

Analisi Matematica II
Calcolo differenziale per funzioni di più variabili (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Intanto f è continua in $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue.

Inoltre, in $(x_0, 0)$, si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{\arctg(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{xy(1+o(1))}{y} = x_0 = f(x_0, 0) \iff x_0 = 0$. Quindi f è continua in $A \cup \{(0, 0)\}$.

(2) Intanto f è continua in $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue.

Inoltre, in $(0, y_0)$, si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{xy(1+o(1))}{x} = y_0 = f(0, y_0) \iff y_0 = 0$. Quindi f è continua in $A \cup \{(0, 0)\}$.

(3) Intanto f è continua in $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue.

Inoltre, in $(0, y_0)$, si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \arctg x \sin\left(\frac{|y|}{x}\right) = 0 = f(0, y_0)$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.

(4) La continuità di f in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$, si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y \neq 0}} \sqrt[3]{1+y} \exp\left(\frac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}\right) = +\infty.$$

Invece, in $(0, 0)$, si ha $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \neq 0}} f(x, y) \neq f(0, 0)$, in quanto

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \sqrt[3]{1+y} \exp\left(\frac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1+x} \exp\left(\frac{1}{2x^2}\right) = +\infty.$$

Quindi f è continua in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.

(5) Intanto f è continua in $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue.

Inoltre, in $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$, si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} x^2 \sin\left(\frac{y^3}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} x^2 \frac{y^3}{x} (1 + o(1)) \cos\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} xy^3(1+o(1)) \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 0 = f(x_0, 0)$, e in $(0, y_0)$, si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} x^2 \sin\left(\frac{y^3}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 0 = f(0, y_0)$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.

(6) Intanto f è continua in $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue.

Inoltre, in $(x_0, -x_0)$, $x_0 \neq 0$, si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,-x_0)} \frac{x^3 y^3}{x^3 + y^3} = \frac{x_0^3 (-x_0)^3}{x_0^3 + (-x_0)^3} = \frac{-x_0^6}{0} = \nexists$, e in $(0, 0)$ si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^3 + y^3} = \nexists$, in quanto $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^3 y^3}{x^3 + y^3} = 0$, mentre $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=-x+x^4}} \frac{x^3 y^3}{x^3 + y^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 (-x+x^4)^3}{x^3 + (-x+x^4)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^6(1+o(1))}{3x^6(1+o(1))} = -\frac{1}{3}$. Quindi f è continua in A .

(7) Intanto f è continua in $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue.

Inoltre, in (x_0, x_0) , $x_0 \neq 0$, si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,x_0)} \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{x_0^2 + x_0^2}{x_0 - x_0} = \frac{2x_0^2}{0} = \nexists$, e in $(0, 0)$ si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \nexists$,

in quanto $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x-x^3}} \frac{x^2+y^2}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+(x-x^3)^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(1+o(1))}{x^3} = \nexists$. Quindi f è continua in A .

(8) Intanto f è continua in $A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1+y+x^2}{y} > 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x^2 - 1 \right\}$

per teoremi generali sulle funzioni continue. Inoltre, in $(x_0, 0)$, si ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \left(\frac{1+y+x^2}{y} \right)^y = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \exp(y \log(1+y+x^2) - y \log y) = 1 = f(x_0, 0)$. Quindi f è continua in $A \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

(9) Intanto f è continua in $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue.

Inoltre, in (x_0, x_0^2) , si ha $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, x_0^2) \\ y < x^2}} x^2 - y = 0$, e $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, x_0^2) \\ y \geq x^2}} y^2 + x = x_0^4 + x_0 = 0 \iff x_0 = 0 \vee x_0 = -1$. Quindi f è continua in $A \cup \{(0, 0), (-1, 1)\}$.

(10) Intanto f è continua in $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y^3\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue.

Inoltre, in (y_0^3, y_0) , si ha $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (y_0^3, y_0) \\ x \leq y^3}} x + y^3 = 2y_0^3$, e $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (y_0^3, y_0) \\ x > y^3}} x^2 + y^6 = 2y_0^6$, per cui f è continua $\iff y_0^3 = y_0^6 \iff y_0 = 0 \vee y_0 = 1$. Quindi f è continua in $A \cup \{(0, 0), (1, 1)\}$.

(11) Intanto f è continua in $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue.

Inoltre, in (x_0, x_0^2) , si ha $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, x_0^2) \\ y < x^2}} \sin(xy) = \sin(x_0^3)$, e $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, x_0^2) \\ y \geq x^2}} 0 = 0 = \sin(x_0^3) \iff x_0^3 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x_0 = \sqrt[3]{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$. Quindi f è continua in $A \cup \{(\sqrt[3]{k\pi}, \sqrt[3]{k^2\pi^2}) : k \in \mathbb{Z}\}$.

(12) Osserviamo che $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, dove $g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \leq 1, \\ \frac{1}{e} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), & t > 1. \end{cases}$ Poiché $\lim_{t \rightarrow 1^-} e^{-t} = \frac{1}{e} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1}{e} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = g(1)$, ne segue che $g \in C^0(\mathbb{R})$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.

(13) Osserviamo che $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$, dove $g(t) = \begin{cases} t, & t < 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2, \\ e^{t-2}, & t > 2. \end{cases}$ Poiché $\lim_{t \rightarrow 1^-} t = 1$, e $\lim_{t \rightarrow 2^+} e^{t-2} = 1$, ne segue che $g \in C^0(\mathbb{R})$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. □

Svolgimento esercizio 2

(1) La continuità di f in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(x_0, 0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y \neq 0}} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y \neq 0}} \frac{xy(1+o(1))}{y} = x_0 = f(x_0, 0).$$

Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Si ha

$$f_x(x, y) = \cos(xy),$$

$$f_y(x, y) = \frac{xy \cos(xy) - \sin(xy)}{y^2}.$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(x_0, 0)$. Si ha

$$f_x(x_0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, 0) - f(x_0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_0 + t - x_0}{t} = 1,$$

$$f_y(x_0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, t) - f(x_0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 t) - x_0 t}{t^2} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x_0^3 t^3(1 + o(1))}{t^2} = 0 & x_0 \neq 0, \\ 0 & x_0 = 0. \end{cases}$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1 . In $(x_0, 0)$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y \neq 0}} \frac{f(x, y) - f(x_0, 0) - f_x(x_0, 0)(x - x_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y \neq 0}} \frac{\sin(xy) - x_0 y - (x - x_0)y}{y\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{-\frac{1}{6}x^3 y^3(1 + o(1))}{y\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} = -\frac{x_0^3}{6} \lim_{(z,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2(1 + o(1))}{\sqrt{z^2 + y^2}} = -\frac{x_0^3}{6} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho \sin^2 \vartheta = 0, \end{aligned}$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y=0}} \frac{f(x, y) - f(x_0, 0) - f_x(x_0, 0)(x - x_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y=0}} \frac{x - x_0 - (x - x_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Quindi f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

(2) La continuità di f in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0, y_0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x \neq 0}} \frac{y^2 \sin x}{x} = y_0^2 = f(0, y_0) \iff y_0 = 0.$$

Quindi f è continua in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$. Calcoliamo le derivate parziali in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Si ha

$$f_x(x, y) = \frac{y^2(x \cos x - \sin x)}{x^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{2y \sin x}{x}.$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(0, y_0)$. Si ha

$$f_x(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y_0^2 \sin t}{t^2} = \begin{cases} \neq & y_0 \neq 0, \\ 0 & y_0 = 0, \end{cases}$$

$$f_y(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t} = 0.$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1 . In $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, f non è differenziabile, perché non è continua. In $(0, 0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0}} \frac{y^2 \sin x}{x\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2(1 + o(1))}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho \sin^2 \vartheta = 0,$$

e $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ x \neq 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Quindi f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$.

(3) La continuità di f in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0, y_0)$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x \neq 0}} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} x^2 + y^2 = y_0^2, \\ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x=0}} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} y = y_0, \end{aligned}$$

per cui f è continua $\iff y_0^2 = y_0 \iff y_0 \in \{0,1\}$. Quindi f è continua in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0), (0,1)\}$. Calcoliamo le derivate parziali in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x, \\ f_y(x,y) &= 2y. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Calcoliamole in $(0, y_0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + y_0^2 - y_0}{t} = \begin{cases} \nexists & y_0 \notin \{0,1\}, \\ 0 & y_0 \in \{0,1\}, \end{cases} \\ f_y(0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y_0 + t - y_0}{t} = 1. \end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1 . In $(0, y_0)$, $y_0 \notin \{0,1\}$, f non è differenziabile, perché non esiste f_x . In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0}} \frac{f(x,y) - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2 - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} (\varrho - \sin \vartheta) = \nexists.$$

In $(0,1)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,1) \\ x \neq 0}} \frac{f(x,y) - f(0,1) - f_y(0,1)y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 + y^2 - 1 - y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = \nexists.$$

Quindi f è differenziabile in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

(4) La continuità di f in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0, y_0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x \neq 0}} (x+y)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \nexists & y_0 \neq 0, \\ 0 & y_0 = 0. \end{cases}$$

Quindi f è continua in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$. Calcoliamo le derivate parziali in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(x+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{(x+y)^2}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right), \\ f_y(x,y) &= 2(x+y) \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(0, y_0)$. Si ha

$$f_x(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t + y_0)^2}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} \neq & y_0 \neq 0, \\ 0 & y_0 = 0, \end{cases}$$

$$f_y(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t} = 0.$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1 . In $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, f non è differenziabile, perché non esiste f_x . In $(0, 0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0}} \frac{(x + y)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho (\cos \vartheta + \sin \vartheta)^2 \sin\left(\frac{1}{\varrho \cos \vartheta}\right) = 0,$$

e $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ x \neq 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. Quindi f è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

(5) La continuità di f in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0, y_0)$ si ha $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x \neq 0}} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos y = 0$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Si ha

$$f_x(x, y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos y - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cos y,$$

$$f_y(x, y) = -x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin y.$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(0, y_0)$. Si ha

$$f_x(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \cos y_0 = 0,$$

$$f_y(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t} = 0.$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1 . In $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x \neq 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x \neq 0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos y = 0,$$

perché $x^2 \rightarrow 0$, e gli altri fattori sono limitati. In $(0, 0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos y = 0,$$

perché $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$, e gli altri fattori sono limitati. Quindi f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

(6) La continuità di f in $\mathbb{R}^2$ segue dal fatto che, posto $g(t) := \begin{cases} t \log |t| & t \neq 0, \\ 0 & t = 0, \end{cases}$ che è continua in $\mathbb{R}$, si ha $f(x, y) = g(xy)$. Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2$. Si ha $g'(t) = \begin{cases} \log |t| + 1 & t \neq 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \log |t|}{t} = -\infty, & t = 0, \end{cases}$ per cui, se $xy \neq 0$,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= g'(xy)y = y + y \log |xy|, \\ f_y(x, y) &= g'(xy)x = x + x \log |xy|. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(x_0, 0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x_0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, 0) - f(x_0, 0)}{t} = 0 \\ f_y(x_0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, t) - f(x_0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_0 t \log |x_0 t|}{t} = \begin{cases} \neq & x_0 \neq 0, \\ 0 & x_0 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Calcoliamole in $(0, y_0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t y_0 \log |t y_0|}{t} = \begin{cases} \neq & y_0 \neq 0, \\ 0 & y_0 = 0, \end{cases} \\ f_y(0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$, perché ivi f è di classe C^1 . Non è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$, perché ivi non esiste una delle derivate parziali. In $(0, 0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ xy \neq 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ xy \neq 0}} \left(x \log |x| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \log |y| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0,$$

e $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x=0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. Quindi f è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

(7) La continuità di f in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. I punti di $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4 = 0\}$ si possono descrivere come $x = \cos \alpha$, $y = 2 \sin \alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Allora si ha

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (\cos \alpha, 2 \sin \alpha) \\ (x, y) \notin C}} (4x^2 + y^2 - 4) \cos \left(\frac{1}{4x^2 + y^2 - 4} \right) = 0.$$

Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 8x \cos \left(\frac{1}{4x^2 + y^2 - 4} \right) + \frac{8x}{4x^2 + y^2 - 4} \sin \left(\frac{1}{4x^2 + y^2 - 4} \right), \\ f_y(x, y) &= 2y \cos \left(\frac{1}{4x^2 + y^2 - 4} \right) + \frac{2y}{4x^2 + y^2 - 4} \sin \left(\frac{1}{4x^2 + y^2 - 4} \right). \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2 \setminus C$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(\cos \alpha, 2 \sin \alpha) \in C$. Si ha

$$\begin{aligned}
 f_x(\cos \alpha, 2 \sin \alpha) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\cos \alpha + t, 2 \sin \alpha) - f(\cos \alpha, 2 \sin \alpha)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4(\cos \alpha + t)^2 + 4 \sin^2 \alpha - 4}{t} \cos \left(\frac{1}{4(\cos \alpha + t)^2 + 4 \sin^2 \alpha - 4} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{8t \cos \alpha + 4t^2}{t} \cos \left(\frac{1}{8t \cos \alpha + 4t^2} \right) = \begin{cases} \neq 0 & \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \\
 f_y(\cos \alpha, 2 \sin \alpha) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\cos \alpha, 2 \sin \alpha + t) - f(\cos \alpha, 2 \sin \alpha)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 \cos^2 \alpha + (2 \sin \alpha + t)^2 - 4}{t} \cos \left(\frac{1}{4 \cos^2 \alpha + (2 \sin \alpha + t)^2 - 4} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t \sin \alpha + t^2}{t} \cos \left(\frac{1}{4t \sin \alpha + t^2} \right) = \begin{cases} \neq 0 & \alpha \neq 0, \pi, \\ 0 & \alpha = 0, \pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus C$, perché ivi f è di classe C^1 . In C , f non è differenziabile, perché o non esiste f_x , o non esiste f_y .

(8) La continuità di f in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \neq 0\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. Nei punti di $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ si ha

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, x_0^2) \\ y < x^2}} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, x_0^2)} \sin(xy) = \sin(x_0^3), \\
 \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, x_0^2) \\ y \geq x^2}} f(x, y) &= 0 = f(x_0, x_0^2),
 \end{aligned}$$

e quindi f è continua $\iff \sin(x_0^3) = 0 \iff x_0^3 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x_0 = \sqrt[3]{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$. Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Si ha

$$\begin{aligned}
 f_x(x, y) &= \begin{cases} y \cos(xy) & y < x^2, \\ 0 & y > x^2, \end{cases} \\
 f_y(x, y) &= \begin{cases} x \cos(xy) & y < x^2, \\ 0 & y > x^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2 \setminus C$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamo f_x in $(x_0, x_0^2) \in C$. Se $x_0 < 0$, si ha

$$\begin{aligned}
 f_{x+}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = 0, \\
 f_{x-}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin((x_0 + t)x_0^2)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0^3) \cos(x_0^2 t) + \cos(x_0^3) \sin(x_0^2 t)}{t} = \begin{cases} \neq 0 & x_0 \neq \sqrt[3]{k\pi}, \\ x_0^2 \cos(x_0^3) & x_0 = \sqrt[3]{k\pi}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

e quindi f_x non esiste mai. Se $x_0 = 0$, si ha $f_x(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$. Se $x_0 > 0$, si ha

$$\begin{aligned} f_{x-}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = 0, \\ f_{x+}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t, x_0^2) - f(x_0, x_0^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin((x_0 + t)x_0^2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0^3) \cos(x_0^2 t) + \cos(x_0^3) \sin(x_0^2 t)}{t} = \begin{cases} \nexists & x_0 \neq \sqrt[3]{k\pi}, \\ x_0^2 \cos(x_0^3) & x_0 = \sqrt[3]{k\pi}, \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi f_x non esiste mai. Calcoliamo ora f_y . Si ha

$$\begin{aligned} f_{y+}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0, x_0^2 + t) - f(x_0, x_0^2)}{t} = 0, \\ f_{y-}(x_0, x_0^2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, x_0^2 + t) - f(x_0, x_0^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0(x_0^2 + t))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0^3) \cos(x_0 t) + \cos(x_0^3) \sin(x_0 t)}{t} = \begin{cases} \nexists & x_0 \neq \sqrt[3]{k\pi}, \\ x_0 \cos(x_0^3) & x_0 = \sqrt[3]{k\pi}. \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi f_y esiste solo in $(0, 0)$. Infine, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus C$, perché ivi f è di classe C^1 . In $C \setminus \{(0, 0)\}$, f non è differenziabile, perché non esistono f_x e f_y . In $(0, 0)$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y < x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho \cos \vartheta \sin \vartheta (1 + o(1)) = 0,$$

e $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \geq x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. Quindi f è differenziabile in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C\} \cup \{(0, 0)\}$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= [e^t \sin 2(x - t)]_{t=x} + \int_0^x 2e^t \cos 2(x - t) dt = \int_0^x 2e^t \cos 2(x - t) dt, \\ y''(x) &= [2e^t \cos 2(x - t)]_{t=x} - \int_0^x 4e^t \sin 2(x - t) dt = 2e^x - \int_0^x 4e^t \sin 2(x - t) dt, \end{aligned}$$

per cui $y''(x) + 4y(x) = 2e^x + \int_0^x (-4 + 4)e^t \sin 2(x - t) dt = 2e^x$.

(2) Si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= [e^x \sin(x - t)]_{t=x} + \int_0^x e^x (\sin(x - t) + \cos(x - t)) dt = \int_0^x e^x (\sin(x - t) + \cos(x - t)) dt, \\ y''(x) &= [e^x (\sin(x - t) + \cos(x - t))]_{t=x} + \int_0^x 2e^x \cos(x - t) dt = e^x + \int_0^x 2e^t \cos(x - t) dt, \end{aligned}$$

per cui $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x + \int_0^x e^x (2 \cos(x - t) - 2 \sin(x - t) - 2 \cos(x - t) + 2 \sin(x - t)) dt = e^x$.

(3) Si ha

$$y'(x) = [(x-t)e^{2x-t}]_{t=x} + \int_0^x (e^{2x-t} + 2(x-t)e^{2x-t}) dt = \int_0^x (e^{2x-t} + 2(x-t)e^{2x-t}) dt,$$

$$y''(x) = [e^{2x-t} + 2(x-t)e^{2x-t}]_{t=x} + \int_0^x (4 + 4(x-t))e^{2x-t} dt = e^x + \int_0^x (4 + 4(x-t))e^{2x-t} dt,$$

$$\text{per cui } y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^x + \int_0^x (4x - 4t + 4 - 8x + 8t - 4 + 4x - 4t)e^{2x-t} dt = e^x.$$

(4) Si ha

$$y'(x) = [e^{x-t}(e^{x-t} - 1) \cos t]_{t=x} + \int_0^x (2e^{2(x-t)} - e^{x-t}) \cos t dt = \int_0^x (2e^{2(x-t)} - e^{x-t}) \cos t dt,$$

$$y''(x) = [(2e^{2(x-t)} - e^{x-t}) \cos t]_{t=x} + \int_0^x (4e^{2(x-t)} - e^{x-t}) \cos t dt = \cos x + \int_0^x (4e^{2(x-t)} - e^{x-t}) \cos t dt,$$

$$\text{per cui } y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \cos x + \int_0^x ((4 - 6 + 2)e^{2(x-t)} - (1 - 3 + 2)e^{x-t}) \cos t dt = \cos x.$$

(5) Si ha

$$y'(x) = [(1 - \cos(x-t)) \sin t]_{t=x} + \int_0^x \sin(x-t) \sin t dt = \int_0^x \sin(x-t) \sin t dt,$$

$$y''(x) = [\sin(x-t) \sin t]_{t=x} + \int_0^x \cos(x-t) \sin t dt = \int_0^x \cos(x-t) \sin t dt,$$

$$y'''(x) = [\cos(x-t) \sin t]_{t=x} - \int_0^x \sin(x-t) \sin t dt = \sin x - \int_0^x \sin(x-t) \sin t dt,$$

$$\text{per cui } y'''(x) + y'(x) = \sin x.$$

□

Svolgimento esercizio 4

(1) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x^2} \frac{1 + \sin x^2 y^2}{x^2} dy &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} 1 + \sin x^2 y^2 dy}{x^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1 + \sin x^4) + \int_0^{x^2} 2x \cos x^2 y^2 dy}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin x^4 + \int_0^{x^2} \cos x^2 y^2 dy \right) = 1. \end{aligned}$$

(2) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{y \cos^2(x^2(1 + y^2))}{x^2} dy &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x y \cos^2(x^2(1 + y^2)) dy}{x^2} \\ &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos^2(x^2 + x^4) - \int_0^x 2xy(1 + y^2) \sin(2x^2 + 2x^2 y^2) dy}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cos^2(x^2 + x^4) - \int_0^x y(1 + y^2) \sin(2x^2 + 2x^2 y^2) dy \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(3) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x^2} \frac{(x^2 - y) \cos y^2}{\sin x^4} dy &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (x^2 - y) \cos y^2 dy}{\sin x^4} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} 2x \cos y^2 dy}{4x^3 \cos x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos y^2 dy}{2x^2 \cos x^4} \\ &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x^4}{4x \cos x^4 - 8x^5 \sin x^4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(4) Si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{(x - y)e^{-y^2}}{\sin^2 x} dy = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x - y)e^{-y^2} dy}{\sin^2 x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-y^2} dy}{2 \sin x \cos x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}.$

(5) Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\log(1 + x^2 y^2)}{x^2} dy &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 \log(1 + x^2 y^2) dy}{x^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 \frac{2xy^2}{1+x^2 y^2} dy}{2x} \stackrel{(xy=t)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2} dt}{2x^3} \\ &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{6x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Svolgimento esercizio 5 Ricordiamo che il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2.$

(1) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 4xy + 3y^2 \\ f_y(x, y) &= 2x^2 + 6xy - 12y^2 \\ f_{xx}(x, y) &= 6x + 4y \\ f_{xy}(x, y) &= 4x + 6y \\ f_{yy}(x, y) &= 6x - 24y. \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x, y) = -15 + 23(x - 1) - 34(y - 2) + 7(x - 1)^2 + 16(x - 1)(y - 2) - 21(y - 2)^2 = 7x^2 + 16xy - 21y^2 - 23x + 34y - 15.$

(2) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \sin y \\ f_y(x, y) &= x \cos y \\ f_{xx}(x, y) &= 0 \\ f_{xy}(x, y) &= \cos y \\ f_{yy}(x, y) &= -x \sin y. \end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x, y) = xy.$

(3) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 2xy + y \sin x \\f_y(x, y) &= x^2 + \sin x \\f_{xx}(x, y) &= 2y - y \sin x \\f_{xy}(x, y) &= 2x + \cos x \\f_{yy}(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x, y) = \pi^2 y + (2\pi - 1)(x - \pi)y = (2\pi - 1)xy - \pi^2 y + \pi y$.

(4) Calcoliamo le derivate parziali di f in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= e^y \sin x \\f_y(x, y) &= e^y(1 - \cos x) \\f_{xx}(x, y) &= e^y \cos x \\f_{xy}(x, y) &= e^y \sin x \\f_{yy}(x, y) &= e^y(1 - \cos x).\end{aligned}$$

Quindi, il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in (x_0, y_0) è $T_2[f](x, y) = \frac{1}{2}x^2$.

□

Svolgimento esercizio 6

(1) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -32xy + 1 = 0 \\ f_y(x, y) = 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^{2/3} \\ x^{5/3} = \frac{1}{32} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= -32y, \\f_{xy}(x, y) &= -32x, \\f_{yy}(x, y) &= 48y^2,\end{aligned}$$

si ha $H_f(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\det H_f(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) = -40$, e quindi $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ è un punto di sella.

(2) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 0 \\ f_y(x, y) = 4y - 4y^3 = 4y(1 - y^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned}f_{xx}(x, y) &= 4 - 12x^2, \\f_{xy}(x, y) &= 0, \\f_{yy}(x, y) &= 4 - 12y^2,\end{aligned}$$

si ha $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 - 12x^2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}$, $\det H_f(x, y) = 16(1 - 3x^2)(1 - 3y^2)$, $\text{tr } H_f(x, y) = 4(2 - 3x^2 - 3y^2)$, per cui $\det H_f(\pm 1, \pm 1) = 64$, $\text{tr } H_f(\pm 1, \pm 1) = -16$, e quindi $(\pm 1, \pm 1)$ sono punti di massimo relativo; inoltre $\det H_f(0, \pm 1) = \det H_f(\pm 1, 0) = -32$, e quindi $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ sono punti di sella; infine $\det H_f(0, 0) = 14$, $\text{tr } H_f(0, 0) = 8$, e quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo.

(3) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 8x^3 - 2(x + y) = 0 \\ f_y(x, y) = 8y^3 - 2(x + y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x^3 - 8y^3 = 0 \\ 4x^3 - x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ 4x^3 - 2x = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 24x^2 - 2, \\ f_{xy}(x, y) &= -2, \\ f_{yy}(x, y) &= 24y^2 - 2, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi nulla si può dire sulla natura di $(0, 0)$. Inoltre $H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ e quindi $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sono punti di minimo locale.

In realtà, $(0, 0)$ è un punto di sella, come si può vedere considerando $f(x, x) = 4x^4 - 4x^2 + 2 < 2 = f(0, 0)$, se $|x| < 1$, $x \neq 0$, e $f(x, -x) = 4x^4 + 2 > 2 = f(0, 0)$, se $x \neq 0$.

(4) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} f_x(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ f_y(x, y) = -2ye^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$ che fornisce il punto $(0, 0)$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}, \\ f_{xy}(x, y) &= 4xye^{-(x^2+y^2)}, \\ f_{yy}(x, y) &= -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi $(0, 0)$ è un punto di massimo locale.

(5) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x - y)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ f_y(x, y) = -e^{-(x^2+y^2)} - 2y(x - y)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 2x^2 + 2xy = 0 \\ 1 - 2y^2 + 2xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - 2x^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ 1 - 2x^2 + 2xy = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -x \\ 1 - 2x^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -2xe^{-(x^2+y^2)} - (4x - 2y)e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2(x - y)e^{-(x^2+y^2)}, \\ f_{xy}(x, y) &= -2ye^{-(x^2+y^2)} + 2xe^{-(x^2+y^2)} + 4xy(x - y)e^{-(x^2+y^2)}, \\ f_{yy}(x, y) &= 2ye^{-(x^2+y^2)} - (2x - 4y)e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2(x - y)e^{-(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

si ha $H_f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e quindi $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ è un punto di massimo locale, mentre $H_f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e quindi $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un punto di minimo locale.

(6) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = (2x + y)e^{x+2y} + (x^2 + xy + y^2)e^{x+2y} = 0 \\ f_y(x, y) = (x + 2y)e^{x+2y} + 2(x^2 + xy + y^2)e^{x+2y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 2x + y = 0 \\ 2(x^2 + xy + y^2) + x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + 2x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + y = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0, 0)$ e $(0, -1)$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2(2x + y)e^{x+2y} + 2e^{x+2y} + (x^2 + xy + y^2)e^{x+2y}, \\ f_{xy}(x, y) &= 2(2x + y)e^{x+2y} + e^{x+2y} + (x + 2y)e^{x+2y} + 2(x^2 + xy + y^2)e^{x+2y}, \\ f_{yy}(x, y) &= 4(x + 2y)e^{x+2y} + 2e^{x+2y} + 4(x^2 + xy + y^2)e^{x+2y}, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo locale, mentre $H_f(0, -1) = \frac{1}{e^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi $(0, -1)$ è un punto di sella.

(7) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = (2x + y)e^{x+y} + (x^2 + xy + 2y^2)e^{x+y} = 0 \\ f_y(x, y) = (x + 4y)e^{x+y} + (x^2 + xy + 2y^2)e^{x+y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 + 2x + y = 0 \\ x^2 + xy + 2y^2 + x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x^2 + xy + 2y^2 + 2x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y \\ 14y^2 + 7y = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0, 0)$ e $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2(2x + y)e^{x+y} + 2e^{x+y} + (x^2 + xy + 2y^2)e^{x+y}, \\ f_{xy}(x, y) &= (2x + y)e^{x+y} + e^{x+y} + (x + 4y)e^{x+y} + (x^2 + xy + 2y^2)e^{x+y}, \\ f_{yy}(x, y) &= 2(x + 4y)e^{x+y} + 4e^{x+y} + (x^2 + xy + 2y^2)e^{x+y}, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo locale, mentre $H_f(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2e^2} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ è un punto di sella.

(8) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \frac{y(1+x^2+y^2)-2x^2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{y-x^2y+y^3}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f_y(x, y) = \frac{x-xy^2+x^3}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1-x^2+y^2) = 0 \\ x(1-y^2+x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ 1-y^2+x^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-x^2+y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-x^2+y^2 = 0 \\ 1-y^2+x^2 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto $(0, 0)$ [gli altri tre sistemi sono assurdi]. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{-2xy(1+x^2+y^2)^2 - 4x(1+x^2+y^2)(y-x^2y+y^3)}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{-6xy+2x^3y-6xy^3}{(1+x^2+y^2)^3}, \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{(1-x^2+3y^2)(1+x^2+y^2)^2 - 4y(1+x^2+y^2)(y-x^2y+y^3)}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{1-x^4+6x^2y^2-y^4}{(1+x^2+y^2)^3}, \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{-6xy+2xy^3-6x^3y}{(1+x^2+y^2)^3}, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(0, 0)$ è un punto di sella.

(9) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4xy + 2y^2 - 2xy^2 - 4y = -2y(x-1)(y-2) = 0 \\ f_y(x, y) = 2x^2 + 4xy - 2x^2y - 4x = -2x(x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 4y - 2y^2, \\ f_{xy}(x, y) &= 4x + 4y - 4xy - 4, \\ f_{yy}(x, y) &= 4x - 2x^2, \end{aligned}$$

si ha $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(0, 0)$ è un punto di sella; $H_f(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(0, 2)$ è un punto di sella; $H_f(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(2, 2)$ è un punto di sella; $H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi $(2, 0)$ è un punto di sella; infine, $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi $(1, 1)$ è un punto di minimo assoluto.

(10) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -\cos x \sin(2y) = 0 \\ f_y(x, y) = -2\cos(2y) \sin x = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4})$, $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{4})$, $(0, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, \pi)$, $(0, \frac{3\pi}{2})$, $(\pi, 0)$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$, (π, π) , $(\pi, \frac{3\pi}{2})$. Poiché

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \sin x \sin(2y), \\ f_{xy}(x, y) &= -2\cos x \cos(2y), \\ f_{yy}(x, y) &= 4\sin x \sin(2y), \end{aligned}$$

si ha:

$H_f(-\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4}) = H_f(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}) = H_f(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, e quindi $(-\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ sono punti di massimo relativo;

$H_f(\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4}) = H_f(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}) = H_f(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, e quindi $(\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ sono punti di minimo relativo;

$H_f(0, 0) = H_f(0, \pi) = H_f(\pi, \pm\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, \pm\frac{\pi}{2})$ sono punti di sella;

$H_f(0, \pm\frac{\pi}{2}) = H_f(\pi, 0) = H_f(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi $(0, \pm\frac{\pi}{2})$, $(\pi, 0)$, (π, π) sono punti di sella.

(11) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$ che non fornisce nessun punto. Osserviamo che, poiché $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$, ne segue che $(0, 0)$ è un punto di minimo (assoluto).

(12) I punti stazionari si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} f_x = y|y| = 0 \\ f_y = 2x|y| = 0 \end{cases}$ e quindi sono $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f(t, 0) = f(0, t) = 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, mentre f è positiva nel primo e terzo quadrante aperti, mentre è negativa nel secondo e quarto quadrante aperti, ne segue che ogni suo punto stazionario è di sella.

□

Svolgimento esercizio 7

(1) Introduciamo $F(x, y) = x(x^2 + y^2) - 2y^2$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(1, 1) = 0$ e $F_x(x, y) = 3x^2 + y^2$, $F_y(x, y) = 2xy - 4y$ e quindi $F_y(1, 1) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0 , un intorno V di y_0 , e un'unica funzione $y = f(x) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1) = 1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = 1$, fornisce $F_x(1, 1) + F_y(1, 1)f'(1) = 0$, da cui segue $f'(1) = -\frac{F_x(1, 1)}{F_y(1, 1)} = 2$.

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 1$ è data da $y = 1 + f'(1)(x - 1) = 2x - 1$.

(2) Introduciamo $F(x, y) = y \sin x + xe^y - 2$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(2, 0) = 0$ e $F_x(x, y) = y \cos x + e^y$, $F_y(x, y) = \sin x + xe^y$ e quindi $F_y(2, 0) = \sin 2 + 2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0 , un intorno V di y_0 , e un'unica funzione $y = f(x) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(2) = 0$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = 2$, fornisce $F_x(2, 0) + F_y(2, 0)f'(2) = 0$, da cui segue $f'(2) = -\frac{F_x(2, 0)}{F_y(2, 0)} = -\frac{1}{2+\sin 2}$.

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 2$ è data da $y = f'(2)(x - 2) = \frac{2-x}{2+\sin 2}$.

(3) Introduciamo $F(x, y) = xe^y + y \sin(x - 1) - 2x - 4y + 1$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e osserviamo che $F(1, 0) = 0$ e $F_x(x, y) = e^y + y \cos(x - 1) - 2$, $F_y(x, y) = xe^y + \sin(x - 1) - 4$ e quindi $F_y(1, 0) = -3 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0 , un intorno V di y_0 , e un'unica funzione $y = f(x) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1) = 0$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = 1$, fornisce $F_x(1, 0) + F_y(1, 0)f'(1) = 0$, da cui segue $f'(1) = -\frac{F_x(1, 0)}{F_y(1, 0)} = -\frac{1}{3}$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = 1$ è data da $y = f'(1)(x - 1) = -\frac{1}{3}(x - 1)$.

(4) Introduciamo $F(x, y) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + e^{xy-1} - 2$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0$, e osserviamo che $F(-1, -1) = 0$ e $F_x(x, y) = \frac{4}{\pi} \frac{y}{x^2+y^2} + ye^{xy-1}$, $F_y(x, y) = -\frac{4}{\pi} \frac{x}{x^2+y^2} + xe^{xy-1}$ e quindi $F_y(-1, -1) = -3 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0 , un intorno V di y_0 , e un'unica funzione $y = f(x) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(-1) = -1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = -1$, fornisce $F_x(-1, -1) + F_y(-1, -1)f'(-1) = 0$, da cui segue $f'(-1) = -\frac{F_x(-1, -1)}{F_y(-1, -1)} = \frac{2+\pi}{2-\pi}$.

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = -1$ è data da $y = -1 + f'(-1)(x + 1) = \frac{2+\pi}{2-\pi}x + \frac{2\pi}{2-\pi}$.

(5) Introduciamo $F(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{\pi}{6} - \log 2$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$, e osserviamo che $F(\sqrt{3}, 1) = 0$ e $F_x(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $F_y(x, y) = \frac{y-x}{x^2+y^2}$ e quindi $F_y(\sqrt{3}, 1) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di x_0 , un intorno V di y_0 , e un'unica funzione $y = f(x) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(\sqrt{3}) = 1$ e $F(x, f(x)) = 0$, per ogni $x \in U$. Derivando rispetto ad x quest'ultima relazione, si ottiene $F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$, che, calcolata in $x = \sqrt{3}$, fornisce $F_x(\sqrt{3}, 1) + F_y(\sqrt{3}, 1)f'(\sqrt{3}) = 0$, da cui segue $f'(\sqrt{3}) = -\frac{F_x(\sqrt{3}, 1)}{F_y(\sqrt{3}, 1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$.

L'equazione della retta tangente al grafico di f in $x_0 = \sqrt{3}$ è data da $y = 1 + f'(\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})x - 2(\sqrt{3} + 1)$. □

Svolgimento esercizio 8

(1) Introduciamo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 1$, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e osserviamo che $F(3, -1, 1) = 0$ e $F_x(x, y, z) = 2x - 2$, $F_y(x, y, z) = 2y + 2$, e $F_z(x, y, z) = 2z - 4$ e quindi $F_z(3, -1, 1) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (x_0, y_0) , un intorno V di z_0 , e un'unica funzione $z = f(x, y) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(3, -1) = 1$ e $F(x, y, f(x, y)) = 0$, per ogni $(x, y) \in U$.

Derivando quest'ultima rispetto ad x e y , si ottiene
$$\begin{cases} F_x(x, y, f(x, y)) + F_z(x, y, f(x, y))f_x(x, y) = 0, \\ F_y(x, y, f(x, y)) + F_z(x, y, f(x, y))f_y(x, y) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $(x, y) = (3, -1)$, forniscono
$$\begin{cases} F_x(3, -1, 1) + F_z(3, -1, 1)f_x(3, -1) = 0, \\ F_y(3, -1, 1) + F_z(3, -1, 1)f_y(3, -1) = 0, \end{cases}$$

da cui segue $f_x(3, -1) = -\frac{F_x(3, -1, 1)}{F_z(3, -1, 1)} = 2$, $f_y(3, -1) = -\frac{F_y(3, -1, 1)}{F_z(3, -1, 1)} = 0$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0) = (3, -1)$ è data da $z = f(3, -1) + f_x(3, -1)(x - 3) + f_y(3, -1)(y + 1) = 2x - 5$.

(2) Introduciamo $F(x, y, z) = xyz - 6$, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e osserviamo che $F(1, -2, -3) = 0$ e $F_x(x, y, z) = 2x - 2$, $F_y(x, y, z) = 2y + 2$, e $F_z(x, y, z) = 2z - 4$ e quindi $F_z(1, -2, -3) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (x_0, y_0) , un intorno V di z_0 , e un'unica funzione $z = f(x, y) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1, -2) = -3$ e $F(x, y, f(x, y)) = 0$, per ogni $(x, y) \in U$.

Derivando quest'ultima rispetto ad x e y , si ottiene
$$\begin{cases} F_x(x, y, f(x, y)) + F_z(x, y, f(x, y))f_x(x, y) = 0, \\ F_y(x, y, f(x, y)) + F_z(x, y, f(x, y))f_y(x, y) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $(x, y) = (1, -2)$, forniscono
$$\begin{cases} F_x(1, -2, -3) + F_z(1, -2, -3)f_x(1, -2) = 0, \\ F_y(1, -2, -3) + F_z(1, -2, -3)f_y(1, -2) = 0, \end{cases}$$

da cui segue $f_x(3, -1) = -\frac{F_x(1, -2, -3)}{F_z(1, -2, -3)} = 3$, $f_y(3, -1) = -\frac{F_y(1, -2, -3)}{F_z(1, -2, -3)} = -\frac{3}{2}$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0) = (1, -2)$ è data da $z = f(1, -2) + f_x(1, -2)(x - 1) + f_y(1, -2)(y + 2) = 3x - \frac{3}{2}y - 9$.

- (3) Introduciamo $F(x, y, z) = xy + yz + zx - 3$, per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e osserviamo che $F(1, 1, 1) = 0$ e $F_x(x, y, z) = y + z$, $F_y(x, y, z) = x + z$, e $F_z(x, y, z) = y + x$ e quindi $F_z(1, 1, 1) = 2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (x_0, y_0) , un intorno V di z_0 , e un'unica funzione $z = f(x, y) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(1, 1) = 1$ e $F(x, y, f(x, y)) = 0$, per ogni $(x, y) \in U$.

Derivando quest'ultima rispetto ad x e y , si ottiene
$$\begin{cases} F_x(x, y, f(x, y)) + F_z(x, y, f(x, y))f_x(x, y) = 0, \\ F_y(x, y, f(x, y)) + F_z(x, y, f(x, y))f_y(x, y) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $(x, y) = (1, 1)$, forniscono
$$\begin{cases} F_x(1, 1, 1) + F_z(1, 1, 1)f_x(1, 1) = 0, \\ F_y(1, 1, 1) + F_z(1, 1, 1)f_y(1, 1) = 0, \end{cases}$$

da cui segue $f_x(1, 1) = -\frac{F_x(1, 1, 1)}{F_z(1, 1, 1)} = -1$, $f_y(1, 1) = -\frac{F_y(1, 1, 1)}{F_z(1, 1, 1)} = -1$.

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0) = (1, 1)$ è data da $z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) = 3 - x - y$.

- (4) Introduciamo $F(x, y, z) = \int_1^z \sin(x^2 t^2) dt + x^2 y + y^2 - z^2$. Poiché $F(0, 1, 1) = 0$ e $F_z(0, 1, 1) = \sin(x^2 z^2) - 2z|_{(0, 1, 1)} = -2 \neq 0$, per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno U di (x_0, y_0) , un intorno V di z_0 , e un'unica funzione $z = f(x, y) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $f(0, 1) = 1$, e $F(x, y, f(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in U$, cioè

$$\int_1^{f(x, y)} \sin(x^2 t^2) dt + x^2 y + y^2 - f(x, y)^2 = 0.$$

Le derivate parziali prime sono

$$\begin{cases} \sin(x^2 f(x, y)^2) f_x(x, y) + \int_1^{f(x, y)} 2x \cos(x^2 t^2) dt + 2xy - 2f(x, y) f_x(x, y) = 0, \\ \sin(x^2 f(x, y)^2) f_y(x, y) + x^2 + 2y - 2f(x, y) f_y(x, y) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $(0, 1)$, forniscono

$$\begin{cases} -2f_x(0, 1) = 0 \implies f_x(0, 1) = 0, \\ 2 - 2f_y(0, 1) = 0 \implies f_y(0, 1) = 1. \end{cases}$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0) = (0, 1)$ è data da $z = f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) = y$.

□

Svolgimento esercizio 9

- (1) Poniamo

$$\begin{cases} F(t, x, y) = t^2 + x^2 + y^2 - 2 \\ G(t, x, y) = tx + ty^2 - t^2, \end{cases}$$

e osserviamo che $F(1, 0, 1) = G(1, 0, 1) = 0$, e

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(t, x, y) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ t & 2ty \end{vmatrix} = 4txy - 2ty,$$

per cui $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(1, 0, 1) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di t_0 , un intorno V di (x_0, y_0) , e un'unica funzione $f(t) = (x(t), y(t)) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(1) = 0$, $y(1) = 1$ e

$$\begin{cases} t^2 + x(t)^2 + y(t)^2 - 2 = 0, \\ tx(t) + ty(t)^2 - t^2 = 0, \end{cases}$$

per ogni $t \in U$. Derivando queste equazioni rispetto a t si ottiene

$$\begin{cases} 2t + 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0, \\ x(t) + tx'(t) + y(t)^2 + 2ty'(t)y(t) - 2t = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $t = 1$, forniscono

$$\begin{cases} 2 + 2y'(1) = 0 \\ x'(1) + 2y'(1) - 1 = 0, \end{cases}$$

da cui segue $x'(1) = 3$, $y'(1) = -1$.

Oppure, con notazione più sintetica, derivando

$$\begin{cases} F(t, x(t), y(t)) = 0 \\ G(t, x(t), y(t)) = 0 \end{cases}$$

rispetto a t , e calcolandole in $t = 1$, si ottiene, avendo posto $P_0 = (1, 0, 1)$,

$$\begin{cases} 0 = F_t(P_0) + F_x(P_0)x'(1) + F_y(P_0)y'(1) = 2 + 2y'(1) \\ 0 = G_t(P_0) + G_x(P_0)x'(1) + G_y(P_0)y'(1) = x'(1) + 2y'(1) - 1 \end{cases}$$

da cui segue $x'(1) = 3$, $y'(1) = -1$.

(2) Poniamo

$$\begin{cases} F(t, x, y) = t^2 + 2x^2 + 3y^2 - x - 1 \\ G(t, x, y) = t^3 + 3x^3 - 4y^3 + y - 1, \end{cases}$$

e osserviamo che $F(1, 0, 0) = G(1, 0, 0) = 0$, e

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(t, x, y) = \begin{vmatrix} 4x - 1 & 6y \\ 6x^2 & -12y^2 + 1 \end{vmatrix},$$

per cui $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(1, 0, 0) = -1 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di t_0 , un intorno V di (x_0, y_0) , e un'unica funzione $f(t) = (x(t), y(t)) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(1) = 0$, $y(1) = 0$ e

$$\begin{cases} t^2 + 2x(t)^2 + 3y(t)^2 - x(t) - 1 = 0, \\ t^3 + 3x(t)^3 - 4y(t)^3 + y(t) - 1 = 0, \end{cases}$$

per ogni $t \in U$. Derivando queste equazioni rispetto a t si ottiene

$$\begin{cases} 2t + 4x(t)x'(t) + 6y(t)y'(t) - x'(t) = 0, \\ 3t^2 + 9x(t)^2x'(t) - 12y(t)^2y'(t) + y'(t) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $t = 1$, forniscono

$$\begin{cases} 2 - x'(1) = 0 \\ 3 + y'(1) = 0, \end{cases}$$

da cui segue $x'(1) = 2$, $y'(1) = -3$.

Oppure, con notazione più sintetica, derivando

$$\begin{cases} F(t, x(t), y(t)) = 0 \\ G(t, x(t), y(t)) = 0 \end{cases}$$

rispetto a t , e calcolandole in $t = 1$, si ottiene, avendo posto $P_0 = (1, 0, 0)$,

$$\begin{cases} 0 = F_t(P_0) + F_x(P_0)x'(1) + F_y(P_0)y'(1) = 2 - x'(1) \\ 0 = G_t(P_0) + G_x(P_0)x'(1) + G_y(P_0)y'(1) = 3 + y'(1) \end{cases}$$

da cui segue $x'(1) = 2$, $y'(1) = -3$.

(3) Poniamo

$$\begin{cases} F(t, x, y) = 2t + \sin x + 2xy + y^2 - 2 \\ G(t, x, y) = t^2y + \cos x + xy - y^3 - t, \end{cases}$$

e osserviamo che $F(1, 0, 0) = G(1, 0, 0) = 0$, e

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(t, x, y) = \begin{vmatrix} \cos x + 2y & 2x + 2y \\ -\sin x + y & t^2 + x - 3y^2 \end{vmatrix},$$

per cui $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(1, 0, 0) = 1 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di t_0 , un intorno V di (x_0, y_0) , e un'unica funzione $f(t) = (x(t), y(t)) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(1) = 0$, $y(1) = 0$ e

$$\begin{cases} 2t + \sin x(t) + 2x(t)y(t) + y(t)^2 - 2 = 0, \\ t^2y(t) + \cos x(t) + x(t)y(t) - y(t)^3 - t = 0, \end{cases}$$

per ogni $t \in U$. Derivando queste equazioni rispetto a t si ottiene

$$\begin{cases} 2 + x'(t) \cos x(t) + 2x'(t)y(t) + 2x(t)y'(t) + 2y(t)y'(t) = 0, \\ 2ty(t) + t^2y'(t) - x'(t) \sin x(t) + x'(t)y(t) + x(t)y'(t) - 3y'(t)y(t)^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $t = 1$, forniscono

$$\begin{cases} 2 + x'(1) = 0 \\ y'(1) - 1 = 0, \end{cases}$$

da cui segue $x'(1) = -2$, $y'(1) = 1$.

Oppure, con notazione più sintetica, derivando

$$\begin{cases} F(t, x(t), y(t)) = 0 \\ G(t, x(t), y(t)) = 0 \end{cases}$$

rispetto a t , e calcolandole in $t = 1$, si ottiene, avendo posto $P_0 = (1, 0, 0)$,

$$\begin{cases} 0 = F_t(P_0) + F_x(P_0)x'(1) + F_y(P_0)y'(1) = 2 + x'(1) \\ 0 = G_t(P_0) + G_x(P_0)x'(1) + G_y(P_0)y'(1) = y'(1) - 1 \end{cases}$$

da cui segue $x'(1) = -2$, $y'(1) = 1$.

(4) Poniamo

$$\begin{cases} F(t, x, y, z) = t + x + 2y + 3z - 3 \\ G(t, x, y, z) = t^2 + x^2 - 2y^2 + z^2 + 1 \\ H(t, x, y, z) = t^3 + x^3 - y^3 + z^3, \end{cases}$$

e osserviamo che $F(0, 1, 1, 0) = G(0, 1, 1, 0) = H(0, 1, 1, 0) = 0$, e

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}(t, x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & -4y & 2z \\ 3x^2 & -3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix},$$

per cui $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}(0, 1, 1, 0) = 18 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di t_0 , un intorno V di (x_0, y_0, z_0) , e un'unica funzione $f(t) = (x(t), y(t), z(t)) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, e

$$\begin{cases} t + x(t) + 2y(t) + 3z(t) - 3 = 0, \\ t^2 + x(t)^2 - 2y(t)^2 + z(t)^2 + 1 = 0, \\ t^3 + x(t)^3 - y(t)^3 + z(t)^3 = 0, \end{cases}$$

per ogni $t \in U$. Derivando queste equazioni rispetto a t si ottiene

$$\begin{cases} 1 + x'(t) + 2y'(t) + 3z'(t) = 0, \\ 2t + 2x(t)x'(t) - 4y(t)y'(t) + 2z(t)z'(t) = 0, \\ 3t^2 + 3x(t)^2x'(t) - 3y(t)^2y'(t) + 3z(t)^2z'(t) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $t = 0$, forniscono

$$\begin{cases} 1 + x'(0) + 2y'(0) + 3z'(0) = 0, \\ 2x'(0) - 4y'(0) = 0, \\ 3x'(0) - 3y'(0) = 0, \end{cases}$$

da cui segue $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $z'(0) = -\frac{1}{3}$.

Oppure, con notazione più sintetica, derivando

$$\begin{cases} F(t, x(t), y(t), z(t)) = 0 \\ G(t, x(t), y(t), z(t)) = 0 \\ H(t, x(t), y(t), z(t)) = 0 \end{cases}$$

rispetto a t , e calcolandole in $t = 0$, si ottiene, avendo posto $P_0 = (0, 1, 1, 0)$,

$$\begin{cases} 0 = F_t(P_0) + F_x(P_0)x'(0) + F_y(P_0)y'(0) + F_z(P_0)z'(0) = 1 + x'(0) + 2y'(0) + 3z'(0) \\ 0 = G_t(P_0) + G_x(P_0)x'(0) + G_y(P_0)y'(0) + G_z(P_0)z'(0) = 2x'(0) - 4y'(0) \\ 0 = H_t(P_0) + H_x(P_0)x'(0) + H_y(P_0)y'(0) + H_z(P_0)z'(0) = 3x'(0) - 3y'(0) \end{cases}$$

da cui segue $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $z'(0) = -\frac{1}{3}$.

(5) Poniamo

$$\begin{cases} F(t, x, y, z) = tx + e^y + 2z^2 - 2 \\ G(t, x, y, z) = t^2 + xy + \sin z - 1 \\ H(t, x, y, z) = t^2z - 3x^2 + y \sin z + 3, \end{cases}$$

e osserviamo che $F(1, 1, 0, 0) = G(1, 1, 0, 0) = H(1, 1, 0, 0) = 0$, e

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}(t, x, y, z) = \begin{vmatrix} t & e^y & 4z \\ y & x & \cos z \\ -6x & \sin z & t^2 + y \cos z \end{vmatrix},$$

per cui $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}(1, 1, 0, 0) = -5 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di t_0 , un intorno V di (x_0, y_0, z_0) , e un'unica funzione $f(t) = (x(t), y(t), z(t)) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(1) = 1$, $y(1) = 0$, $z(1) = 0$, e

$$\begin{cases} tx(t) + e^{y(t)} + 2z(t)^2 - 2 = 0, \\ t^2 + x(t)y(t) + \sin z(t) - 1 = 0, \\ t^2z(t) - 3x(t)^2 + y(t) \sin z(t) + 3 = 0, \end{cases}$$

per ogni $t \in U$. Derivando queste equazioni rispetto a t si ottiene

$$\begin{cases} x(t) + tx'(t) + y'(t)e^{y(t)} + 4z'(t)z(t) = 0, \\ 2t + x'(t)y(t) + x(t)y'(t) + z'(t) \cos z(t) = 0, \\ 2tz(t) + t^2z'(t) - 6x(t)x'(t) + y'(t) \sin z(t) + y(t)z'(t) \cos z(t) = 0, \end{cases}$$

che, calcolate in $t = 1$, forniscono

$$\begin{cases} 1 + x'(1) + y'(1) = 0, \\ 2 + y'(1) + z'(1) = 0, \\ z'(1) - 6x'(1) = 0, \end{cases}$$

da cui segue $x'(1) = -\frac{1}{5}$, $y'(1) = -\frac{4}{5}$, $z'(1) = -\frac{6}{5}$.

Oppure, con notazione più sintetica, derivando

$$\begin{cases} F(t, x(t), y(t), z(t)) = 0 \\ G(t, x(t), y(t), z(t)) = 0 \\ H(t, x(t), y(t), z(t)) = 0 \end{cases}$$

rispetto a t , e calcolandole in $t = 1$, si ottiene, avendo posto $P_0 = (0, 1, 1, 0)$,

$$\begin{cases} 0 = F_t(P_0) + F_x(P_0)x'(1) + F_y(P_0)y'(1) + F_z(P_0)z'(1) = 1 + x'(1) + y'(1) \\ 0 = G_t(P_0) + G_x(P_0)x'(1) + G_y(P_0)y'(1) + G_z(P_0)z'(1) = 2 + y'(1) + z'(1) = 0 \\ 0 = H_t(P_0) + H_x(P_0)x'(1) + H_y(P_0)y'(1) + H_z(P_0)z'(1) = z'(1) - 6x'(1) = 0 \end{cases}$$

da cui segue $x'(1) = -\frac{1}{5}$, $y'(1) = -\frac{4}{5}$, $z'(1) = -\frac{6}{5}$.

□

Svolgimento esercizio 10

(1) Introduciamo

$$\begin{cases} F(u, v, x, y) = x^2 + uy^2 - v \\ G(u, v, x, y) = xy + 2y^2 - uv - 3 \end{cases}$$

per ogni $(u, v, x, y) \in \mathbb{R}^4$, e osserviamo che

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(u, v, x, y) = \begin{vmatrix} 2x & 2uy \\ y & x + 4y \end{vmatrix} = 2x^2 + 8xy - 2uy^2,$$

e quindi $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(0, 1, 1, 1) = 10 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (u_0, v_0) , un intorno V di (x_0, y_0) , e un'unica funzione $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(0, 1) = 1$, $y(0, 1) = 1$ e

$$\begin{cases} x(u, v)^2 + uy(u, v)^2 - v = 0 \\ x(u, v)y(u, v) + 2y(u, v)^2 - uv - 3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

per ogni $(u, v) \in U$.

Inoltre, derivando le equazioni (*) rispetto ad u e sostituendo $(u, v) = (0, 1)$, si ottiene

$$\begin{cases} 0 = 2x(u, v)x_u(u, v) + y(u, v)^2 + 2uy(u, v)y_u(u, v)|_{(0,1)} = 2x_u(0, 1) + 1, \\ 0 = x_u(u, v)y(u, v) + x(u, v)y_u(u, v) + 4y(u, v)y_u(u, v) - v|_{(0,1)} = x_u(0, 1) + 5y_u(0, 1) - 1, \end{cases}$$

per cui $x_u(0, 1) = -\frac{1}{2}$, $y_u(0, 1) = -\frac{3}{10}$. Analogamente, derivando le equazioni (*) rispetto a v e sostituendo $(u, v) = (0, 1)$, si ottiene

$$\begin{cases} 0 = 2x(u, v)x_v(u, v) - 1|_{(0,1)} = 2x_v(0, 1) - 1, \\ 0 = x_v(u, v)y(u, v) + x(u, v)y_v(u, v) + 4y(u, v)y_v(u, v) - u|_{(0,1)} = x_v(0, 1) + 5y_v(0, 1), \end{cases}$$

per cui $x_v(0, 1) = \frac{1}{2}$, $y_v(0, 1) = -\frac{1}{10}$.

Oppure, con notazione più sintetica, derivando

$$\begin{cases} F(u, v, x(u, v), y(u, v)) = 0 \\ G(u, v, x(u, v), y(u, v)) = 0 \end{cases}$$

rispetto a u , e calcolando in $(u, v) = (0, 1)$, si ottiene, avendo posto $P_0 = (0, 1, 1, 1)$,

$$\begin{cases} 0 = F_u(P_0) + F_x(P_0)x_u(0, 1) + F_y(P_0)y_u(0, 1) = 2x_u(0, 1) + 1 \\ 0 = G_u(P_0) + G_x(P_0)x_u(0, 1) + G_y(P_0)y_u(0, 1) = x_u(0, 1) + 5y_u(0, 1) - 1 \end{cases}$$

da cui segue $x_u(0, 1) = -\frac{1}{2}$, $y_u(0, 1) = -\frac{3}{10}$. Analogamente, derivando rispetto a v , e calcolando in $(u, v) = (0, 1)$, si ottiene,

$$\begin{cases} 0 = F_v(P_0) + F_x(P_0)x_v(0, 1) + F_y(P_0)y_v(0, 1) = 2x_v(0, 1) - 1 \\ 0 = G_v(P_0) + G_x(P_0)x_v(0, 1) + G_y(P_0)y_v(0, 1) = x_v(0, 1) + 5y_v(0, 1) \end{cases}$$

da cui segue $x_v(0, 1) = \frac{1}{2}$, $y_v(0, 1) = -\frac{1}{10}$.

(2) Introduciamo

$$\begin{cases} F(u, v, x, y) = u \sin x + vxy + uv - 1 \\ G(u, v, x, y) = v^2 \cos x + ux^2 + vy^2 + y - 1 \end{cases}$$

per ogni $(u, v, x, y) \in \mathbb{R}^4$, e osserviamo che

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(u, v, x, y) = \begin{vmatrix} u \cos x + vy & vx \\ -v^2 \sin x + 2ux & 2vy + 1 \end{vmatrix},$$

e quindi $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(1, 1, 0, 0) = 1 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (u_0, v_0) , un intorno V di (x_0, y_0) , e un'unica funzione $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(1, 1) = 0$, $y(1, 1) = 0$ e

$$\begin{cases} u \sin x(u, v) + vx(u, v)y(u, v) + uv - 1 = 0 \\ v^2 \cos x(u, v) + ux(u, v)^2 + vy(u, v)^2 + y(u, v) - 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

per ogni $(u, v) \in U$.

Inoltre, derivando le equazioni (*) rispetto ad u e sostituendo $(u, v) = (1, 1)$, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \sin x(u, v) + ux_u(u, v) \cos x(u, v) + vx_u(u, v)y(u, v) + vx(u, v)y_u(u, v) + v \Big|_{(1, 1)} \\ &= x_u(1, 1) + 1 \\ 0 &= -v^2 x_u(u, v) \sin x(u, v) + x(u, v)^2 + 2ux(u, v)x_u(u, v) + 2vy(u, v)y_u(u, v) + y_u(u, v) \Big|_{(1, 1)} \\ &= y_u(1, 1) \end{aligned}$$

per cui $x_u(1, 1) = -1$, $y_u(1, 1) = 0$. Analogamente, derivando le equazioni (*) rispetto a v e sostituendo $(u, v) = (1, 1)$, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= ux_v(u, v) \cos x(u, v) + x(u, v)y(u, v) + vx_v(u, v)y(u, v) + vx(u, v)y_v(u, v) + u \Big|_{(1, 1)} \\ &= x_v(1, 1) + 1 \\ 0 &= 2v \cos x(u, v) - v^2 x_v(u, v) \sin x(u, v) + 2ux(u, v)x_v(u, v) + 2vy(u, v)y_v(u, v) + y_v(u, v) \Big|_{(1, 1)} \\ &= 2 + y_v(1, 1) \end{aligned}$$

per cui $x_v(1, 1) = -1$, $y_v(1, 1) = -2$.

Oppure, con notazione più sintetica, derivando

$$\begin{cases} F(u, v, x(u, v), y(u, v)) = 0 \\ G(u, v, x(u, v), y(u, v)) = 0 \end{cases}$$

rispetto a u , e calcolando in $(u, v) = (1, 1)$, si ottiene, avendo posto $P_0 = (1, 1, 0, 0)$,

$$\begin{cases} 0 = F_u(P_0) + F_x(P_0)x_u(1, 1) + F_y(P_0)y_u(1, 1) = x_u(1, 1) + 1 \\ 0 = G_u(P_0) + G_x(P_0)x_u(1, 1) + G_y(P_0)y_u(1, 1) = y_u(1, 1) \end{cases}$$

da cui segue $x_u(1, 1) = -1$, $y_u(1, 1) = 0$. Analogamente, derivando rispetto a v , e calcolando in $(u, v) = (1, 1)$, si ottiene,

$$\begin{cases} 0 = F_v(P_0) + F_x(P_0)x_v(1, 1) + F_y(P_0)y_v(1, 1) = x_v(1, 1) + 1 \\ 0 = G_v(P_0) + G_x(P_0)x_v(1, 1) + G_y(P_0)y_v(1, 1) = 2 + y_v(1, 1) \end{cases}$$

da cui segue $x_v(1, 1) = -1$, $y_v(1, 1) = -2$.

(3) Introduciamo

$$\begin{cases} F(u, v, x, y, z) = x^3 + xy - 2uz^2 - 1 \\ G(u, v, x, y, z) = y^2 - uyz - z^2 + v + 1 \\ H(u, v, x, y, z) = vx^2 + xz - z^2 + uv \end{cases}$$

per ogni $(u, v, x, y, z) \in \mathbb{R}^5$, e osserviamo che

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}(u, v, x, y, z) = \begin{vmatrix} 3x^2 + y & x & -4uz \\ 0 & 2y - uz & -uy - 2z \\ 2vx + z & 0 & x - 2z \end{vmatrix},$$

e quindi $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}(0, 0, 1, 0, 1) = -2 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (u_0, v_0) , un intorno V di (x_0, y_0, z_0) , e un'unica funzione $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : U \rightarrow V$ di classe $C^1(U)$, che soddisfa $x(0, 0) = 1$, $y(0, 0) = 0$, $z(0, 0) = 1$ e

$$\begin{cases} x(u, v)^3 + x(u, v)y(u, v) - 2uz(u, v)^2 - 1 = 0 \\ y(u, v)^2 - uy(u, v)z(u, v) - z(u, v)^2 + v + 1 = 0 \\ vx(u, v)^2 + x(u, v)z(u, v) - z(u, v)^2 + uv = 0 \end{cases} \quad (*)$$

per ogni $(u, v) \in U$. Inoltre, derivando le equazioni (*) rispetto ad u e sostituendo $u = v = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= 3x(u, v)^2 x_u(u, v) + x_u(u, v)y(u, v) + x(u, v)y_u(u, v) - 2z(u, v)^2 - 4uz(u, v)z_u(u, v) \Big|_{(0,0)} \\ &= 3x_u(0, 0) + y_u(0, 0) - 2, \\ 0 &= 2y(u, v)y_u(u, v) - y(u, v)z(u, v) - uy_u(u, v)z(u, v) - uy(u, v)z_u(u, v) - 2z(u, v)z_u(u, v) \Big|_{(0,0)} \\ &= -2z_u(0, 0), \\ 0 &= 2vx(u, v)x_u(u, v) + x_u(u, v)z(u, v) + x(u, v)z_u(u, v) - 2z(u, v)z_u(u, v) + v \Big|_{(0,0)} \\ &= x_u(0, 0) - z_u(0, 0), \end{aligned}$$

per cui $x_u(0,0) = 0$, $y_u(0,0) = 2$, $z_u(0,0) = 0$. Analogamente, derivando le equazioni (*) rispetto a v e sostituendo $u = v = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= 3x(u,v)^2 x_v(u,v) + x_v(u,v)y(u,v) + x(u,v)y_v(u,v) - 4uz(u,v)z_v(u,v) \Big|_{(0,0)} \\ &= 3x_v(0,0) + y_v(0,0), \\ 0 &= 2y(u,v)y_v(u,v) - uy_v(u,v)z(u,v) - uy(u,v)z_v(u,v) - 2z(u,v)z_v(u,v) + 1 \Big|_{(0,0)} \\ &= -2z_v(0,0) + 1, \\ 0 &= x(u,v)^2 + 2vx(u,v)x_v(u,v) + x_v(u,v)z(u,v) + x(u,v)z_v(u,v) - 2z(u,v)z_v(u,v) + u \Big|_{(0,0)} \\ &= 1 + x_v(0,0) - z_v(0,0), \end{aligned}$$

per cui $x_v(0,0) = -\frac{1}{2}$, $y_v(0,0) = \frac{3}{2}$, $z_v(0,0) = \frac{1}{2}$.

Oppure, con notazione più sintetica, derivando

$$\begin{cases} F(u,v,x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = 0 \\ G(u,v,x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = 0 \\ H(u,v,x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = 0 \end{cases}$$

rispetto a u , e calcolando in $(u,v) = (0,0)$, si ottiene, avendo posto $P_0 = (0,0,1,0,1)$,

$$\begin{cases} 0 = F_u(P_0) + F_x(P_0)x_u(0,0) + F_y(P_0)y_u(0,0) + F_z(P_0)z_u(0,0) = 3x_u(0,0) + y_u(0,0) - 2 \\ 0 = G_u(P_0) + G_x(P_0)x_u(0,0) + G_y(P_0)y_u(0,0) + G_z(P_0)z_u(0,0) = -2z_u(0,0) \\ 0 = H_u(P_0) + H_x(P_0)x_u(0,0) + H_y(P_0)y_u(0,0) + H_z(P_0)z_u(0,0) = x_u(0,0) - z_u(0,0) \end{cases}$$

da cui segue $x_u(0,0) = 0$, $y_u(0,0) = 2$, $z_u(0,0) = 0$. Analogamente, derivando rispetto a v , e calcolando in $(u,v) = (0,0)$, si ottiene,

$$\begin{cases} 0 = F_v(P_0) + F_x(P_0)x_v(0,0) + F_y(P_0)y_v(0,0) + F_z(P_0)z_v(0,0) = 3x_v(0,0) + y_v(0,0) \\ 0 = G_v(P_0) + G_x(P_0)x_v(0,0) + G_y(P_0)y_v(0,0) + G_z(P_0)z_v(0,0) = -2z_v(0,0) + 1 \\ 0 = H_v(P_0) + H_x(P_0)x_v(0,0) + H_y(P_0)y_v(0,0) + H_z(P_0)z_v(0,0) = 1 + x_v(0,0) - z_v(0,0) \end{cases}$$

da cui segue $x_v(0,0) = -\frac{1}{2}$, $y_v(0,0) = \frac{3}{2}$, $z_v(0,0) = \frac{1}{2}$.

(4) Introduciamo

$$\begin{cases} F(u,v,x,y,z) = ue^x + vy^2 - 2yz - 1 \\ G(u,v,x,y,z) = uv + u \sin y + 2xz \\ H(u,v,x,y,z) = x^2 + vxy + uz - 1 \end{cases}$$

per ogni $(u,v,x,y,z) \in \mathbb{R}^5$, e osserviamo che

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(u,v,x,y,z) = \begin{vmatrix} ue^x & 2vy - 2z & -2y \\ 2z & u \cos y & 2x \\ 2x + vy & vx & u \end{vmatrix},$$

e quindi $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(1,0,0,0,1) = 5 \neq 0$. Per il teorema del Dini, esistono un intorno U di (u_0, v_0) , un intorno V di (x_0, y_0, z_0) , e un'unica funzione $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : U \rightarrow V$ di classe

$C^1(U)$, che soddisfa $x(1,0) = 0$, $y(1,0) = 0$, $z(1,0) = 1$ e

$$\begin{cases} ue^{x(u,v)} + vy(u,v)^2 - 2y(u,v)z(u,v) - 1 = 0 \\ uv + u \sin y(u,v) + 2x(u,v)z(u,v) = 0 \\ x(u,v)^2 + vx(u,v)y(u,v) + uz(u,v) - 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

per ogni $(u,v) \in U$. Inoltre, derivando le equazioni (*) rispetto ad u , e sostituendo $(u,v) = (1,0)$, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= e^{x(u,v)} + ue^{x(u,v)}x_u(u,v) + 2vy(u,v)y_u(u,v) - 2y_u(u,v)z(u,v) - 2y(u,v)z_u(u,v) \Big|_{(1,0)} \\ &= 1 + x_u(1,0) - 2y_u(1,0), \\ 0 &= v + \sin y(u,v) + uy_u(u,v) \cos y(u,v) + 2x_u(u,v)z(u,v) + 2x(u,v)z_u(u,v) \Big|_{(1,0)} \\ &= 2x_u(1,0) + y_u(1,0), \\ 0 &= 2x(u,v)x_u(u,v) + vx_u(u,v)y(u,v) + vx(u,v)y_u(u,v) + z(u,v) + uz_u(u,v) \Big|_{(1,0)} \\ &= 1 + z_u(1,0), \end{aligned}$$

per cui $x_u(1,0) = -\frac{1}{5}$, $y_u(1,0) = \frac{2}{5}$, $z_u(1,0) = -1$. Analogamente, derivando le equazioni (*) rispetto a v e sostituendo $(u,v) = (1,0)$, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= ue^{x(u,v)}x_v(u,v) + y(u,v)^2 + 2vy(u,v)y_v(u,v) - 2y_v(u,v)z(u,v) - 2y(u,v)z_v(u,v) \Big|_{(1,0)} \\ &= x_v(1,0) - 2y_v(1,0), \\ 0 &= u + uy_v(u,v) \cos y(u,v) + 2x_v(u,v)z(u,v) + 2x(u,v)z_v(u,v) \Big|_{(1,0)} \\ &= 1 + 2x_v(1,0) + y_v(u,v), \\ 0 &= 2x(u,v)x_v(u,v) + x(u,v)y(u,v) + vx_v(u,v)y(u,v) + vx(u,v)y_v(u,v) + uz_v(u,v) \Big|_{(1,0)} \\ &= z_v(1,0), \end{aligned}$$

per cui $x_v(1,0) = -\frac{2}{5}$, $y_v(1,0) = -\frac{1}{5}$, $z_v(1,0) = 0$.

Oppure, con notazione più sintetica, derivando

$$\begin{cases} F(u,v,x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = 0 \\ G(u,v,x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = 0 \\ H(u,v,x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = 0 \end{cases}$$

rispetto a u , e calcolando in $(u,v) = (1,0)$, si ottiene, avendo posto $P_0 = (1,0,0,0,1)$,

$$\begin{cases} 0 = F_u(P_0) + F_x(P_0)x_u(1,0) + F_y(P_0)y_u(1,0) + F_z(P_0)z_u(1,0) = 1 + x_u(1,0) - 2y_u(1,0) \\ 0 = G_u(P_0) + G_x(P_0)x_u(1,0) + G_y(P_0)y_u(1,0) + G_z(P_0)z_u(1,0) = 1 + 2x_v(1,0) + y_v(u,v) \\ 0 = H_u(P_0) + H_x(P_0)x_u(1,0) + H_y(P_0)y_u(1,0) + H_z(P_0)z_u(1,0) = 1 + z_u(1,0) \end{cases}$$

da cui segue $x_u(1,0) = -\frac{1}{5}$, $y_u(1,0) = \frac{2}{5}$, $z_u(1,0) = -1$. Analogamente, derivando rispetto a v , e calcolando in $(u,v) = (1,0)$, si ottiene,

$$\begin{cases} 0 = F_v(P_0) + F_x(P_0)x_v(1,0) + F_y(P_0)y_v(1,0) + F_z(P_0)z_v(1,0) = x_v(1,0) - 2y_v(1,0) \\ 0 = G_v(P_0) + G_x(P_0)x_v(1,0) + G_y(P_0)y_v(1,0) + G_z(P_0)z_v(1,0) = 1 + 2x_v(1,0) + y_v(u,v) \\ 0 = H_v(P_0) + H_x(P_0)x_v(1,0) + H_y(P_0)y_v(1,0) + H_z(P_0)z_v(1,0) = z_v(1,0) \end{cases}$$

da cui segue $x_v(1, 0) = -\frac{2}{5}$, $y_v(1, 0) = -\frac{1}{5}$, $z_v(1, 0) = 0$.

□

Svolgimento esercizio 11

(1) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 1] e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) &= 2x = 0 \\ g_y(x, y) &= 2y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

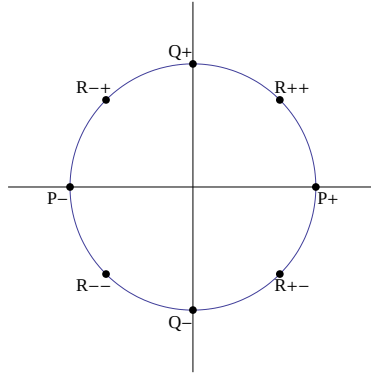


Figura 1: Dominio per l'esercizio 11 (1)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) &= 4x^3 + 2x\lambda = 2x(2x^2 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) &= 4y^3 + 2y\lambda = 2y(2y^2 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 + \lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \\ &\vee \quad \begin{cases} 2x^2 + \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x^2 + \lambda = 0 & (*) \\ 2y^2 + \lambda = 0 & (**) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il primo sistema è assurdo; nel quarto sistema sottraiamo l'equazione (**) dall'equazione (*), ottenendo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

cioè i punti $P_{\pm} = (0, \pm 1)$, $Q_{\pm} = (\pm 1, 0)$, e i quattro punti $R_{\pm, \pm} = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P_{\pm}) = f(Q_{\pm}) = 1$ e $f(R_{\pm, \pm}) = \frac{1}{2}$. Quindi $\min_D f = \frac{1}{2}$ e $\max_D f = 1$.

(2) Poiché $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{2}(-x \pm \sqrt{4 - 3x^2})$, D è l'unione dei grafici di due funzioni continue di x su $[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$, e quindi D è chiuso e limitato [vedi figura 2]. Poiché f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) &= 2x + y = 0 \\ g_y(x, y) &= 2y + x = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 + xy - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

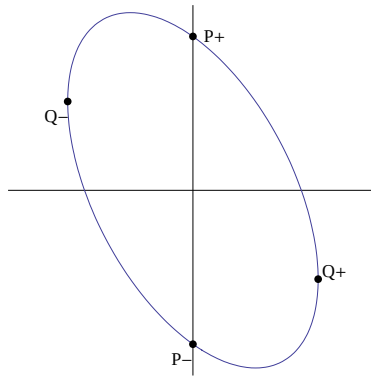


Figura 2: Dominio per l'esercizio 11 (2)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) &= y + \lambda(2x + y) = 2\lambda x + (\lambda + 1)y = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) &= x + 2y + \lambda(2y + x) = (\lambda + 1)(x + 2y) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -2y \\ (1 - 3\lambda)y = 0 \\ 3y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce i punti $P_{\pm} = (0, \pm 1)$; il secondo i punti $Q_{\pm} = (\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P_{\pm}) = 1$ e $f(Q_{\pm}) = -\frac{1}{3}$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{3}$ e $\max_D f = 1$.

(3) Poiché $x^2 + y^4 - y = 0 \iff x = \pm \sqrt{y - y^4}$, D è l'unione dei grafici di due funzioni continue di y su $[0, 1]$, e quindi D è chiuso e limitato [vedi figura 3]. Poiché f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^4 - y$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) &= 2x = 0 \\ g_y(x, y) &= 4y^3 - 1 = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^4 - y = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

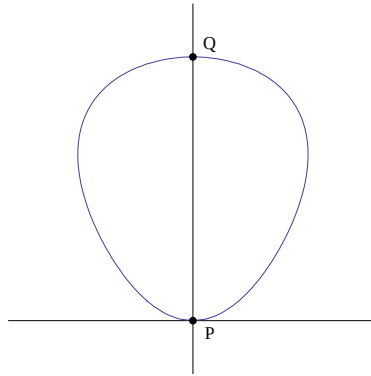


Figura 3: Dominio per l'esercizio 11 (3)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) &= 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) &= 2y + \lambda(4y^3 - 1) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) &= x^2 + y^4 - y = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y + \lambda(4y^3 - 1) = 0 \\ y(y^3 - 1) = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce il punto $P = (0, 0)$; il secondo fornisce i punti P , e $Q = (0, 1)$.

Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P) = 0$ e $f(Q) = 1$. Quindi $\min_D f = 0$ e $\max_D f = 1$.

(4) Poiché $x^4 + y^4 - 1 = 0 \iff y = \pm \sqrt[4]{1-x^4}$, D è l'unione dei grafici di due funzioni continue di x su $[-1, 1]$, e quindi D è chiuso e limitato [vedi figura 4]. Poiché f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, questi punti devono essere punti stazionari della Lagrangiana. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) &= 4x^3 = 0 \\ g_y(x, y) &= 4y^3 = 0 \\ g(x, y) &= x^4 + y^4 - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

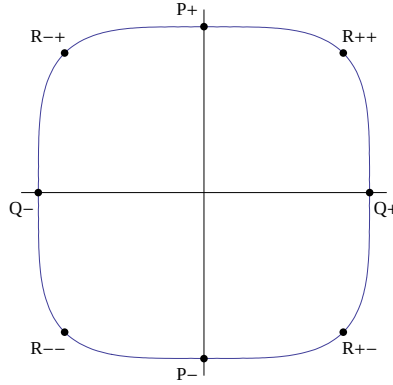


Figura 4: Dominio per l'esercizio 11 (4)

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) &= -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + 4\lambda x^3 = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} (2\lambda x^2(x^2+y^2) - 1) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) &= -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + 4\lambda y^3 = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} (2\lambda y^2(x^2+y^2) - 1) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) &= x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2\lambda y^2(x^2 + y^2) - 1 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \\ &\vee \quad \begin{cases} 2\lambda x^2(x^2 + y^2) - 1 = 0 \\ y = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2\lambda x^2(x^2 + y^2) - 1 = 0 & (*) \\ 2\lambda y^2(x^2 + y^2) - 1 = 0 & (**) \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Il primo sistema è assurdo; il secondo fornisce i punti $P_\pm = (0, \pm 1)$; il terzo i punti $Q_\pm = (\pm 1, 0)$. Dal quarto, sottraendo l'equazione (**) da (*), e osservando che deve essere $\lambda \neq 0$, si ottiene $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^4 + y^4 = 1, \end{cases}$ che fornisce i quattro punti $R_{\pm, \pm} = (\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$.

Calcolando il valore di f su detti punti, otteniamo $f(P_{\pm}) = f(Q_{\pm}) = 1$ e $f(R_{\pm,\pm}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi $\min_D f = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\max_D f = 1$.

- (5) Poiché $xy = 1 \iff y = \frac{1}{x}$, D è il grafico della funzione continua $x \in (0, +\infty) \rightarrow \frac{1}{x} \in (0, +\infty)$, e quindi D è chiuso ma non limitato [vedi figura 5], e quindi, anche se f è continua su D , non si può applicare il teorema di Weierstrass, per cui nessuno ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Ma osserviamo che f su D si può scrivere $g(x) := f(x, \frac{1}{x}) = \exp\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)$, $x \in (0, +\infty)$. Questa

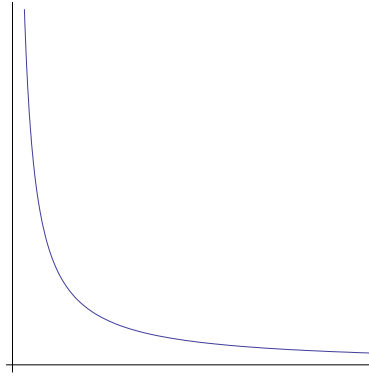


Figura 5: Dominio per l'esercizio 11 (5)

funzione ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$, e $g'(x) = \frac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2} \exp\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right) \geq 0 \iff x \in (0, 1]$, per cui g è crescente in $(0, 1]$, e decrescente in $[1, +\infty)$, e quindi ha massimo assoluto in $x = 1$. Quindi $\min_D f = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\inf_D f = 1$, e $\max_D f = f(1, 1) = \sqrt{e}$.

□

Svolgimento esercizio 12

- (1) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 6] e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

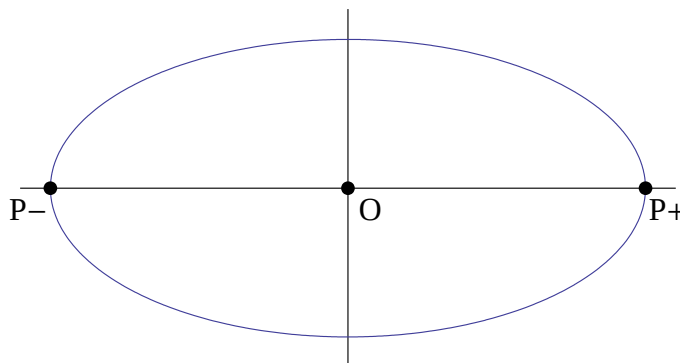


Figura 6: Dominio per l'esercizio 12 (1)

(a) tra i punti stazionari interni a D . Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^\circ$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + 2y^2 = 0 \\ f_y(x, y) = 4xy - 2y = 2y(2x - 1) = 0, \end{cases}$$

che fornisce il punto $O = (0, 0)$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$].

Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 2x = 0 \\ g_y(x, y) = 8y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 3x^2 + 2y^2 + 2x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 4xy - 2y + 8y\lambda = 2y(2x - 1 + 4\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

che implica

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x - 1 + 4\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{1}{4}(1 - 2x) \\ 3x^2 + 7y^2 + \frac{1}{2}x(1 - 2x) = \frac{1}{2}(4x^2 + 4y^2 + x) = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce i punti $P_\pm = (\pm 2, 0)$, mentre il secondo implica

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + x = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + x + 4 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(O) = 3$, $f(P_+) = 11$, $f(P_-) = -5$. Quindi $\min_D f = -5$ e $\max_D f = 11$.

(2) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 7] e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

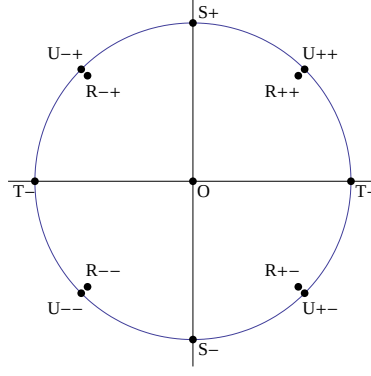


Figura 7: Dominio per l'esercizio 12 (2)

(a) tra i punti stazionari interni a D . Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^\circ$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 + 12xy^2 - 64x = 4x(x^2 + 3y^2 - 16) = 0 \\ f_y(x, y) = 12x^2y + 4y^3 - 64y = 4y(3x^2 + y^2 - 16) = 0, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases} \\ & \vee \quad \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 16 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + 3y^2 - 16 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 16 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

che forniscono i punti $O = (0, 0)$, $P_\pm = (0, \pm 4)$, $Q_\pm = (\pm 4, 0)$, $R_{\pm, \pm} = (\pm 2, \pm 2)$, dei quali solo O e $R_{\pm, \pm}$ sono interni a D .

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$].

Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 2x = 0 \\ g_y(x, y) = 2y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 4x^3 + 12xy^2 - 64x + 2x\lambda = 2x(2x^2 + 6y^2 - 32 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 12x^2y + 4y^3 - 64y + 2y\lambda = 2y(6x^2 + 2y^2 - 32 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ 6x^2 + 2y^2 - 32 + \lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \\ & \vee \quad \begin{cases} 2x^2 + 6y^2 - 32 + \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x^2 + 6y^2 - 32 + \lambda = 0(*) \\ 6x^2 + 2y^2 - 32 + \lambda = 0(**) \\ x^2 + y^2 - 9 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il primo sistema è assurdo; il secondo fornisce i punti $S_{\pm} = (0, \pm 3)$; il terzo fornisce i punti $T_{\pm} = (\pm 3, 0)$. Il quarto sistema, dopo aver sottratto l'equazione $(**)$ da $(*)$, implica

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

che fornisce i quattro punti $U_{\pm, \pm} = (\pm \frac{3}{\sqrt{2}}, \pm \frac{3}{\sqrt{2}})$.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(O) = 0$, $f(R_{\pm, \pm}) = -128$, $f(S_{\pm}) = f(T_{\pm}) = -207$, $f(U_{\pm, \pm}) = -126$. Quindi $\min_D f = -207$ e $\max_D f = 0$.

(3) Poiché D è chiuso e limitato [perché è una corona circolare] e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D . Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^\circ$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 0 \\ f_y(x, y) = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 0, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases} \\ & \vee \quad \begin{cases} y^2 - 3x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y^2 - 3x^2 = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

I quattro sistemi forniscono il solo punto $O = (0, 0) \notin D^\circ$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$.

Poiché $\mathcal{F}D$ è l'unione di due circonferenze, possiamo parametrizzarle ponendo $\begin{cases} x = r \cos \vartheta, \\ y = r \sin \vartheta, \end{cases}$

$\vartheta \in [0, 2\pi]$, $r \in \{1, 2\}$. Otteniamo così le funzioni $g_1(\vartheta) := f(\cos \vartheta, \sin \vartheta) = 2 \cos \vartheta \sin \vartheta = \sin 2\vartheta$, e $g_2(\vartheta) := f(2 \cos \vartheta, 2 \sin \vartheta) = \frac{1}{2} \cos \vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{4} \sin 2\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Allora, $\min g_1 = -1$, $\max g_1 = 1$, $\min g_2 = -\frac{1}{4}$, $\max g_2 = \frac{1}{4}$.

(d) Quindi, $\min_D f = -1$, $\max_D f = 1$.

(4) Poiché D è chiuso e limitato [perché è un quadrato] e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D . Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^\circ$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2(x+1)e^{(x+1)^2+(y-1)^2} = 0 \\ f_y(x, y) = 2(y-1)e^{(x+1)^2+(y-1)^2} = 0, \end{cases}$$

che fornisce il punto $(-1, 1) \notin D^\circ$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Parametizziamo, separatamente, i quattro segmenti di retta che compongono $\mathcal{F}D$, indicando con $V_1 = (1, 1)$, $V_2 = (0, 1)$, $V_3 = (0, 0)$, $V_4 = (1, 0)$ i vertici del quadrato D .

Il segmento V_1V_2 ha equazioni parametriche $x = t, y = 1$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_1(t) = f(t, 1) = e^{(t+1)^2}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g'_1(t) = 2(t+1)e^{(t+1)^2} = 0 \iff t = -1$, si ottengono i punti V_1, V_2 .

Il segmento V_2V_3 ha equazioni parametriche $x = 0, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_2(t) = f(0, t) = e^{t^2-2t+2}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g'_2(t) = 2(t-1)e^{t^2-2t+2} = 0 \iff t = 1$, si ottengono i punti V_2, V_3 .

Il segmento V_3V_4 ha equazioni parametriche $x = t, y = 0$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_3(t) = f(t, 0) = e^{t^2+2t+2}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g'_3(t) = 2(t+1)e^{t^2+2t+2} = 0 \iff t = -1$, si ottengono i punti V_3, V_4 .

Il segmento V_1V_4 ha equazioni parametriche $x = 1, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_4(t) = f(1, t) = e^{t^2-2t+5}$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g'_4(t) = 2(t-1)e^{t^2-2t+5} = 0 \iff t = 0$, si ottengono i punti V_1, V_4 .

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = e^4$, $f(V_2) = e$, $f(V_3) = e^2$, $f(V_4) = e^5$. Quindi $\min_D f = e$, e $\max_D f = e^5$.

(5) Poiché D è chiuso e limitato [perché è un triangolo] e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D . Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^\circ$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 96x^3 - 2(x - y) = 0 \\ f_y(x, y) = 12y^3 - 2(y - x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 96x^3 + 12y^3 = 0 \\ 12y^3 - 2y + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ -48x^3 + 6x = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0, 0) \notin D^\circ$, e $(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}) \notin D^\circ$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Parametizziamo, separatamente, i tre segmenti di retta che compongono $\mathcal{F}D$, indicando con $V_1 = (1, 1)$, $V_2 = (0, 1)$, $V_3 = (0, 0)$ i vertici del triangolo D .

Il segmento V_1V_2 ha equazioni parametriche $x = t, y = 1$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_1(t) = f(t, 1) = 24t^4 - t^2 + 2t + 2$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g'_1(t) = 96t^3 - 2t + 2 = 96t^3 + 2(1 - t) \geq 0$, per ogni $t \in [0, 1]$, si ottengono i punti V_1, V_2 .

Il segmento V_2V_3 ha equazioni parametriche $x = 0, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_2(t) = f(0, t) = 3t^4 - t^2$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_2'(t) = 12t^3 - 2t = 0 \iff t = 0 \vee t = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$, si ottengono i punti V_2 , V_3 , e $P = (0, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Il segmento V_3V_1 ha equazioni parametriche $x = t, y = t$, con $t \in [0, 1]$. Si ha $g_3(t) = f(t, t) = 27t^4$, per $t \in [0, 1]$. Poiché $g_3'(t) = 108t^3 = 0 \iff t = 0$, si ottengono i punti V_3 , V_1 .

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = 27$, $f(V_2) = 2$, $f(V_3) = 0$, $f(P) = -\frac{1}{12}$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{12}$, e $\max_D f = 27$.

(6) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 8] e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

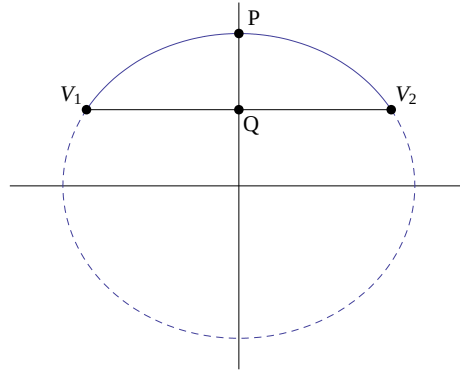


Figura 8: Dominio per l'esercizio 12 (6)

(a) tra i punti stazionari interni a D . Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^\circ$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} - x = x(2e^{x^2+y^2} - 1) = 0 \\ f_y(x, y) = 2ye^{x^2+y^2} - 2y = 2y(e^{x^2+y^2} - 1) = 0, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \end{cases} \\ & \vee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

L'unico sistema che ammette soluzione è il primo, che fornisce il punto $O = (0, 0) \notin D^\circ$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non esistono.

(c) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. La frontiera $\mathcal{F}D$ è unione di un arco di ellisse $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 = 4, y \geq \frac{1}{2}\}$, e del segmento di retta $\ell := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}, x \in [-1, 1]\}$, che si incontrano nei punti $V_1 = (-1, \frac{1}{2})$, e $V_2 = (1, \frac{1}{2})$. Allora, impieghiamo due metodi diversi: per trattare l'insieme E , usiamo il metodo

dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_E$]; per trattare l'insieme ℓ , usiamo il metodo di parametrizzazione.

Cominciamo dall'insieme E . Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 4$, $y \geq \frac{1}{2}$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 6x = 0 \\ g_y(x, y) = 8y = 0 \\ g(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 2xe^{x^2+y^2} - x + 6\lambda x = x(2e^{x^2+y^2} - 1 + 6\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 2ye^{x^2+y^2} - 2y + 8\lambda y = 2y(e^{x^2+y^2} - 1 + 4\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 + 4\lambda = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ & \vee \quad \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 + 6\lambda = 0 \\ y = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2e^{x^2+y^2} - 1 + 6\lambda = 0 \\ e^{x^2+y^2} - 1 + 4\lambda = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Il primo, il terzo e il quarto sistema sono assurdi; il secondo fornisce il punto $P = (0, 1)$.

Consideriamo, ora, il segmento ℓ . Esso ha equazioni parametriche $x = t, y = \frac{1}{2}$, con $t \in [-1, 1]$. Si ha $h(t) = f(t, \frac{1}{2}) = e^{t^2+1/4} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}$, per $t \in [-1, 1]$. Poiché $h'(t) = 2te^{t^2+1/4} - t = t(2e^{t^2+1/4} - 1) = 0 \iff t = 0$, si ottengono i punti V_1, V_2 , e $Q = (0, \frac{1}{2})$.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = f(V_2) = e - \frac{1}{2}$, $f(P) = e - 1$, $f(Q) = e^{1/4} - \frac{1}{4}$. Quindi $\min_D f = e^{1/4} - \frac{1}{4}$ e $\max_D f = e - \frac{1}{2}$.

(7) Poiché D è chiuso e limitato [vedi figura 9] e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(a) tra i punti stazionari interni a D . Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x, y) \in D^\circ$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2(x - y) = 0 \\ f_y(x, y) = 2(y - x) = 0, \end{cases}$$

che fornisce il segmento di retta $\ell := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})\} \subset D^\circ$.

(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non esistono.

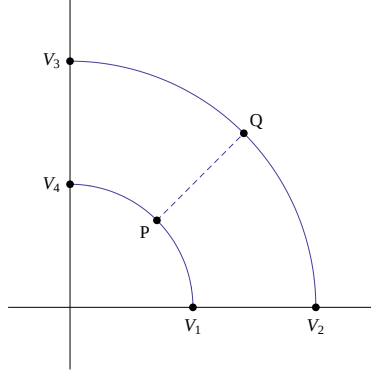


Figura 9: Dominio per l'esercizio 12 (7)

(c) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. La frontiera $\mathcal{F}D$ è unione di due archi di circonferenza $C_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ e $C_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, e di due segmenti di retta $\ell_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in [0, 1]\}$ e $\ell_y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [0, 1]\}$, che si incontrano nei punti $V_1 = (1, 0)$, $V_2 = (2, 0)$, $V_3 = (0, 2)$, $V_4 = (0, 1)$, e che dovremo considerare quali possibili punti di massimo o minimo. Allora, impieghiamo due metodi diversi: per trattare gli insiemi C_1 e C_2 , usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana; per trattare gli insiemi ℓ_x e ℓ_y , usiamo il metodo di parametrizzazione.

Cominciamo dall'insieme C_1 . Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 2x = 0 \\ g_y(x, y) = 2y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 2(x - y) + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 2(y - x) + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda + 1)x = y \\ \lambda(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x^2 = \frac{1}{2}, x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -x \\ (\lambda + 1)x = -x \\ x^2 = \frac{1}{2}, x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il secondo sistema è assurdo; il primo fornisce il punto $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in \bar{\ell}$.

Continuiamo con l'insieme C_2 . Introduciamo la funzione di vincolo $h(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $x \geq 0$,

$y \geq 0$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} h_x(x, y) = 2x = 0 \\ h_y(x, y) = 2y = 0 \\ h(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 2(x - y) + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 2(y - x) + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 4 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} &\iff \begin{cases} (\lambda + 1)x = y \\ \lambda(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0, x \geq 0, y \geq 0, \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x^2 = 2, x \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = -x \\ (\lambda + 1)x = -x \\ x^2 = 2, x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il secondo sistema è assurdo; il primo fornisce il punto $Q = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in \bar{\ell}$.

Consideriamo, ora, il segmento ℓ_x . Esso ha equazioni parametriche $x = t, y = 0$, con $t \in [1, 2]$. Si ha $j(t) = f(t, 0) = t^2$, per $t \in [1, 2]$. Poiché $j'(t) = 2t = 0 \iff t = 0$, non si ottengono ulteriori punti.

Consideriamo, infine, il segmento ℓ_y . Esso ha equazioni parametriche $x = 0, y = t$, con $t \in [1, 2]$. Si ha $k(t) = f(0, t) = t^2$, per $t \in [1, 2]$. Poiché $k'(t) = 2t = 0 \iff t = 0$, non si ottengono ulteriori punti.

(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(V_1) = f(V_4) = 1$, $f(V_2) = f(V_3) = 4$, $f|_{\bar{\ell}} = 0$. Quindi $\min_D f = 0$ e $\max_D f = 4$.

□