t^3+t \implies f'(t) = 6t^2+1, \\ g'(t) = \sin t \implies g(t) = -\cos t, \end{cases}$ in (b) con $\begin{cases} f(t) = 6t^2+1 \implies f'(t) = 12t, \\ g'(t) = \cos t \implies g(t) = \sin t, \end{cases}$ in (c) con $\begin{cases} f(t) = 12t \implies f'(t) = 12, \\ g'(t) = \sin t \implies g(t) = -\cos t. \end{cases}$

(10) Si ha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} \Big(t(-\sin t) + \cos t\cos t + 1\Big)\,dt \overset{(a)}{=} \Big[t\cos t - \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + t\Big]_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{3}{2}2\pi = 5\pi,$$

dove in (a) si sono usati i risultati $\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = \sin t - t\cos t + C$, e $\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int\big(1+\cos 2t\big)\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C$.

(11) Una parametrizzazione del segmento è $\gamma(t) = (t,t,t)$, $t\in[0,1]$. Si ha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 \Big(t^2+t^2-t\Big)\,dt = \Big[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(12) Una parametrizzazione della spezzata è $\gamma(t) = \begin{cases} (0,0,t), & t\in[0,1], \\ (0,t-1,1), & t\in[1,2], \\ (t-2,1,1), & t\in[2,3]. \end{cases}$ Si ha

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 0\,dt + \int_2^3 dt = 1.$$

$\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x+y} = -\frac{x}{(x+y)^2} \neq \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x+y} = -\frac{y}{(x+y)^2}$, per cui $\vec{F}$ non è irrotazionale.

(2) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}x\log(1+xy) = \frac{x^2}{1+xy} \neq \frac{\partial}{\partial x}y\log(1+xy) = \frac{y^2}{1+xy}$, per cui $\vec{F}$ non è irrotazionale.

(3) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}\frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{4xy(1+x^2y^2)^2-8x^3y^3}{(1+x^2y^2)^4} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}$, per cui $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi $\vec{F}$ è conservativo. Determiniamo una funzione potenziale U. Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} \implies U(x,y) = \int \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}\,dx + \varphi(y) = -\frac{1}{1+x^2y^2} + \varphi(y)$, e deve essere $\frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x,y) = -\frac{1}{1+x^2y^2}$.

(4) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}(ye^x - e^y) = e^x - e^y = \frac{\partial}{\partial x}(e^x - xe^y)$, per cui $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi $\vec{F}$ è conservativo. Determiniamo una funzione potenziale U. Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = ye^x - e^y \implies U(x,y) = \int (ye^x - e^y)\,dx + \varphi(y) = ye^x - xe^y + \varphi(y)$, e deve essere $e^x - xe^y = \frac{\partial U}{\partial y} = e^x - xe^y + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x,y) = ye^x - xe^y$.

(5) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}(y\cos x - xy\sin x - \sin y) = \cos x - x\sin x - \cos y = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos x - x\cos y + 1)$, per cui $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi $\vec{F}$ è conservativo. Determiniamo una funzione potenziale U. Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = y\cos x - xy\sin x - \sin y \implies U(x,y) = \int (y\cos x - xy\sin x - \sin y)\,dx + \varphi(y) = xy\cos x - x\sin y + \varphi(y)$, e deve essere $x\cos x - x\cos y + 1 = \frac{\partial U}{\partial y} = x\cos x - x\cos y + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 1$, e possiamo scegliere $\varphi(y) = y$. Quindi $U(x,y) = xy\cos x - x\sin y + y$.

(6) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y} - 2xy) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2x = \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2\big)$, per cui $\vec{F}$ è irrotazionale in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > 0\big\}$, che è semplicemente connesso, e quindi $\vec{F}$ è conservativo. Determiniamo una funzione potenziale U. Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{y} - 2xy \implies U(x,y) = \int (\sqrt{y} - 2xy)\,dx + \varphi(y) = x\sqrt{y} - x^2y + \varphi(y)$, e deve essere $\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2 = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2 + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x,y) = x\sqrt{y} - x^2y$.

(7) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}\frac{1+y}{1+x} = \frac{2}{1+x} = \frac{\partial}{\partial x}\log(1+x)$, per cui $\vec{F}$ è irrotazionale in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x > -1\big\}$, che è semplicemente connesso, e quindi $\vec{F}$ è conservativo. Determiniamo una funzione potenziale U. Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1+y}{1+x} \implies U(x,y) = \int \frac{1+y}{1+x}\,dx + \varphi(y) = (1+y)\log(1+x) + \varphi(y)$, e deve essere $\log(1+x) = \frac{\partial U}{\partial y} = \log(1+x) + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x,y) = (1+y)\log(1+x)$.

(8) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}e^{x/y} = -\frac{x}{y^2}\,e^{x/y} = \frac{\partial}{\partial x}\big(1 - \frac{x}{y}\big)e^{x/y}$, per cui $\vec{F}$ è irrotazionale in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \neq 0\big\}$, che è semplicemente connesso (cioè le sue componenti connesse lo sono), e quindi $\vec{F}$ è conservativo. Determiniamo una funzione potenziale U. Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = e^{x/y} \implies U(x,y) = \int e^{x/y}\,dx + \varphi(y) = ye^{x/y} + \varphi(y)$, e deve essere $(1 - \frac{x}{y})e^{x/y} = \frac{\partial U}{\partial y} = (1 - \frac{x}{y})e^{x/y} + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x,y) = ye^{x/y}$.

(9) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}\big(3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}\big) = 3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{xy} = \frac{\partial}{\partial x}3\sqrt{x^3y}$, per cui $\vec{F}$ è irrotazionale in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy > 0\big\}$, che è semplicemente connesso [cioè le sue componenti connesse lo sono], e quindi $\vec{F}$ è conservativo. Determiniamo una funzione potenziale U. Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = 3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} \implies U(x,y) = \int (3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx + \varphi(y) = 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{x} + \varphi(y)$, e deve essere $3\sqrt{x^3y} = \frac{\partial U}{\partial y} = 3\sqrt{x^3y} + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x,y) = 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{x}$.

(10) Si ha $\frac{\partial}{\partial y}y\log(1+xy) = \log(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} = \frac{\partial}{\partial x}x\log(1+xy)$, per cui $\vec{F}$ è irrotazionale in $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy > -1\big\}$, che è semplicemente connesso (cioè le sue componenti connesse lo sono), e

quindi $\vec{F}$ è conservativo. Determiniamo una funzione potenziale U. Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = y\log(1+xy) \implies U(x,y) = \int y\log(1+xy)\,dx + \varphi(y) = (1+xy)(\log(1+xy)-1) + \varphi(y)$, e deve essere $x\log(1+xy) = \frac{\partial U}{\partial y} = x\log(1+xy) + \varphi'(y)$, per cui $\varphi'(y) = 0$, e possiamo scegliere $\varphi \equiv 0$. Quindi $U(x,y) = (1+xy)(\log(1+xy)-1)$.

□

Svolgimento esercizio 5

(1) Indichiamo con $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\,\vec{\imath} + g(x,y)\,\vec{\jmath}$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \log\frac{y}{x} = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec{F}$ è irrotazionale in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, che è convesso e quindi semplicemente connesso; quindi $\vec{F}$ è conservativo in A, e il suo integrale dipende solo dai punti iniziale e finale di γ. Poiché $\gamma(0) = (1,2)$, $\gamma(1) = (e,2)$, per calcolare l'integrale possiamo usare il cammino $\gamma_0(t) = \big(1+(e-1)t, 2\big)$, $t \in [0,1]$. Si ha allora,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} &= \int_{\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 2\Big(\log\frac{2}{1+(e-1)t} - 1\Big)(e-1)\,dt \\
&= 2(e-1)\log\frac{2}{e} - 2(e-1)\int_0^1 \log\big(1+(e-1)t\big)\,dt \overset{(a)}{=} 2(e-1)\log\frac{2}{e} - 2\int_1^e \log x\,dx \\
&\overset{(b)}{=} 2(e-1)\log\frac{2}{e} - \big[x\log x - x\big]_1^e = 2(e-1)\log 2 - 2e,
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $x = 1+(e-1)t \implies dx = (e-1)\,dt$, e in (b) il risultato $\int \log x\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$.

(2) Indichiamo con $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\,\vec{\imath} + g(x,y)\,\vec{\jmath}$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = -15x^2 = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec{F}$ è irrotazionale in $A = \mathbb{R}^2$, che è convesso e quindi semplicemente connesso; quindi $\vec{F}$ è conservativo in A, e il suo integrale dipende solo dai punti iniziale e finale di γ. Poiché $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1) = (1,1)$, per calcolare l'integrale possiamo usare il cammino

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} (t,0), & t \in [0,1], \\ (1,t-1), & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Si ha allora,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_{\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^1 t(16t^2+2)\,dt + \int_1^2 \big(3(t-1)^2 - 5\big)\,dt = \big[4t^4 + t^2\big]_0^1 + \big[(t-1)^3 - 5t\big]_1^2 = 1.$$

(3) Indichiamo con $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\,\vec{\imath} + g(x,y,z)\,\vec{\jmath} + h(x,y,z)\,\vec{\jmath}$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 4xz = \frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial z} = 2y = \frac{\partial h}{\partial y}$, $\vec{F}$ è irrotazionale in $A = \mathbb{R}^3$, che è convesso e quindi semplicemente connesso; quindi $\vec{F}$ è conservativo in A, e il suo integrale dipende solo dai punti iniziale e finale di γ. Poiché $\gamma(0) = (1,1,0)$, $\gamma(1) = (e,1,2)$, per calcolare l'integrale possiamo usare il cammino

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} (1,1,2t), & t \in [0,1], \\ (e^{t-1},1,2), & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Si ha allora,

$$\int_\gamma \vec F\cdot d\vec\gamma=\int_{\gamma_0}\vec F\cdot d\vec\gamma=\int_0^1(1+2t)2\,dt+\int_1^2(3e^{2(t-1)}+1+8e^{t-1})e^{t-1}\,dt$$
$$\overset{(a)}{=}\big[2t+2t^2\big]_0^1+\int_1^e(3x^2+8x+1)\,dx=4+\big[x^3+4x^2+x\big]_1^e=e^3+4e^2-1,$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $x=e^{t-1}\implies dx=e^{t-1}\,dt$.

(4) Indichiamo con $\vec F(x,y)=f(x,y)\,\vec\imath+g(x,y)\,\vec\jmath$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y^3+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec F$ è irrotazionale in $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\vec F=\vec F_1+\vec F_2$ è la somma di un campo vettoriale conservativo $\vec F_1=x^3y^4\,\vec\imath+x^4y^3\,\vec\jmath$ [perché irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso], e di un campo vettoriale irrotazionale non necessariamente conservativo $\vec F_2=-\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec\imath+\frac{x}{x^2+y^2}\,\vec\jmath$. Si ha allora,

$$\int_\gamma\vec F\cdot d\vec\gamma=\int_\gamma\vec F_1\cdot d\vec\gamma+\int_\gamma\vec F_2\cdot d\vec\gamma=\int_\gamma\vec F_2\cdot d\vec\gamma=\int_0^{2\pi}\big(\cos^2t+\sin^2t\big)\,dt=2\pi.$$

(5) Indichiamo con $\vec F(x,y)=f(x,y)\,\vec\imath+g(x,y)\,\vec\jmath$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(y-2)^2-x^2}{(x^2+(y-2)^2)^2}+\frac{1}{2\sqrt y}-2x=\frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec F$ è irrotazionale in $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y>0\}\setminus\{(0,2)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\vec F=\vec F_1+\vec F_2$ è la somma di un campo vettoriale conservativo $\vec F_1=\big(\sqrt y-2xy\big)\,\vec\imath+\big(\frac{x}{2\sqrt y}-x^2\big)\,\vec\jmath$ [perché irrotazionale in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y>0\}$, che è semplicemente connesso], e di un campo vettoriale irrotazionale non necessariamente conservativo $\vec F_2=\frac{y-2}{x^2+(y-2)^2}\,\vec\imath-\frac{x}{x^2+(y-2)^2}\,\vec\jmath$.
Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di un campo vettoriale irrotazionale, possiamo introdurre la curva $\gamma_0(t)=(\cos t,2+\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, e ottenere

$$\int_{\partial^+D}\vec F\cdot d\vec\gamma=\int_\gamma\vec F_1\cdot d\vec\gamma+\int_\gamma\vec F_2\cdot d\vec\gamma=\int_\gamma\vec F_2\cdot d\vec\gamma=\int_{\gamma_0}\vec F_2\cdot d\vec\gamma=\int_0^{2\pi}\big(-\sin^2t-\cos^2t\big)\,dt=-2\pi.$$

(6) Indichiamo con $\vec F(x,y)=f(x,y)\,\vec\imath+g(x,y)\,\vec\jmath$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x-2)^2-(y-2)^2}{((x-2)^2+(y-2)^2)^2}+\frac92\sqrt{xy}=\frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec F$ è irrotazionale in $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,y>0\}\setminus\{(2,2)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\vec F=\vec F_1+\vec F_2$ è la somma di un campo vettoriale conservativo $\vec F_1=\big(3\sqrt{xy^3}+\frac{1}{\sqrt x}\big)\,\vec\imath+3\sqrt{x^3y}\,\vec\jmath$ [perché irrotazionale in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,y>0\}$, che è semplicemente connesso], e di un campo vettoriale irrotazionale non necessariamente conservativo $\vec F_2=\frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\,\vec\imath-\frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\,\vec\jmath$.
Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di un campo vettoriale irrotazionale, possiamo introdurre la curva $\gamma_0(t)=(2+\cos t,2+\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, e ottenere

$$\int_{\partial^+D}\vec F\cdot d\vec\gamma=\int_\gamma\vec F_1\cdot d\vec\gamma+\int_\gamma\vec F_2\cdot d\vec\gamma=\int_\gamma\vec F_2\cdot d\vec\gamma=\int_{\gamma_0}\vec F_2\cdot d\vec\gamma=\int_0^{2\pi}\big(-\sin^2t-\cos^2t\big)\,dt=-2\pi.$$

(7) Indichiamo con $\vec F(x,y)=f(x,y)\,\vec\imath+g(x,y)\,\vec\jmath$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x-2)^2-(y-2)^2}{((x-2)^2+(y-2)^2)^2}+e^x-e^y=\frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec F$ è irrotazionale in $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0),(2,2)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\vec F=\vec F_1+\vec F_2$ è la somma di un campo vettoriale

conservativo $\vec{F}_1 = (ye^x - e^y)\,\vec{\imath} + (e^x - xe^y)\,\vec{\jmath}$ [perché irrotazionale in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, che è semplicemente connesso], e di due campi vettoriali irrotazionali non necessariamente conservativi $\vec{F}_2 = \frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} - \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}$, e $\vec{F}_3 = \frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\,\vec{\imath} - \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\,\vec{\jmath}$. Osserviamo anche che il campo vettoriale $\vec{F}_3$ è conservativo in una regione semplicemente connessa contenente D, ad esempio in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2\}$.
Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di un campo vettoriale irrotazionale, possiamo introdurre la curva $\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e ottenere

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_\gamma \vec{F}_1\cdot d\vec{\gamma} + \int_\gamma \vec{F}_2\cdot d\vec{\gamma} + \int_\gamma \vec{F}_3\cdot d\vec{\gamma} = \int_\gamma \vec{F}_2\cdot d\vec{\gamma} = \int_{\gamma_0} \vec{F}_2\cdot d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t\right) dt = -2\pi.$$

(8) Indichiamo con $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\,\vec{\imath} + g(x,y)\,\vec{\jmath}$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x-1)^2-y^2}{((x-1)^2+y^2)^2} - 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec{F}$ è irrotazionale in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo che $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ è la somma di due campi vettoriali irrotazionali $\vec{F}_1 = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\,\vec{\imath} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\,\vec{\jmath}$, e $\vec{F}_2 = \frac{-2y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \frac{2x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}$. Allora, posto $\gamma_0(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e $\gamma_1(t) = \left(1 + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right)$, $t \in [-\pi, \pi]$, si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} &= \int_\gamma \vec{F}_1\cdot d\vec{\gamma} + \int_\gamma \vec{F}_2\cdot d\vec{\gamma} \overset{(a)}{=} \int_{\gamma_1} \vec{F}_1\cdot d\vec{\gamma} + \int_{\gamma_0} \vec{F}_2\cdot d\vec{\gamma} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)\,dt + 2\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = -2\pi + 4\pi = 2\pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il fatto che $\vec{F}_1$ è conservativo in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$, e che $\vec{F}_2$ è conservativo in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

(9) Indichiamo con $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\,\vec{\imath} + g(x,y)\,\vec{\jmath}$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{(x-1)^2-y^2}{((x-1)^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec{F}$ è irrotazionale in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\}$, che non è semplicemente connesso. Osserviamo che $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ è la somma di tre campi vettoriali irrotazionali $\vec{F}_1 = \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\,\vec{\imath} - \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\,\vec{\jmath}$, $\vec{F}_2 = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}$, e $\vec{F}_3 = -\frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} - \frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}$. Allora, posto $\gamma_0(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right)$, $t \in [-\pi, \pi]$, e $\gamma_1(t) = \left(1 + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t\right)$, $t \in [-\pi, \pi]$, si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} &= \int_\gamma \vec{F}_1\cdot d\vec{\gamma} + \int_\gamma \vec{F}_2\cdot d\vec{\gamma} + \int_\gamma \vec{F}_3\cdot d\vec{\gamma} \overset{(a)}{=} -\int_{\gamma_1} \vec{F}_1\cdot d\vec{\gamma} - \int_{\gamma_0} (\vec{F}_2 + \vec{F}_3)\cdot d\vec{\gamma} \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} (-2\sin^2 t - 2\cos^2 t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 4\pi - 2\pi = 2\pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il fatto che $\vec{F}_1$ è conservativo in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}$, e che $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ sono conservativi in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

(10) Indichiamo con $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\,\vec{\imath} + g(x,y)\,\vec{\jmath}$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec{F}$ non è irrotazionale. Applichiamo la formula di Gauss-Green, ottenendo

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ D} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} &= \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{x}{(1+y)^2} - 2xy\right) dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{x}{1+y} - xy^2\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 -\frac{x}{2}\,dx = \left[-\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(11) Indichiamo con $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\,\vec{\imath} + g(x,y)\,\vec{\jmath}$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec{F}$ non è irrotazionale. Applichiamo la formula di Gauss-Green, ottenendo

$$\begin{aligned}\int_{\partial^- D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = -\iint_D \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} \Big(y + \frac{1}{1+y^2}\Big)\, dy = \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}y^2 + \operatorname{arctg} y\Big]_{x-1}^{1-x} dx \\ = \int_0^1 \Big(\operatorname{arctg}(1-x) - \operatorname{arctg}(x-1)\Big)\, dx \stackrel{(a)}{=} 2\int_0^1 \operatorname{arctg} t\, dt \\ = 2\Big[t \operatorname{arctg} t\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\, dt = \frac{\pi}{2} - \Big[\log(1+t^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \log 2,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usata la sostituzione $t = 1 - x$.

(12) Indichiamo con $\vec{F}(x,y) = f(x,y)\,\vec{\imath} + g(x,y)\,\vec{\jmath}$ il campo vettoriale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$, $\vec{F}$ non è irrotazionale. Applichiamo la formula di Gauss-Green, ottenendo

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \iint_D \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\, dxdy = -\iint_D (x^2+y^2)\, dxdy = -\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \varrho^3\, d\varrho \\ = -\frac{\pi}{2}\Big[\frac{1}{4}\varrho^4\Big]_0^1 = -\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

$\square$