Analisi Matematica II
Serie numeriche (svolgimenti)

**Svolgimento esercizio 1**

(1) Sia $a_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$. Poiché $a_n = \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \not\to 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.

(2) Sia $a_n := \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$. Poiché $a_n = \frac{2}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)} = \frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(3) Sia $a_n := \frac{(\sqrt{n}+1)^n\left(\sqrt{n^n+n^{-5}}-\sqrt{n^n-n^{-6}}\right)}{\sqrt{n+n^{-1}}-\sqrt{n-n^{-2}}}$. Poiché $a_n = (\sqrt{n}+1)^n \frac{n^{-5}+n^{-6}}{\sqrt{n^n+n^{-5}}+\sqrt{n^n-n^{-6}}} \frac{\sqrt{n+n^{-1}}+\sqrt{n-n^{-2}}}{n^{-1}+n^{-2}} = n^{n/2}(1+o(1))\frac{n^{-5}}{2n^{n/2}}(1+o(1))\frac{2\sqrt{n}}{n^{-1}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{7/2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(4) Sia $a_n := (-1)^n \sin\frac{1}{\log n}$. Intanto, $|a_n|$ è (definitivamente) decrescente, perché composizione della successione decrescente $\left\{\frac{1}{\log n}\right\}$ e della funzione crescente $\sin|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$. Inoltre, $|a_n|$ è infinitesima, perché $|a_n| = \sin\frac{1}{\log n} = \frac{1}{\log n}(1+o(1)) \to 0$. Allora, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (non assolutamente) per il criterio di Leibniz.

(5) Osserviamo che $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+n^2\log n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$, e la prima serie converge assolutamente. Occorre, quindi, solo determinare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$. Sia $a_n := (-1)^n\ \frac{\log n}{n}$. Intanto, $|a_n|$ è (definitivamente) decrescente, perché, posto $f(x) := \frac{\log x}{x}$, si ha $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2} \geq 0 \iff x \in (0,e]$. Inoltre, $|a_n|$ è infinitesima. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (non assolutamente) per il criterio di Leibniz.

(6) Sia $a_n := \frac{n!+n^n}{\binom{2n}{n}}$. Poiché $a_n = \frac{n^n(1+o(1))}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{n^n(n!)^2}{(2n)!}(1+o(1))$, si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\frac{(2n)!}{(2n+2)!}(1+o(1)) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)}(1+o(1)) = e(1+o(1))\,\frac{n^3(1+o(1))}{4n^2(1+o(1))} \to +\infty$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.

(7) Sia $a_n := \frac{n^n-2^{n\log n}}{\binom{3n}{n}}$. Poiché $a_n = \frac{n^n(1+o(1))}{\frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}} = \frac{n^n\cdot n!\cdot(2n)!}{(3n)!}(1+o(1))$, si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\frac{(3n)!}{(3n+3)!}(1+o(1)) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{(n+1)^2(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}(1+o(1)) = e(1+o(1))\,\frac{4n^4(1+o(1))}{27n^3(1+o(1))} \to +\infty$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.

(8) Sia $a_n := 1-n^2\sin^2\frac{1}{n}$. Poiché $a_n = 1-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)^2 = 1-n^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3n^4}+o(\frac{1}{n^4})\right) = \frac{1}{3n^2}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(9) Sia $a_n := \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$. Poiché $a_n = e^{n^2\log(1-\frac{2}{n})} = e^{-2n(1+o(1))} = o(\frac{1}{n^{100}})$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(10) Sia $a_n := \left(\frac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{2}{n}}\right)^{n^3}$. Allora $a_n = e^{n^3(\log\cos\frac{3}{n}-\log\cos\frac{2}{n})} \overset{(a)}{=} e^{n^3(-\frac{9}{2n^2}+\frac{2}{n^2})(1+o(1))} = e^{-\frac{5}{2}n(1+o(1))} = o(\frac{1}{n^2})$, dove in $(a)$ si è usato il risultato $\log\cos x = \log\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) = -\frac{1}{2}x^2(1+o(1))$, $x\to 0$. Quindi, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

□

**Svolgimento esercizio 2**

(1) Sia $a_n := \frac{\log(1+n^2)}{(n+3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{2\log n}{n^\beta}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff \beta > 1$.

(2) Sia $a_n := \frac{\log(1+2^n)}{(n+3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n\log 2}{n^\beta}(1+o(1)) = \frac{\log 2}{n^{\beta-1}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff \beta-1>1 \iff \beta>2$.

(3) Sia $a_n := \frac{n^2+\log(1+n^2)}{(1+n^3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta-2>1 \iff \beta>1$.

(4) Sia $a_n := \frac{n^2\log(1+n^2)}{(1+n^3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{2n^2\log n}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{2\log n}{n^{3\beta-2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta-2>1 \iff \beta>1$.

(5) Sia $a_n := \frac{n^2+\log(1+2^n)}{(1+n^3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta-2>1 \iff \beta>1$.

(6) Sia $a_n := \frac{n^2\log(1+2^n)}{(1+n^3)^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^3\log 2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{\log 2}{n^{3\beta-3}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta-3>1 \iff \beta>\frac{4}{3}$.

(7) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta+\log(1+n^2)}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-2}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta-2>1 \iff \beta>1$.

(8) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta+\log(1+2^n)}$. Poiché $a_n = \begin{cases} \frac{n^2}{n^{3\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-2}}(1+o(1)), & \beta>\frac{1}{3}, \\ \frac{n^2}{2n}(1+o(1)) = \frac{1}{2}n(1+o(1)), & \beta=\frac{1}{3}, \\ \frac{n^2}{n}(1+o(1)) = n(1+o(1)), & \beta<\frac{1}{3}, \end{cases}$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta-2>1 \iff \beta>1$.

(9) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta\log(1+n^2)}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{2n^{3\beta}\log n}(1+o(1)) = \frac{1}{2n^{3\beta-2}\log n}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta-2>1 \iff \beta>1$.

(10) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta\log(1+2^n)}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta+1}\log 2}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-1}\log 2}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta-1>1 \iff \beta>\frac{2}{3}$.

(11) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+n^2))^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{2^\beta n^3(\log n)^\beta}(1+o(1)) = \frac{1}{2^\beta n(\log n)^\beta}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff \beta>1$.

(12) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+2^n))^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{(\log 2)^\beta n^{3+\beta}}(1+o(1)) = \frac{1}{(\log 2)^\beta n^{\beta+1}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff \beta+1>1 \iff \beta>0$.

(13) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta\log(1+\frac{1}{n^2})}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}\cdot\frac{1}{n^2}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{3\beta-4}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 3\beta-4>1 \iff \beta>\frac{5}{3}$.

(14) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+\frac{1}{n^2}))^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^3\cdot\frac{1}{n^{2\beta}}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{1-2\beta}}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 1-2\beta>1 \iff \beta<0$.

(15) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)^\beta\log(1+2^{-n})}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^{3\beta}\cdot 2^{-n}}(1+o(1)) = \frac{2^n}{n^{3\beta-2}}(1+o(1)) \not\to 0$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ non converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.

(16) Sia $a_n := \frac{n^2}{(1+n^3)(\log(1+2^{-n}))^\beta}$. Poiché $a_n = \frac{n^2}{n^3\cdot 2^{-n\beta}}(1+o(1)) = \frac{2^{\beta n}}{n}(1+o(1))$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\iff 2^\beta<1 \iff \beta<0$.

(17) Sia $a_n := \frac{1}{n^2(n^\beta+1)}$. Poiché $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^{2+\beta}}(1+o(1)), & \beta>0, \\ \frac{1}{2n^2}, & \beta=0, \\ \frac{1}{n^2}(1+o(1)), & \beta<0, \end{cases}$ la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$. **Alternativamente**, $0\le a_n\le\frac{1}{n^2}$, per ogni $\beta\in\mathbb{R}$, e quindi, per il teorema del confronto, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.

$\square$

**Svolgimento esercizio 3**

(1) Sia $a_n := \frac{x^{2n-1}}{n(2n-1)}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|^{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n(2n-1)}} \to x^2 < 1 \iff x \in (-1,1)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se $x \in (-1,1)$. Infine, se $x = \pm 1$, si ha $|a_n| = \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n^2}(1 + o(1))$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se $x \in [-1,1]$, e non converge altrove.

(2) Sia $a_n := \frac{x^n \log n}{1+\sqrt{n}}$. Poiché $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}\log(n+1)}{1+\sqrt{n+1}} \frac{1+\sqrt{n}}{|x|^n \log n} = |x| \frac{(1+\sqrt{n})\log n}{(1+\sqrt{n+1})\log(n+1)} \to |x|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-1,1)$. Per $x = 1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{1+\sqrt{n}}$, che non converge. Inoltre, per $x = -1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{1+\sqrt{n}}$, che converge per il teorema di Leibniz, in quanto $f(x) := \frac{\log x}{1+\sqrt{x}}$, $x \geq 1$, è tale che $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{2(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x}\log x}{2x(1+\sqrt{x})^2} \leq 0$, definitivamente. Quindi la serie converge assolutamente in $(-1,1)$ e semplicemente in $[-1,1)$. Non converge altrove.

(3) Sia $a_n := \frac{(x-\frac{1}{2})^n}{\log n}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = |x - \frac{1}{2}| \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}} \to |x - \frac{1}{2}|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Per $x = -\frac{1}{2}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$, che converge (non assolutamente) per il teorema di Leibniz. Per $x = \frac{3}{2}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e semplicemente in $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Non converge altrove.

(4) Sia $a_n := (-1)^n (n+1) x^n$. Poiché $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+2)|x|^{n+1}}{(n+1)|x|^n} = |x| \frac{n+2}{n+1} \to |x|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-1,1)$. Per $x = 1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$, che non converge. Per $x = -1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-1,1)$. Non converge altrove.

(5) Sia $a_n := \frac{(3-x)^n}{3^n \sqrt{n^2-1}}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-3|}{3} \frac{1}{\sqrt[2n]{n^2-1}} \to \frac{|x-3|}{3}$, la serie converge assolutamente per $x \in (0,6)$. Per $x = 6$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}$, che converge per il teorema di Leibniz. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(0,6)$ e semplicemente in $(0,6]$. Non converge altrove.

(6) Sia $a_n := \frac{n^2 (x+1)^n}{3^n + \sqrt{n^2-1}}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}|x+1|}{3(1+o(1))} \to \frac{|x+1|}{3}$, la serie converge assolutamente per $x \in (-4,2)$. Per $x = -4$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 3^n}{3^n + \sqrt{n^2-1}}$, che non converge, perché $a_n \not\to 0$. Per $x = 2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{3^n + \sqrt{n^2-1}}$, che non converge, perché $a_n \not\to 0$. Quindi la serie converge assolutamente e semplicemente in $(0,6)$. Non converge altrove.

(7) Sia $a_n := n\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(x - \frac{3}{2}\right)^n$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3}\,|x - \frac{3}{2}|\,\sqrt[n]{n} \to \frac{2}{3}\,|x - \frac{3}{2}|$, la serie converge assolutamente per $x \in (0,3)$. Per $x = 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, che non converge. Per $x = 3$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} n$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(0,3)$. Non converge altrove.

(8) Sia $a_n := \frac{2^{n+1}}{e^{nx}}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{e^x} \sqrt[n]{2} \to \frac{2}{e^x} < 1 \iff x > \log 2$, la serie converge assolutamente per $x \in (\log 2, +\infty)$. Per $x = \log 2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} 2$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(\log 2, +\infty)$. Non converge altrove.

(9) Sia $a_n := \frac{2^n (\sin x)^n}{n}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = 2|\sin x| \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 2|\sin x|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \mod \pi$. Per $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, che converge (non assolutamente). Per $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente per $x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \mod \pi$, e semplicemente per $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi] \mod 2\pi$. Non converge altrove.

(10) Sia $a_n := \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n^2-1}}{(x-1)^n}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{|x-1|}\ \sqrt[2n]{n^2-1} \to \frac{1}{|x-1|}$, la serie converge assolutamente per $x \in (-\infty,0)\cup(2,+\infty)$. Per $x=2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{n^2-1}$, che non converge. Per $x=0$ si ha $-\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2-1}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$. Non converge altrove.

(11) Sia $a_n := (n^2+2)\big(\frac{x+1}{x-1}\big)^n$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \big|\frac{x+1}{x-1}\big|\ \sqrt[n]{n^2+2} \to \big|\frac{x+1}{x-1}\big| < 1 \iff x \in (-\infty,0)$, la serie converge assolutamente per $x \in (-\infty,0)$. Per $x=0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2+2)$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-\infty,0)$. Non converge altrove.

(12) Sia $a_n := (4-3^x)^n \operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = |4-3^x|\sqrt[n]{\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}} \to |4-3^x| < 1 \iff x \in (1,\frac{\log 5}{\log 3})$, la serie converge assolutamente per $x \in (1,\frac{\log 5}{\log 3})$. Per $x=1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}$, che converge [in quanto $\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1))$]. Per $x=\frac{\log 5}{\log 3}$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}$, che converge assolutamente. Quindi la serie converge assolutamente in $[1,\frac{\log 5}{\log 3}]$. Non converge altrove.

(13) Sia $a_n := \frac{x^n}{1+nx^2}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = |x|\,\frac{1}{\sqrt[n]{1+nx^2}} \to |x|$, la serie converge assolutamente per $x \in (-1,1)$. Per $x=-1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n}$, che converge (non assolutamente) per il teorema di Leibniz. Per $x=1$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-1,1)$ e semplicemente in $[-1,1)$. Non converge altrove.

(14) Sia $a_n := \big(1-\frac{x}{n}\big)^{n^2}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \big(1-\frac{x}{n}\big)^n \to e^{-x}$, la serie converge assolutamente per $x \in (0,+\infty)$. Per $x=0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}1$, che non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(0,+\infty)$. Non converge altrove.

(15) Sia $a_n := \frac{1}{(\log n)^x}$. Poiché per $x \le 0$, $a_n := \frac{1}{(\log n)^x} \not\to 0$, e per $x>0$, $\frac{1}{(\log n)^x} \ge \frac{1}{n}$ definitivamente, la serie non converge mai.

(16) Sia $a_n := \frac{1}{\sqrt{n^x(1+n^2)}}$. Poiché $a_n = \frac{1}{n^{1+x/2}}(1+o(1))$, la serie converge assolutamente per $x \in (0,+\infty)$. Non converge altrove.

(17) Sia $a_n := \frac{(1-x)^n}{n^x}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|1-x|}{\sqrt[n]{n^x}} \to |x-1|$, la serie converge assolutamente per $x \in (0,2)$. Per $x=0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}1$, che non converge. Per $x=2$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, che converge assolutamente. Quindi la serie converge assolutamente in $(0,2]$. Non converge altrove.

(18) Sia $a_n := \frac{n^{2x}-1}{n^3+1}$. Poiché $a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n^3}(1+o(1)), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \frac{1}{n^{3-2x}}(1+o(1)), & x>0,\end{cases}$ la serie converge assolutamente per

$x \le 0$ oppure $\begin{cases} x>0 \\ 3-2x>1 \iff x<1,\end{cases}$ cioè $x \in (-\infty,1)$. Non converge altrove.

(19) Sia $a_n := \frac{n^{x-2}+n^{4-x^2}}{n^2}$. Poiché $a_n = \frac{1}{n^{4-x}} + \frac{1}{n^{x^2-2}}$ e $4-x \ge x^2-2 \iff x^2+x-6 \le 0 \iff -3 \le x \le 2$, si ha $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^{x^2-2}}(1+o(1)), & -3<x<2,\\ \frac{2}{n^7}, & x=-3,\\ \frac{2}{n^2}, & x=2,\\ \frac{1}{n^{4-x}}(1+o(1)), & x<-3 \ \vee\ x>2,\end{cases}$ e quindi la serie converge assolutamente per

$$\begin{cases} -3 \le x \le 2 \\ x^2 - 2 > 1 \iff |x| > \sqrt{3}, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < -3 \ \vee \ x > 2, \\ 4 - x > 1 \iff x < 3, \end{cases} \quad \text{cioè } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3).$$

Non converge altrove.

(20) Sia $a_n := \left(1 - \sqrt[n]{2} \cos \sqrt{\frac{x}{n}}\right)$, $x \ge 0$. Poiché $a_n := 1 - \sqrt[n]{2} \cos \sqrt{\frac{x}{n}} = 1 - \big(1 + \frac{\log 2}{n} + \frac{(\log 2)^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big)\big(1 - \frac{x}{2n} + \frac{x^2}{24n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big) = \frac{x - 2\log 2}{2n} - \big(\frac{x^2}{24} - \frac{x \log 2}{2} + \frac{(\log 2)^2}{2}\big)\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, la serie non converge se $x \ne \log 4$. Se $x = \log 4$ si ha $a_n = \frac{(\log 2)^2}{3n^2}(1 + o(1))$, e quindi la serie converge assolutamente.

□