Analisi Matematica II
Integrali curvilinei

ghezzaCurve **Esercizio 1.** Calcolare la lunghezza delle seguenti curve, descritte con equazioni parametriche, o come grafici di funzioni

(1) $\gamma(t) = \big(t^3, t^2\big)$, $t \in [0,1]$,
(2) $\gamma(t) = \big(\arccos t, \log t\big)$, $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,
(3) $\gamma(t) = \big(e^t - 1, e^{2t} + 1\big)$, $t \in [0,1]$,
(4) $\gamma(t) = \big(3t^2 + 10t, 4t^2 + 5t\big)$, $t \in [-1,1]$,
(5) $\gamma(t) = \big(t, \sqrt{8t}, \log t\big)$, $t \in [1,2]$,
(6) $\gamma(t) = \big(\frac{1}{4}\cos 2t, \cos^3 t, \sin^3 t\big)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
(7) $\gamma(t) = \big(4\cos t - \cos 4t, 4\sin t - \sin 4t\big)$, $t \in [0, 2\pi]$,
(8) $\gamma(t) = \big(\cosh t \cos t, \cosh t \sin t, t\big)$, $t \in [0,1]$.
(9) $y = (3 + 2x)^{3/2}$, $x \in [0,2]$,
(10) $y = \log\cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,
(11) $y = \sqrt{1 + 2x}$, $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$,
(12) $y = \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}$, $x \in [0,5]$,
(13) $y = x^2$, $x \in [1,2]$,
(14) $y = x + \frac{2}{3}x^{3/2}$, $x \in [0,1]$,
(15) [spirale logaritmica] $\varrho(\vartheta) = e^{3\vartheta}$, $\vartheta \in [0,1]$.
(16) [spirale di Archimede] $\varrho(\vartheta) = 2\vartheta$, $\vartheta \in [0,1]$,

neiFunzioni **Esercizio 2.** Calcolare $\int_\gamma f\, ds$, dove

(1) $f(x,y) = \sin x + \cos y$ e $\gamma(t) = (\pi t, 2\pi t)$, $t \in [0,1]$,
(2) $f(x,y) = \sqrt{1 - y^2}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$,
(3) $f(x,y) = x^2 y$ e $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [\pi/2, \pi]$,
(4) $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$,
(5) $f(x,y) = x^3 + y$ e $\gamma(t) = (2t, t^3)$, $t \in [0,1]$,
(6) $f(x,y,z) = z$ e $\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$, $t \in [0, 2\pi]$,
(7) $f(x,y,z) = \sqrt{z}$ e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0,1]$,
(8) $f(x,y) = \sqrt{x + 2y}$ e γ è il segmento di $\mathbb{R}^2$ congiungente i punti $(1,2)$ e $(3,6)$,
(9) $f(x,y) = x^2$ e γ è il grafico della funzione $y = \log x$, $x \in [1,2]$,
(10) $f(x,y) = y^2$ e γ è il grafico della funzione $y = e^x$, $x \in [0, \log 2]$,
(11) $f(x,y) = y$ e γ è il grafico della funzione $y = \sqrt{1 + x^2}$, $x \in [0,1]$,

(12) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e γ è la curva di equazione polare $\varrho(\vartheta) = \vartheta$, $\vartheta \in [0,1]$.

`vCampiVettA` **Esercizio 3.** Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$, dove

(1) $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\sqrt{y}\,\vec{\jmath}$, e γ è il segmento che congiunge i punti $(1,0)$ e $(2,2)$,

(2) $\vec{F}(x,y) = y^2\,\vec{\imath} + e^x\,\vec{\jmath}$, e γ è il segmento che congiunge i punti $(1,0)$ e $(2,2)$,

(3) $\vec{F}(x,y) = x\log y\,\vec{\imath} - y\,\mathrm{arctg}\,x\,\vec{\jmath}$, e γ è il segmento che congiunge i punti $(1,1)$ e $(3,3)$,

(4) $\vec{F}(x,y) = y\sqrt{x}\,\vec{\imath} - xe^y\,\vec{\jmath}$, e γ è il segmento di estremi $(0,0)$ e $(1,1)$,

(5) $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{(1+x)^2}\,\vec{\imath} - \frac{1}{(1+y)^2}\,\vec{\jmath}$, e γ è la spezzata di vertici $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$,

(6) $\vec{F}(x,y) = yx^2\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$, e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$,

(7) $\vec{F}(x,y) = y^2e^x\,\vec{\imath} - xy\,\vec{\jmath}$, e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$,

(8) $\vec{F}(x,y) = x\sqrt{1-y}\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$, e $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$,

(9) $\vec{F}(x,y) = x\sin\sqrt{y}\,\vec{\imath} + y\sin x\,\vec{\jmath}$, e $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,\pi]$,

(10) $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} + \vec{k}$, e $\gamma(t) = \big(\cos t, \sin t, t\big)$, $t \in [0,2\pi]$,

(11) $\vec{F}(x,y,z) = xy\,\vec{\imath} + yz\,\vec{\jmath} - z\,\vec{k}$, e γ è il segmento di estremi $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$,

(12) $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} + y\,\vec{k}$, e γ è la spezzata di vertici $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$.

`rrotConserv` **Esercizio 4.** Verificare se i campi vettoriali seguenti sono conservativi (nel loro insieme di definizione), e, in caso affermativo, trovarne una funzione potenziale.

(1) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x}{x+y}\,\vec{\imath} + \dfrac{y}{x+y}\,\vec{\jmath}$,

(2) $\vec{F}(x,y) = x\log(1+xy)\,\vec{\imath} + y\log(1+xy)\,\vec{\jmath}$,

(3) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}\,\vec{\imath} + \dfrac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}\,\vec{\jmath}$,

(4) $\vec{F}(x,y) = (ye^x - e^y)\,\vec{\imath} + (e^x - xe^y)\,\vec{\jmath}$,

(5) $\vec{F}(x,y) = (y\cos x - xy\sin x - \sin y)\,\vec{\imath} + (x\cos x - x\cos y + 1)\,\vec{\jmath}$,

(6) $\vec{F}(x,y) = (\sqrt{y} - 2xy)\,\vec{\imath} + \left(\dfrac{x}{2\sqrt{y}} - x^2\right)\vec{\jmath}$,

(7) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{1+y}{1+x}\,\vec{\imath} + \log(1+x)\,\vec{\jmath}$,

(8) $\vec{F}(x,y) = e^{x/y}\,\vec{\imath} + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)e^{x/y}\,\vec{\jmath}$,

(9) $\vec{F}(x,y) = \left(3\sqrt{xy^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\vec{\imath} + 3\sqrt{x^3y}\,\vec{\jmath}$,

(10) $\vec{F}(x,y) = y\log(1+xy)\,\vec{\imath} + x\log(1+xy)\,\vec{\jmath}$.

`vCampiVettB` **Esercizio 5.** Calcolare gli integrali curvilinei seguenti

(1) $\int_\gamma \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = y\Big(\log \frac{y}{x} - 1\Big)\,\vec\imath + x\Big(\log\frac{y}{x}+1\Big)\,\vec\jmath$, e $\gamma(t) = \big(e^t, 2+\sin 2\pi t\big)$, $t\in[0,1]$,

(2) $\int_\gamma \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = x(16x^2-15xy+2)\,\vec\imath + (3y^2-5x^3)\,\vec\jmath$, e $\gamma(t) = \big(t^3+t^2-t, t^3-t^2+\sin\frac{\pi}{2}t\big)$, $t\in[0,1]$,

(3) $\int_\gamma \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = (3x^2+y^2+2xz^2)\,\vec\imath + 2y(x+z)\,\vec\jmath + (y^2+2x^2z)\,\vec k$, e $\gamma(t) = \big(e^t, 1+\sin 2\pi t, t^2+t\big)$, $t\in[0,1]$,

(4) $\int_\gamma \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = \Big(x^3y^4 - \frac{y}{x^2+y^2}\Big)\,\vec\imath + \Big(x^4y^3 + \frac{x}{x^2+y^2}\Big)\,\vec\jmath$, e $\gamma(t) = \big(\sin t, \cos t\big)$, $t\in[0,2\pi]$,

(5) $\int_{\partial^+ D} \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = \Big(\frac{y-2}{x^2+(y-2)^2} + \sqrt{y} - 2xy\Big)\,\vec\imath + \Big(\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2 - \frac{x}{x^2+(y-2)^2}\Big)\,\vec\jmath$, e $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 3\}$,

(6) $\int_{\partial^+ D} \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = \Big(\frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} + 3\sqrt{xy^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,\vec\imath + \Big(3\sqrt{x^3y} - \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2}\Big)\,\vec\jmath$, e $D = [1,3]^2$,

(7) $\int_{\partial^+ D} \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = \Big(\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} + ye^x - e^y\Big)\,\vec\imath + \Big(e^x - xe^y - \frac{x-2}{(x-2)^2+(y-2)^2} - \frac{x}{x^2+y^2}\Big)\,\vec\jmath$, e $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\sqrt{4-4x^2} \le y \le \cos(\frac{\pi}{2}x), -1\le x\le 1\}$,

(8) $\int_\gamma \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = \Big(\frac{y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\Big)\,\vec\imath + \Big(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\Big)\,\vec\jmath$, e γ è la circonferenza $x^2+y^2=9$, percorsa in senso antiorario,

(9) $\int_\gamma \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = \Big(\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{y+x}{x^2+y^2}\Big)\,\vec\imath + \Big(\frac{x-y}{x^2+y^2} - \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\Big)\,\vec\jmath$, e γ è l'ellisse $x^2+4y^2=4$, percorsa in senso orario.

(10) $\int_{\partial^+ D} \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = \frac{x}{1+y}\,\vec\imath - (\sin y + x^2y)\,\vec\jmath$, e $D = [0,1]^2$,

(11) $\int_{\partial^- D} \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = \operatorname{arctg} y\,\vec\imath - xy\,\vec\jmath$, e D è il triangolo di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$,

(12) $\int_{\partial^+ D} \vec F \cdot d\gamma$, dove $\vec F(x,y) = (x^3+x^2y)\,\vec\imath + (y^3-y^2x)\,\vec\jmath$, e $D = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\big\}$,