Analisi Matematica II
Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Esercizio 1. Studiare la continuità delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \sin\left(\dfrac{|y|}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{1+y}\ \exp\left(\dfrac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}\right) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y^3}{x}\right) \cos\left(\dfrac{1}{y}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$

(6) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^3+y^3} & x+y \neq 0 \\ 0 & x+y = 0 \end{cases}$

(7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x-y} & x-y \neq 0 \\ 0 & x-y = 0 \end{cases}$

(8) $f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1+y+x^2}{y}\right)^y & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$

(9) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y & y < x^2 \\ y^2 + x & y \geq x^2 \end{cases}$

(10) $f(x,y) = \begin{cases} x + y^3 & x \leq y^3 \\ x^2 + y^6 & x > y^3 \end{cases}$

(11) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy) & y < x^2 \\ 0 & y \geq x^2 \end{cases}$

(12) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2-y^2} & x^2+y^2 \leq 1 \\ \dfrac{1}{e} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x^2+y^2)\right) & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

(13) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x^2+y^2 < 1 \\ 1 & 1 \leq x^2+y^2 \leq 2 \\ e^{x^2+y^2-2} & x^2+y^2 > 2 \end{cases}$

Esercizio 2. Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali, differenziabilità per le seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & y \neq 0 \\ x & y = 0, \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x \neq 0 \\ y & x = 0, \end{cases}$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \cos y & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$

(6) $f(x,y) = \begin{cases} xy \log|xy| & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0, \end{cases}$

(7) $f(x,y) = \begin{cases} (4x^2 + y^2 - 4) \cos\left(\dfrac{1}{4x^2 + y^2 - 4}\right) & 4x^2 + y^2 - 4 \neq 0 \\ 0 & 4x^2 + y^2 - 4 = 0, \end{cases}$

(8) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(xy) & y < x^2 \\ 0 & y \geq x^2, \end{cases}$

Esercizio 3. Verificare che le seguenti funzioni sono soluzioni delle equazioni differenziali indicate

(1) $y(x) = \int_0^x e^t \sin 2(x-t)\, dt, \quad y''(x) + 4y(x) = 2e^x,$

(2) $y(x) = \int_0^x e^x \sin(x-t)\, dt, \quad y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x,$

(3) $y(x) = \int_0^x (x-t) e^{2x-t}\, dt, \quad y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^x,$

(4) $y(x) = \int_0^x e^{x-t}(e^{x-t} - 1) \cos t\, dt, \quad y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \cos x,$

(5) $y(x) = \int_0^x \big(1 - \cos(x-t)\big) \sin t\, dt, \quad y'''(x) + y'(x) = \sin x.$

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1 + \sin x^2 y^2}{x^2}\, dy,$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_0^{x} \frac{y \cos^2(x^2(1+y^2))}{x^2}\, dy.$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{(x^2 - y) \cos y^2}{\sin x^4}\, dy,$

(4) $\lim_{x\to 0} \int_0^x \frac{(x-y)e^{-y^2}}{\sin^2 x}\, dy,$

(5) $\lim_{x\to 0} \int_0^1 \frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2}\, dy,$

Esercizio 5. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2, nel punto (x_0, y_0) indicato, delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3, \quad (x_0, y_0) = (1,2),$

(2) $f(x,y) = x \sin y, \quad (x_0, y_0) = (0,0),$

(3) $f(x,y) = x^2y + y \sin x, \quad (x_0, y_0) = (\pi, 0),$

(4) $f(x,y) = (1-\cos x)e^y, \quad (x_0, y_0) = (0,0).$

Esercizio 6. Determinare la natura dei punti stazionari delle seguenti funzioni

(1) $f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x,$

(2) $f(x,y) = 2(x^2+y^2+1) - (x^4+y^4),$

(3) $f(x,y) = 2(x^4+y^4+1) - (x+y)^2,$

(4) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)},$

(5) $f(x,y) = (x-y)e^{-(x^2+y^2)},$

(6) $f(x,y) = (x^2+xy+y^2)e^{x+2y},$

(7) $f(x,y) = (x^2+xy+2y^2)e^{x+y},$

(8) $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2},$

(9) $f(x,y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy,$

(10) $f(x,y) = -\sin x \sin(2y),$

(11) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$

(12) $f(x,y) = xy|y|.$

Esercizio 7. Mostrare che le equazioni seguenti definiscono, in un intorno del punto (x_0, y_0) indicato, un'unica funzione $y = f(x)$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0.

(1) $F(x,y) = x(x^2+y^2) - 2y^2 = 0\,, \quad (1,1),$

(2) $F(x,y) = y\sin x + xe^y - 2 = 0\,, \quad (2,0),$

(3) $F(x,y) = xe^y + y\sin(x-1) - 2x - 4y + 1 = 0\,, \quad (1,0),$

(4) $F(x,y) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + e^{xy-1} - 2 = 0\,, \quad (-1,-1),$

(5) $F(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{6} - \log 2 = 0\,, \quad (\sqrt{3}, 1).$

Esercizio 8. Mostrare che le equazioni seguenti definiscono, in un intorno del punto (x_0, y_0, z_0) indicato, un'unica funzione $z = f(x, y)$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0).

(1) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 1 = 0\,, \quad (3, -1, 1),$

(2) $F(x, y, z) = xyz - 6 = 0\,, \quad (1, -2, -3),$

(3) $F(x, y, z) = xy + yz + zx - 3 = 0\,, \quad (1, 1, 1),$

(4) $F(x, y, z) = \displaystyle\int_1^z \sin(x^2t^2)\, dt + x^2y + y^2 - z^2 = 0\,, \quad (0, 1, 1).$

Esercizio 9. Mostrare che i sistemi di equazioni seguenti definiscono, in un intorno del punto indicato, un'unica funzione vettoriale f. Determinare la derivata prima di f nel corrispondente punto.

(1) $\begin{cases} t^2 + x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ tx + ty^2 - t^2 = 0, \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t)), \quad (t_0, x_0, y_0) = (1, 0, 1),$

(2) $\begin{cases} t^2 + 2x^2 + 3y^2 - x - 1 = 0 \\ t^3 + 3x^3 - 4y^3 + y - 1 = 0, \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t)), \quad (t_0, x_0, y_0) = (1, 0, 0),$

(3) $\begin{cases} 2t + \sin x + 2xy + y^2 - 2 = 0 \\ t^2y + \cos x + xy - y^3 - t = 0, \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t)), \quad (t_0, x_0, y_0) = (1, 0, 0),$

(4) $\begin{cases} t + x + 2y + 3z = 3 \\ t^2 + x^2 - 2y^2 + z^2 = -1 \\ t^3 + x^3 - y^3 + z^3 = 0, \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (t_0, x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1, 0),$

(5) $\begin{cases} tx + e^y + 2z^2 = 2 \\ t^2 + xy + \sin z = 1 \\ t^2z - 3x^2 + y \sin z + 3 = 0, \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (t_0, x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0, 0),$

Esercizio 10. Mostrare che i sistemi di equazioni seguenti definiscono, in un intorno del punto indicato, un'unica funzione vettoriale f. Determinare le derivate prime di f nel corrispondente punto.

(1) $\begin{cases} x^2 + uy^2 - v = 0 \\ xy + 2y^2 - uv = 3 \end{cases} \qquad f(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), \quad (u_0, v_0, x_0, y_0) = (0, 1, 1, 1),$

(2) $\begin{cases} u \sin x + vxy + uv - 1 = 0 \\ v^2 \cos x + ux^2 + vy^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad f(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), \quad (u_0, v_0, x_0, y_0) = (1, 1, 0, 0),$

(3) $\begin{cases} x^3 + xy - 2uz^2 = 1 \\ y^2 - uyz - z^2 + v = -1 \\ vx^2 + xz - z^2 + uv = 0 \end{cases} \qquad f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u_0, v_0, x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1, 0, 1),$

(4) $\begin{cases} ue^x + vy^2 - 2yz - 1 = 0 \\ uv + u\sin y + 2xz = 0 \\ x^2 + vxy + uz - 1 = 0 \end{cases}$ $\quad f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u_0, v_0, x_0, y_0, z_0) = (1,0,0,0,1).$

Esercizio 11. Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni nei domini indicati

(1) $f(x,y) = x^4 + y^4\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$

(2) $f(x,y) = xy + y^2\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy = 1\},$

(3) $f(x,y) = y^2\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 - y = 0\},$

(4) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\},$

(5) $f(x,y) = xye^{\frac{xy}{x^2+y^2}}\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, x > 0\}.$

Esercizio 12. Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni nei domini indicati

(1) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^2 + 3\,, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\big\},$

(2) $f(x,y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 32(x^2 + y^2)\,, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\big\},$

(3) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\,, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\big\},$

(4) $f(x,y) = e^{(x+1)^2 + (y-1)^2}\,, \quad D = [0,1] \times [0,1],$

(5) $f(x,y) = 24x^4 + 3y^4 - (x-y)^2\,, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\big\},$

(6) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} - \dfrac{1}{2}x^2 - y^2\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \leq 4, y \geq \dfrac{1}{2}\},$

(7) $f(x,y,z) = (x-y)^2\,, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$