

Esercizio 1. Sia $f(x) = 3\sqrt{|\sin(\pi x)|}$.

- (a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.
 (b) Supponiamo di aggiungere il nodo $x_3 = \frac{3}{2}$. Scrivere nella forma che si ritiene più opportuna il polinomio d'interpolazione $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3 .
 (c) Sia

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx.$$

Osserviamo che $\sin(\pi x) > 0$ per ogni $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Fissato $\varepsilon > 0$, determinare un n tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I - I_n| \leq \varepsilon$.

- (d) Calcolare un'approssimazione di I con errore ≤ 0.05 .

Soluzione.

- (a) Iniziamo dalla forma di Lagrange di $p(x)$. Notiamo che

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 3\sqrt{|\sin 0|} = 0, \\ f(x_1) &= 3\sqrt{|\sin(\frac{\pi}{2})|} = 3, \\ f(x_2) &= 3\sqrt{|\sin \pi|} = 0. \end{aligned}$$

Dunque la forma di Lagrange di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= 3 \frac{(x - 0)(x - 1)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} = 3 \frac{x(x - 1)}{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Lagrange, portiamo il polinomio in forma canonica:

$$p(x) = 3 \frac{x(x - 1)}{-\frac{1}{4}} = -12x(x - 1) = -12x^2 + 12x. \quad (1)$$

Per determinare la forma di Newton di $p(x)$, calcoliamo le differenze divise della Tabella 1. Si ha

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\ f[x_1] &= f(x_1) = 3 \\ f[x_2] &= f(x_2) = 0 \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{3 - 0}{\frac{1}{2} - 0} = 6 \\ f[x_0, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{1 - \frac{1}{2}} = -12 \end{aligned}$$

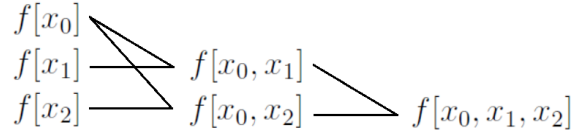


Tabella 1: Tabella delle differenze divise nel caso di tre nodi x_0, x_1, x_2 .

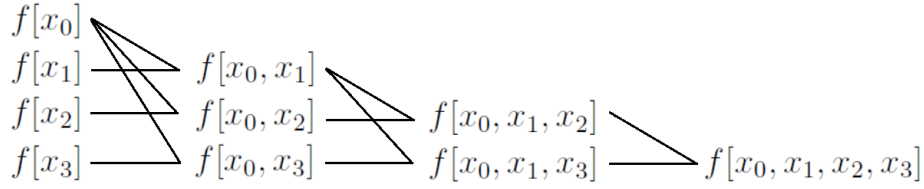


Tabella 2: Tabella delle differenze divise nel caso di quattro nodi x_0, x_1, x_2, x_3 .

Dunque la forma di Newton di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned}
 p(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
 &= 0 + 6(x - 0) - 12(x - 0)(x - \frac{1}{2}) \\
 &= 6x - 12x(x - \frac{1}{2}).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo nuovamente la forma canonica $p(x) = -12x^2 + 12x$ già ottenuta in (1). Questa è una prova della correttezza dei calcoli effettuati.

Osservazione. Non occorre calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$. Infatti, dalla forma di Newton (2) risulta che $f[x_0, x_1, x_2]$ è il coefficiente di x^2 e quindi, per confronto con la forma canonica (1), si poteva immediatamente concludere che $f[x_0, x_1, x_2] = -12$ senza calcolarlo. Non essendo necessario calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$, potevamo risparmiarci il calcolo di tutte le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 1.

(b) La forma più opportuna in cui scrivere $q(x)$ è la forma di Newton:

$$\begin{aligned}
 q(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= p(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= 6x - 12x(x - \frac{1}{2}) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]x(x - \frac{1}{2})(x - 1).
 \end{aligned}$$

L'unica cosa da calcolare è $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, che si ottiene calcolando le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 2. Si ha

$$\begin{aligned}
 f[x_3] &= f(x_3) = 3\sqrt{|\sin(\frac{3}{2}\pi)|} = 3 \\
 f[x_0, x_3] &= \frac{f[x_3] - f[x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{3 - 0}{\frac{3}{2} - 0} = 2 \\
 f[x_0, x_1, x_3] &= \frac{f[x_0, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{2 - 6}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = -4 \\
 f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_0, x_1, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-4 - (-12)}{\frac{3}{2} - 1} = 16
 \end{aligned}$$

Dunque la forma di Newton di $q(x)$ è data da

$$q(x) = 6x - 12x(x - \frac{1}{2}) + 16x(x - \frac{1}{2})(x - 1).$$

Se si vuole portare il polinomio in forma canonica, basta sviluppare i calcoli:

$$\begin{aligned} q(x) &= 6x - 12x(x - \frac{1}{2}) + 16x(x - \frac{1}{2})(x - 1) \\ &= 6x - 12x^2 + 6x + 16x(x^2 - x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) \\ &= -12x^2 + 12x + 16x^3 - 16x^2 - 8x^2 + 8x \\ &= 16x^3 - 36x^2 + 20x. \end{aligned}$$

(c) Poiché $\sin(\pi x) > 0$ per ogni $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, si ha $f(x) = 3\sqrt{\sin(\pi x)}$ per ogni $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ e possiamo quindi “sbarazzarci” del modulo. In base al teorema sull’errore della formula dei trapezi—che è applicabile perché la funzione $f(x)$ è di classe $C^\infty[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ come composizione di $\sin(\pi x) : [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \rightarrow [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ e $3\sqrt{y} : [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, entrambe di classe C^∞ sui rispettivi domini—per ogni n si ha

$$|I - I_n| = \left| -\frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})f''(\eta)}{12} \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{n}\right)^2 \right| = \frac{|f''(\eta)|}{48} \frac{1}{16n^2} = \frac{|f''(\eta)|}{768n^2},$$

dove $\eta \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Calcoliamo $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \frac{\pi \cos(\pi x)}{2\sqrt{\sin(\pi x)}} = \frac{3\pi \cos(\pi x)}{2\sqrt{\sin(\pi x)}}, \\ f''(x) &= \frac{-3\pi^2 \sin(\pi x) 2\sqrt{\sin(\pi x)} - 3\pi \cos(\pi x) \frac{2\pi \cos(\pi x)}{2\sqrt{\sin(\pi x)}}}{4 \sin(\pi x)} = \frac{-6\pi^2 \sin^2(\pi x) - 3\pi^2 \cos^2(\pi x)}{4 \sin(\pi x) \sqrt{\sin(\pi x)}} \\ &= -\frac{3\pi^2}{4} \cdot \frac{2 \sin^2(\pi x) + \cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x) \sqrt{\sin(\pi x)}} = -\frac{3\pi^2}{4} \cdot \frac{\sin^2(\pi x) + 1}{\sin(\pi x) \sqrt{\sin(\pi x)}}, \end{aligned}$$

dove nell’ultima uguaglianza abbiamo usato l’identità trigonometrica $\sin^2(\pi x) + \cos^2(\pi x) = 1$. Per ogni $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ si ha

$$|f''(x)| = \frac{3\pi^2}{4} \cdot \frac{\sin^2(\pi x) + 1}{\sin(\pi x) \sqrt{\sin(\pi x)}} \leq \frac{3\pi^2}{4} \cdot \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}) + 1}{\sin(\frac{\pi}{4}) \sqrt{\sin(\frac{\pi}{4})}} = \frac{3\pi^2}{4} \cdot \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{3\pi^2}{\sqrt{2}}.$$

Dunque,

$$|I - I_n| = \frac{|f''(\eta)|}{768n^2} \leq \frac{3\pi^2}{768\sqrt{2}n^2} = \frac{C}{n^2}, \quad C = \frac{3\pi^2}{768\sqrt{2}}.$$

Poiché

$$\frac{C}{n^2} \leq \varepsilon \iff n \geq \sqrt{\frac{C}{\varepsilon}} = n(\varepsilon),$$

concludiamo che $|I - I_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n(\varepsilon)$.

(d) Per ottenere un errore $|I - I_n| \leq 0.05$ basta prendere un qualsiasi

$$n \geq n(0.05) = \sqrt{\frac{C}{0.05}} = \sqrt{\frac{3\pi^2}{768\sqrt{2} \cdot 0.05}} = 0.805\dots$$

Quindi è sufficiente prendere $n = 1$. Calcoliamo dunque I_1 che sarà un’approssimazione di I con errore $|I - I_1| \leq 0.05$. Applicando la formula dei trapezi con $n = 1$, si ottiene

$$I_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1} \left[\frac{f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2})}{2} \right] = \frac{3\sqrt{\sin(\frac{\pi}{4})} + 3\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2})}}{8} = \frac{3\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 3}{8} = 0.69033615\dots$$

Esercizio 2. Sia $n \geq 3$ e si consideri la matrice $n \times n$ data da

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(è sottointeso che le componenti non scritte della matrice sono uguali a 0).

- Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- Dimostrare che gli autovalori di A sono reali e positivi.
- Stabilire se la matrice A è definita positiva.
- Fornire una stima per il raggio spettrale $\rho(A)$.
- Localizzare gli autovalori di $p(A)$, dove $p(\lambda) = 1 + \lambda^2$.

Soluzione.

- Per localizzare gli autovalori di A nel modo più preciso possibile, usiamo i teoremi di Gershgorin considerando sia i cerchi per riga K_1, K_2, \dots, K_n che i cerchi per colonna H_1, H_2, \dots, H_n . Notiamo però che la matrice A è simmetrica, cioè $A^T = A$. Infatti, A^T è la matrice le cui colonne sono le righe di A “scritte in verticale” e le righe di A “scritte in verticale” coincidono con le colonne di A : la prima riga di A coincide con la prima colonna di A , la seconda riga di A coincide con la seconda colonna di A , ecc. Dunque i cerchi per colonna coincidono con quelli per riga ($H_1 = K_1, H_2 = K_2, \dots, H_n = K_n$) e possiamo perciò limitarci a considerare i cerchi per riga. Indicando con $\mathcal{C}(z_0, r)$ il cerchio nel piano complesso di centro z_0 e raggio r , si ha

$$\begin{aligned} K_1 = K_n &= \mathcal{C}(4, 1), \\ K_2 = \dots = K_{n-1} &= \mathcal{C}(4, 2); \end{aligned}$$

si veda la Figura 1. L’unione dei cerchi coincide con il cerchio $\mathcal{C}(4, 2)$:

$$K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n = \mathcal{C}(4, 2).$$

Il secondo teorema di Gershgorin non può essere applicato perché l’unione dei cerchi è un insieme connesso (non può essere suddiviso in due o più sottoinsiemi disgiunti). Passiamo ora al terzo teorema di Gershgorin (debole), che può essere applicato alla matrice A in quanto A è irriducibile. Infatti, il grafo di A è fortemente connesso perché contiene il ciclo

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow n-1 \rightarrow n-2 \rightarrow \dots \rightarrow 1$$

che tocca tutti i nodi; si veda la Figura 2. Il bordo \mathcal{B} dell’unione dei cerchi $\mathcal{C}(4, 2)$ è la circonferenza di centro 4 e raggio 2 (circonferenza rossa in Figura 1). Siccome i punti di \mathcal{B} non stanno sul bordo di tutti i cerchi (infatti non stanno sul bordo dei cerchi piccoli K_1 e K_n), i punti di \mathcal{B} non possono essere autovalori di A . In conclusione, la localizzazione degli autovalori di A che si ottiene con i teoremi di Gershgorin è la seguente: *gli autovalori di A si trovano nel cerchio $\mathcal{C}(4, 2)$ privato del suo bordo*. Siccome A è reale e simmetrica (quindi hermitiana), sappiamo che gli autovalori di A sono reali. Possiamo dunque raffinare ulteriormente la localizzazione: *gli autovalori di A si trovano sia sull’asse reale che nel cerchio $\mathcal{C}(4, 2)$ privato del suo bordo, cioè si trovano nell’intervallo aperto $(2, 6)$* .

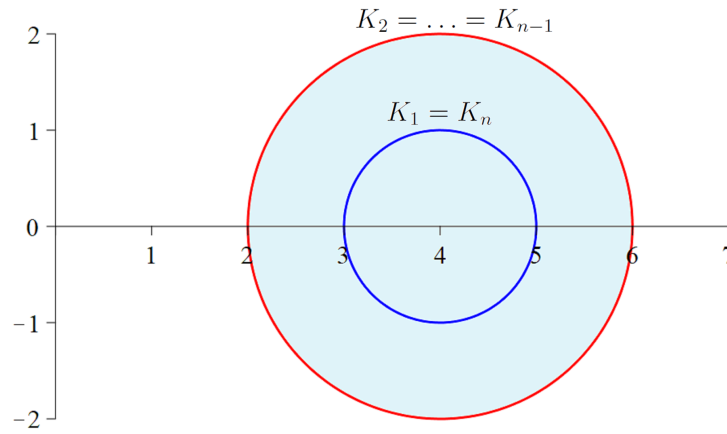


Figura 1: Cerchi di Gershgorin della matrice A dell'Esercizio 2.

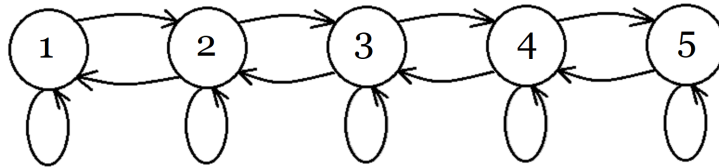


Figura 2: Grafo della matrice A dell'Esercizio 2 nel caso $n = 5$.

- (b) Abbiamo visto nel punto (a) che gli autovalori di A sono reali e si trovano nell'intervallo $(2, 6)$, dunque sono reali e positivi.
- (c) In base a un teorema, una matrice hermitiana è definita positiva se e solo se i suoi autovalori sono positivi. La matrice A è hermitiana e i suoi autovalori sono positivi per quanto visto nel punto (b), dunque A è definita positiva.
- (d) Siccome gli autovalori di A si trovano nell'intervallo $(2, 6)$, abbiamo che $2 < \rho(A) < 6$. Volendo fornire una stima ancora più precisa per $\rho(A)$, possiamo osservare che $\text{traccia}(A) = 4n$. Siccome $\text{traccia}(A)$ è la somma degli autovalori di A , deve per forza esistere almeno un autovalore di A di modulo ≥ 4 , perché se tutti gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ di A avessero modulo < 4 , allora si avrebbe

$$4n = |\text{traccia}(A)| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| < 4 + 4 + \dots + 4 = 4n,$$

il che è assurdo. Siccome dunque esiste almeno un autovalore di A di modulo ≥ 4 , concludiamo che $\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) \geq 4$. In conclusione, otteniamo la stima $4 \leq \rho(A) < 6$.

- (e) In base a un teorema, gli autovalori della matrice $p(A) = I + A^2$ sono

$$\begin{aligned} p(\lambda_1) &= 1 + \lambda_1^2, \\ p(\lambda_2) &= 1 + \lambda_2^2, \\ &\vdots \\ p(\lambda_n) &= 1 + \lambda_n^2, \end{aligned}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A . Siccome

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in (2, 6),$$

si deduce che

$$p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n) \in p((2, 6)) = \text{immagine di } (2, 6) \text{ tramite } p(\lambda).$$

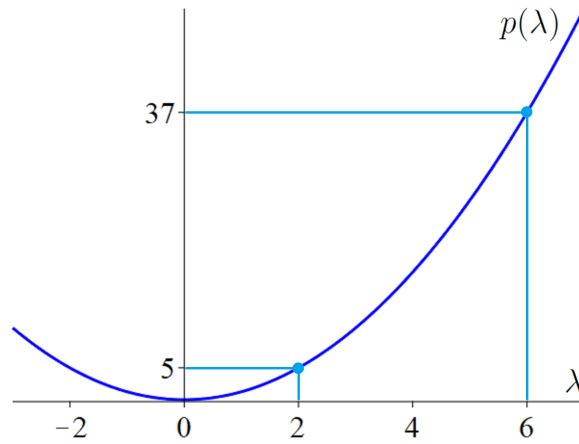


Figura 3: Grafico di $p(\lambda) = 1 + \lambda^2$ (parabola).

Per concludere la localizzazione degli autovalori $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)$ di $p(A)$, resta da capire com'è fatto l'insieme $p((2, 6))$. Dato che $p(\lambda) = 1 + \lambda^2$ è una funzione crescente su $(2, 6)$, si ha

$$p((2, 6)) = (p(2), p(6)) = (1 + 2^2, 1 + 6^2) = (5, 37);$$

si veda anche la Figura 3. In conclusione, otteniamo la localizzazione

$$p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n) \in (5, 37).$$

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$ è un numero reale positivo fissato.

- Stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- Consideriamo il caso $\alpha = \frac{1}{2}$. Quale dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per risolvere un sistema lineare di matrice A converge più velocemente?

Soluzione.

- Per trovare i valori di α richiesti, calcoliamo il raggio spettrale $\rho(J)$, dove J è la matrice d'iterazione del metodo di Jacobi applicato a un sistema lineare di matrice A , e determiniamo i valori di α per i quali $\rho(J) < 1$. Sia

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la parte diagonale di A . In base a un'osservazione "famosa", gli autovalori di $J = D^{-1}(D - A)$ sono le soluzioni dell'equazione $\det(\lambda D + A - D) = 0$. Si ha

$$\det(\lambda D + A - D) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -2\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \alpha(4\lambda) - \lambda(-4\lambda^2 - 1) = \lambda(4\lambda^2 + 1 + 4\alpha),$$

per cui gli autovalori di J sono 0 e le due radici quadrate di $-\frac{1+4\alpha}{4}$ (che è un numero negativo in quanto $\alpha > 0$). Dunque gli autovalori di J sono $0, \pm i\sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}$ e

$$\rho(J) = \max\left(|0|, \left|i\sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}\right|, \left|-i\sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}\right|\right) = \max\left(0, \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}, \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}\right) = \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}}.$$

Il metodo di Jacobi è dunque convergente se e solo se

$$\rho(J) < 1 \iff \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}} < 1 \iff \frac{1+4\alpha}{4} < 1 \iff 1+4\alpha < 4 \iff \alpha < \frac{3}{4}.$$

- (b) Per trovare i valori di α richiesti, procediamo esattamente come nel punto (a): calcoliamo il raggio spettrale $\rho(G)$, dove G è la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A , e determiniamo i valori di α per i quali $\rho(G) < 1$. Sia

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la parte triangolare inferiore di A . In base a un'osservazione "famosa", gli autovalori di $G = E^{-1}(E - A)$ sono le soluzioni dell'equazione $\det(\lambda E + A - E) = 0$. Si ha

$$\det(\lambda E + A - E) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 2 \\ \lambda & -2\lambda & 0 \\ \alpha\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \alpha\lambda(4\lambda) - \lambda(-4\lambda^2 - \lambda) = \lambda^2(4\lambda + 1 + 4\alpha),$$

per cui gli autovalori di G sono $0, 0, -\frac{1+4\alpha}{4}$. Dunque,

$$\rho(G) = \max\left(|0|, |0|, \left|-\frac{1+4\alpha}{4}\right|\right) = \frac{1+4\alpha}{4}.$$

Il metodo di Gauss-Seidel è dunque convergente se e solo se

$$\rho(G) < 1 \iff \frac{1+4\alpha}{4} < 1 \iff 1+4\alpha < 4 \iff \alpha < \frac{3}{4}.$$

- (c) Per $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha

$$\rho(J) = \sqrt{\frac{1+4\alpha}{4}} \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.8660254\dots,$$

$$\rho(G) = \frac{1+4\alpha}{4} \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} = 0.75,$$

dunque $\rho(G) = \rho(J)^2 < \rho(J)$ e Gauss-Seidel converge più velocemente di Jacobi.

Osservazione. La relazione $\rho(G) = \rho(J)^2$ vale per tutti gli $\alpha > 0$ e non solo per $\alpha = \frac{1}{2}$. Nel caso in cui $0 < \alpha < \frac{3}{4}$, si ha $\rho(J) < 1$ e $\rho(G) < 1$ (perché sia Jacobi che Gauss-Seidel convergono), e dunque si ha anche $\rho(G) = \rho(J)^2 < \rho(J)$: Gauss-Seidel converge più velocemente di Jacobi sempre, qualunque sia il valore di $\alpha \in (0, \frac{3}{4})$.

Esercizio 1. Sia $f(x) = 6 \log_2(1+x)$.

- Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
- Fornire una stima dell'errore d'interpolazione $|f(x) - p(x)|$ per ogni $x \in [0, 3]$, cioè determinare una costante C tale che $|f(x) - p(x)| \leq C$ per ogni $x \in [0, 3]$.¹
- Sia $I = \int_0^3 f(x) dx = 22.031489263998\dots$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I . Calcolare I_4 e I_8 mostrando fino alla settima cifra decimale.
- Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione dei dati (h_4^2, I_4) e (h_8^2, I_8) , dove $h_4 = \frac{3}{4}$ e $h_8 = \frac{3}{8}$ sono i passi di discretizzazione relativi alle formule I_4 e I_8 , rispettivamente. Calcolare $p(0)$ mostrando fino alla settima cifra decimale. Quale fra I_4 , I_8 , $p(0)$ fornisce l'approssimazione migliore di I ?
- Posto $\varepsilon = |p(0) - I|$, determinare un n in modo tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I_n - I| \leq \varepsilon$.

Soluzione.

- Iniziamo dalla forma di Lagrange di $p(x)$. Notiamo che

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 6 \log_2(1) = 0, \\ f(x_1) &= 6 \log_2(2) = 6, \\ f(x_2) &= 6 \log_2(4) = 12. \end{aligned}$$

Dunque la forma di Lagrange di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= 6 \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} + 12 \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = 6 \frac{x(x-3)}{-2} + 12 \frac{x(x-1)}{6}. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Lagrange, portiamo il polinomio in forma canonica:

$$p(x) = 6 \frac{x(x-3)}{-2} + 12 \frac{x(x-1)}{6} = -3(x^2 - 3x) + 2(x^2 - x) = -x^2 + 7x. \quad (1)$$

Per determinare la forma di Newton di $p(x)$, calcoliamo le differenze divise della Tabella 1. Si ha

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\ f[x_1] &= f(x_1) = 6 \\ f[x_2] &= f(x_2) = 12 \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{6 - 0}{1 - 0} = 6 \\ f[x_0, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{12 - 0}{3 - 0} = 4 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 6}{3 - 1} = -1 \end{aligned}$$

¹ Può essere utile ricordare la formula del cambio di base

$$\log_2 y = \frac{\log y}{\log 2}, \quad y > 0,$$

dove “log” indica il logaritmo naturale o logaritmo in base e.

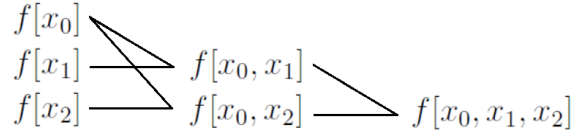


Tabella 1: Tabella delle differenze divise nel caso di tre nodi x_0, x_1, x_2 .

Dunque la forma di Newton di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + 6(x - 0) - (x - 0)(x - 1) \\ &= 6x - x(x - 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo nuovamente la forma canonica $p(x) = -x^2 + 7x$ già ottenuta in (1). Questa è una prova della correttezza dei calcoli effettuati.

Osservazione. Non occorre calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$. Infatti, dalla forma di Newton (2) risulta che $f[x_0, x_1, x_2]$ è il coefficiente di x^2 e quindi, per confronto con la forma canonica (1), si poteva immediatamente concludere che $f[x_0, x_1, x_2] = -1$ senza calcolarlo. Non essendo necessario calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$, potevamo risparmiarci il calcolo di tutte le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 1.

(b) In base al teorema sull'errore dell'interpolazione (che è applicabile perché la funzione $f(x) = 6 \log_2(1+x)$ è di classe $C^\infty[0, 3]$), per ogni $x \in [0, 3]$ si ha

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (x - 0)(x - 1)(x - 3) \right| \quad (\xi \text{ è un punto in } (0, 3)) \quad (3)$$

Calcoliamo la derivata terza di $f(x) = 6 \log_2(1+x) = 6 \frac{\log(1+x)}{\log 2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6}{\log 2} \frac{1}{1+x}, \\ f''(x) &= \frac{6}{\log 2} \frac{-1}{(1+x)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{6}{\log 2} \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{12}{\log 2 (1+x)^3}. \end{aligned}$$

Per ogni $x \in [0, 3]$ si ha

$$|f'''(x)| = \left| \frac{12}{\log 2 (1+x)^3} \right| = \frac{12}{\log 2} \frac{1}{(1+x)^3} \leq \frac{12}{\log 2} \frac{1}{1} = \frac{12}{\log 2}.$$

Tornando a (3), per ogni $x \in [0, 3]$ si ha

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{6} x(x-1)(x-3) \right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} |x| |x-1| |x-3| \leq \frac{12}{6 \log 2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \approx 51.937.$$

Volendo ottenere una stima più precisa, si può procedere nel modo seguente. In base a (3), per ogni $x \in [0, 3]$ si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= \left| \frac{f'''(\xi)}{6} x(x-1)(x-3) \right| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} |x(x-1)(x-3)| \\ &\leq \frac{12}{6 \log 2} \max_{y \in [0, 3]} \underbrace{|y(y-1)(y-3)|}_{\omega(y)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Andiamo a calcolare il massimo di $|\omega(y)|$ su $[0, 3]$. Per farlo, dobbiamo cercare tutti i massimi e i minimi relativi di $\omega(y)$ su $[0, 3]$ e scegliere il più grande di essi in modulo. Per un teorema dell'analisi matematica, i massimi e i minimi relativi di $\omega(y)$ si trovano o nei punti di bordo dell'intervallo $[0, 3]$ oppure nei punti stazionari di $\omega(y)$ in $[0, 3]$, cioè quei punti di $[0, 3]$ in cui si annulla la derivata $\omega'(y)$. Si ha

$$\begin{aligned}\omega(y) &= y(y-1)(y-3) = y(y^2 - 4y + 3) = y^3 - 4y^2 + 3y, \\ \omega'(y) &= 3y^2 - 8y + 3, \\ \omega'(y) = 0 &\iff y = y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-9}}{3} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}.\end{aligned}$$

Siccome $y_{1,2}$ stanno in $[0, 3]$, essi sono punti stazionari di $\omega(y)$ in $[0, 3]$. Dunque, per quanto detto sopra,

$$\max_{y \in [0,3]} |\omega(y)| = \max\left(|\omega(0)|, \left|\omega\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)\right|, \left|\omega\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)\right|, |\omega(3)|\right) = 2.11261\dots \leq 2.113.$$

Dunque, tornando a (4), otteniamo

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{2}{\log 2} 2.113 \approx 6.097.$$

(c) Per un n generico, la formula dei trapezi in questione I_n è data da

$$I_n = h \left[\frac{f(0) + f(3)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(jh) \right], \quad h = \frac{3}{n}.$$

L'esercizio chiede di calcolare I_4 e I_8 . Si ha

$$\begin{aligned}I_4 &= \frac{3}{4} \left[\frac{f(0) + f(3)}{2} + \sum_{j=1}^3 f\left(\frac{3j}{4}\right) \right] \\ &= \frac{3}{4} \left[\frac{0 + 12}{2} + 6 \log_2\left(\frac{7}{4}\right) + 6 \log_2\left(\frac{10}{4}\right) + 6 \log_2\left(\frac{13}{4}\right) \right] \\ &= 21.7337523\dots \\ I_8 &= \frac{3}{8} \left[\frac{f(0) + f(3)}{2} + \sum_{j=1}^7 f\left(\frac{3j}{8}\right) \right] \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{0 + 12}{2} + 6 \log_2\left(\frac{11}{8}\right) + 6 \log_2\left(\frac{14}{8}\right) + 6 \log_2\left(\frac{17}{8}\right) + 6 \log_2\left(\frac{20}{8}\right) \right. \\ &\quad \left. + 6 \log_2\left(\frac{23}{8}\right) + 6 \log_2\left(\frac{26}{8}\right) + 6 \log_2\left(\frac{29}{8}\right) \right] \\ &= 21.9558603\dots\end{aligned}$$

(d) Il polinomio d'interpolazione dei dati (h_4^2, I_4) e (h_8^2, I_8) è dato in forma di Lagrange da

$$p(x) = I_4 \frac{x - h_8^2}{h_4^2 - h_8^2} + I_8 \frac{x - h_4^2}{h_8^2 - h_4^2} = I_4 \frac{x - h_8^2}{3h_8^2} + I_8 \frac{x - 4h_8^2}{-3h_8^2},$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $h_4 = 2h_8$. Dunque,

$$p(0) = I_4 \frac{0 - h_8^2}{3h_8^2} + I_8 \frac{0 - 4h_8^2}{-3h_8^2} = -\frac{1}{3} I_4 + \frac{4}{3} I_8 = 22.0298963\dots$$

Confrontando I_4 , I_8 , $p(0)$ con il valore esatto I , si nota che $p(0)$ è un'approssimazione migliore di I rispetto a I_4 e I_8 . Infatti,

$$\begin{aligned} |I_4 - I| &= 0.29773\dots, \\ |I_8 - I| &= 0.07562\dots, \\ |p(0) - I| &= 0.00159\dots \end{aligned}$$

(e) Sia $\varepsilon = |p(0) - I| = 0.00159\dots$. In base al teorema sull'errore della formula dei trapezi (che è applicabile perché la funzione $f(x) = 6 \log_2(1+x)$ è $C^\infty[0, 3]$), per ogni n si ha

$$\begin{aligned} |I - I_n| &= \left| -\frac{3 \cdot f''(\eta)}{12} \left(\frac{3}{n}\right)^2 \right| \quad (\eta \text{ è un punto in } [0, 3]) \\ &= \frac{9|f''(\eta)|}{4n^2} = \frac{9}{4n^2} \left| \frac{6}{\log 2} \frac{-1}{(1+\eta)^2} \right| \leq \frac{9}{4n^2} \frac{6}{\log 2} \frac{1}{1} = \frac{C}{n^2} \quad \left(C = \frac{27}{2 \log 2}\right) \end{aligned}$$

Imponiamo

$$\frac{C}{n^2} \leq \varepsilon \quad \iff \quad n \geq \sqrt{\frac{C}{\varepsilon}}.$$

Dunque, se prendiamo $n \geq \sqrt{C/\varepsilon}$ siamo sicuri che $|I - I_n| \leq \varepsilon$. Nel nostro caso in cui $\varepsilon = |p(0) - I| = 0.00159\dots$, dovremo prendere $n \geq \sqrt{C/\varepsilon} \approx 110.7$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 14 \end{bmatrix}.$$

- Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- Dimostrare che gli autovalori di A sono reali e positivi.
- Dimostrare che $12 < \rho(A) < 16$.
- Motivando la risposta, dire quanto vale il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{16^k}.$$

Soluzione.

- Per localizzare gli autovalori di A nel modo più preciso possibile, usiamo i teoremi di Gershgorin considerando sia i cerchi per riga K_1, K_2, K_3 che i cerchi per colonna H_1, H_2, H_3 . Indicando con $\mathcal{C}(z_0, r)$ il cerchio nel piano complesso di centro z_0 e raggio r , si ha

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathcal{C}(1, 3), & H_1 &= \mathcal{C}(1, 1), \\ K_2 &= \mathcal{C}(5, 3), & H_2 &= \mathcal{C}(5, 2), \\ K_3 &= \mathcal{C}(14, 2), & H_3 &= \mathcal{C}(14, 5). \end{aligned}$$

In base al primo teorema di Gershgorin, gli autovalori di A si trovano in

$$(K_1 \cup K_2 \cup K_3) \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3) = H_1 \cup H_2 \cup K_3;$$

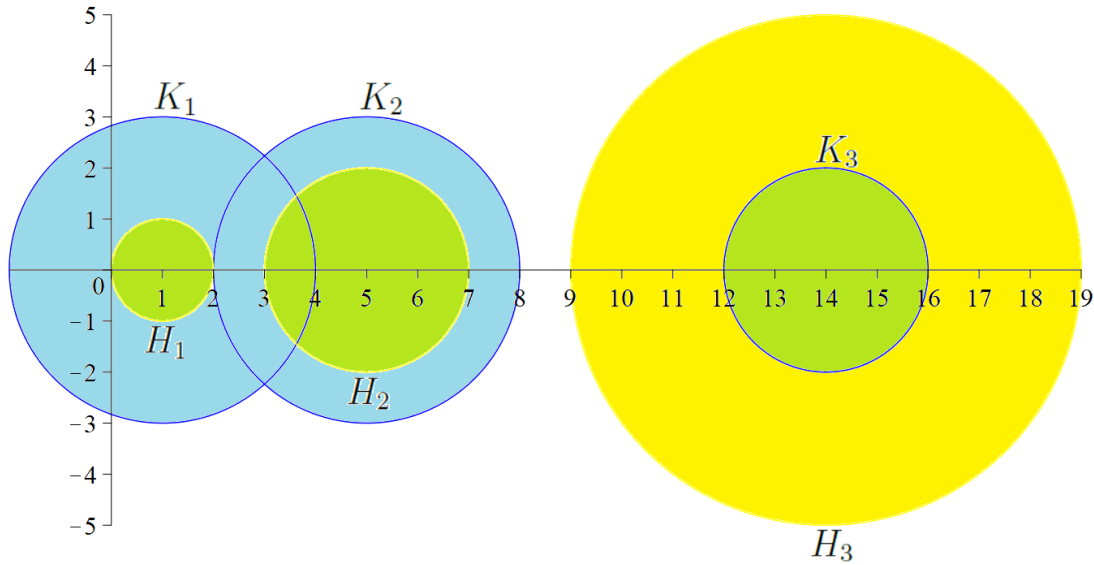


Figura 1: Cerchi di Gershgorin per riga K_1, K_2, K_3 (in blu) e per colonna H_1, H_2, H_3 (in giallo) della matrice A dell'Esercizio 2. L'intersezione $(K_1 \cup K_2 \cup K_3) \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3) = H_1 \cup H_2 \cup K_3$ è evidenziata in verde.

si veda la Figura 1.

In base al secondo teorema di Gershgorin applicato ai cerchi per riga, due autovalori di A stanno in $K_1 \cup K_2$ e uno sta in K_3 . In base al secondo teorema di Gershgorin applicato ai cerchi per colonna, un autovalore di A sta in H_1 , uno sta in H_2 e uno sta in H_3 . Mettendo assieme le informazioni, concludiamo che un autovalore di A sta in H_1 , uno sta in H_2 e uno sta in K_3 .

Osserviamo ora che la matrice A è irriducibile (il suo grafo contiene il ciclo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ che tocca tutti i nodi). Possiamo dunque applicare il terzo teorema di Gershgorin (debole). Applicandolo prima ai cerchi per riga, concludiamo che nessun punto del bordo di $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo di $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi K_1, K_2, K_3 . Applicandolo ai cerchi per colonna, concludiamo che nessun punto del bordo di $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo di $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi H_1, H_2, H_3 . Mettendo assieme le informazioni, concludiamo che nessun punto del bordo dell'insieme $H_1 \cup H_2 \cup K_3$ evidenziato in verde in Figura 1 può essere un autovalore di A .

Mostriamo ora che l'autovalore λ che sta in H_1 privato del bordo è reale (e dunque sta nell'intervallo aperto $(0, 2)$). Se λ non fosse reale, allora il suo complesso coniugato $\bar{\lambda} \neq \lambda$ sarebbe un altro autovalore di A che sta in H_1 . Questo perché il polinomio caratteristico di A è a coefficienti reali (essendo A a coefficienti reali) e dunque le sue radici compaiono in coppie complesse coniugate. Siccome abbiamo già detto che H_1 contiene un solo autovalore di A , λ dev'essere per forza reale. Lo stesso discorso vale anche per l'autovalore che sta in H_2 (privato del bordo) e per l'autovalore che sta in K_3 (privato del bordo).

Conclusione: un autovalore di A si trova nell'intervallo $(0, 2)$, un autovalore di A si trova nell'intervallo $(3, 7)$, e un autovalore di A si trova nell'intervallo $(12, 16)$.

- (b) Già dimostrato risolvendo il punto (a).
- (c) In base al punto (a), $\rho(A)$ coincide con l'autovalore massimo di A , cioè l'autovalore λ_3 che si trova in $(12, 16)$. Dunque $12 < \rho(A) < 16$.
- (d) In base a un teorema noto, indicando con O la matrice nulla, per ogni matrice quadrata B si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = O \iff \rho(B) < 1.$$

La matrice $B = A/16$ è un polinomio di A , precisamente $B = p(A)$ con $p(\lambda) = \lambda/16$. Pertanto, in base a un altro teorema noto, gli autovalori di B sono $\lambda_1/16, \lambda_2/16, \lambda_3/16$, dove $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ sono gli autovalori di A . Siccome $\lambda_3 = \rho(A) < 16$, risulta $\rho(B) = \lambda_3/16 = \rho(A)/16 < 1$ e dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{16^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{16} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} B^k = O.$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$ è un numero reale positivo fissato.

(a) Stabilire per quali valori di α il metodo iterativo associato alla decomposizione

$$A = M - (M - A), \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

risulta convergente quando applicato al sistema dato.

(b) Nel caso $\alpha = \frac{1}{10}$, calcolare le prime 4 iterazioni $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}, \mathbf{x}^{(4)}$ del metodo iterativo al punto (a) partendo dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ e confrontarle con la soluzione esatta \mathbf{x} del sistema dato, calcolando in particolare $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_\infty$ per $k = 1, 2, 3, 4$.

Soluzione.

(a) Osserviamo innanzitutto che la matrice M è invertibile in quanto $\det(M) = 5 \neq 0$. Risulta quindi ben definito il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ e la sua matrice d'iterazione è data da

$$\begin{aligned} P = M^{-1}(M - A) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right| & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{M^{-1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per stabilire per quali valori di α il metodo è convergente, calcoliamo il raggio spettrale di P e stabiliamo per quali valori di α risulta $\rho(P) < 1$. Il polinomio caratteristico di P è

$$C_P(\lambda) = \det(\lambda I - P) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \lambda & \frac{2}{5} \\ -\alpha & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \frac{4}{5}\alpha\lambda = \lambda\left(\lambda^2 + \frac{4}{5}\alpha\right).$$

Gli autovalori di P sono quindi $0, \pm i\sqrt{\frac{4\alpha}{5}}$, per cui $\rho(P) = \left|i\sqrt{\frac{4\alpha}{5}}\right| = \sqrt{\frac{4\alpha}{5}}$. Si ha

$$\rho(P) < 1 \iff \sqrt{\frac{4\alpha}{5}} < 1 \iff \frac{4\alpha}{5} < 1 \iff \alpha < \frac{5}{4}.$$

Il metodo è dunque convergente per $\alpha < \frac{5}{4}$ e non convergente per $\alpha \geq \frac{5}{4}$.

(b) Fissiamo $\alpha = \frac{1}{10}$. La soluzione esatta \mathbf{x} del sistema possiamo calcolarla con il metodo di Gauss:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} &\iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ \frac{1}{10}x_1 - x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 10x_3 = 10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 - 10x_3 = 9 \end{cases} \quad (R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1) \\ &\iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 5x_2 + 2x_3 = -1 \\ -\frac{54}{5}x_3 = \frac{47}{5} \end{cases} \quad (R_3 \rightarrow R_3 - \frac{2}{5}R_2) \\ &\iff \begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 = \frac{35}{27} \\ x_2 = \frac{-1 - 2x_3}{5} = \frac{4}{27} \\ x_3 = -\frac{47}{54} \end{cases} \iff \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{35}{27} \\ \frac{4}{27} \\ -\frac{47}{54} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo le prime 4 iterazioni del metodo iterativo al punto (a). L'equazione del metodo è la seguente:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + M^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Le prime 4 iterazioni partendo da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{47}{50} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{47}{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{169}{125} \\ \frac{22}{125} \\ -\frac{43}{50} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(4)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{169}{125} \\ \frac{22}{125} \\ -\frac{43}{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{161}{125} \\ \frac{18}{125} \\ -\frac{1081}{1250} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le norme ∞ delle loro distanze da \mathbf{x} sono

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}\|_{\infty} &= 0.69629\dots, \\ \|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}\|_{\infty} &= 0.10370\dots, \\ \|\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}\|_{\infty} &= 0.05570\dots, \\ \|\mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}\|_{\infty} &= 0.00829\dots \end{aligned}$$

Si nota come $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_{\infty}$ decresce al crescere di k , indice del fatto che $\mathbf{x}^{(k)}$ converge a \mathbf{x} per $k \rightarrow \infty$.

Esercizio 1. Sia $f(x) = -\alpha x \cos(\pi x)$ dove $\alpha > 0$ è un numero fissato.

- Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.
- Supponiamo di aggiungere il nodo $x_3 = \frac{3}{2}$. Scrivere nella forma che si ritiene più opportuna il polinomio d'interpolazione $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3 .
- Calcolare $p(-1)$ e $q(-1)$. Dire quali sono i valori di α per i quali $q(-1)$ fornisce un'approssimazione di $f(-1)$ migliore di $p(-1)$ e quali sono i valori di α per i quali $p(-1)$ fornisce un'approssimazione di $f(-1)$ migliore di $q(-1)$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \frac{1}{x+1}$ e sia $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Calcolare gli integrali I e $\tilde{I} = \int_0^1 p(x)dx$, e l'errore $|\tilde{I} - I|$.
- Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I . Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$.
- Posto $\varepsilon = |\tilde{I} - I|$, determinare un \hat{n} tale che $|I_{\hat{n}} - I| \leq \varepsilon$. Calcolare successivamente $I_{\hat{n}}$ e verificare che effettivamente risulta $|I_{\hat{n}} - I| \leq \varepsilon$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- Dimostrare che A è invertibile e che $1 < \rho(A) < 6$.
- Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti oppure no.
- Sia G la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel. Calcolare il raggio spettrale $\rho(G)$ e il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (2^k G^k + G^k).$$

Esercizio 1. Sia $f(x) = 9\alpha x^2 \cos(\frac{3\pi}{2}x)$ dove $\alpha > 0$ è un numero fissato.

- (a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$.
 (b) Determinare un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ che soddisfa le seguenti quattro condizioni:

$$q(0) = f(0), \quad q'(0) = f'(0), \quad q(1) = f(1), \quad q'(1) = f'(1).$$

Il polinomio $q(x)$ è unico?

- (c) Calcolare $p(\frac{1}{2})$ e $q(\frac{1}{2})$. Dire quali sono i valori di α per i quali $q(\frac{1}{2})$ fornisce un'approssimazione di $f(\frac{1}{2})$ migliore di $p(\frac{1}{2})$ e quali sono i valori di α per i quali $p(\frac{1}{2})$ fornisce un'approssimazione di $f(\frac{1}{2})$ migliore di $q(\frac{1}{2})$.
 (d) Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^1 f(x)dx$. Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix}.$$

- (a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A . Gli autovalori di A sono tutti reali?
 (b) Dimostrare che A è invertibile, che $11 \leq \rho(A) \leq 13$, e che $\min\{|\lambda| : \lambda \text{ è un autovalore di } A\} \geq 1$.
 (c) Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti oppure no.
 (d) Sia G la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel. Calcolare gli autovalori di $I + 2G - 3G^3 + G^8$, dove I è la matrice identità 4×4 .

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 1 \\ -\alpha & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$. Poiché $\det(A) = 3 + 2\alpha^2$, la matrice A è invertibile per ogni $\alpha > 0$.

- (a) Sia

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verificare che M è invertibile e stabilire per quali valori di α il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ per risolvere un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

- (b) Calcolare $\|P\|_1$ e $\|P\|_\infty$, dove P è la matrice d'iterazione associata al metodo iterativo del punto (a).

Esercizio 1. Sia $f(x) = (9x^2 - 9x + 2) \log(1 + x)$.

- Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$.
- Stimare l'errore d'interpolazione $|f(x) - p(x)|$ per $x \in [0, 1]$ determinando una costante C tale che $|f(x) - p(x)| \leq C$ per ogni $x \in [0, 1]$.
- Consideriamo l'integrale

$$\int_0^1 f(x) dx = 10 \log(2) - \frac{27}{4} = 0.181471805599\dots$$

Poiché il polinomio d'interpolazione $p(x)$ è un'approssimazione di $f(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$, possiamo aspettarci che $\int_0^1 p(x) dx \approx \int_0^1 f(x) dx$. Calcolare $\tilde{I} = \int_0^1 p(x) dx$ e confrontarlo con $I = \int_0^1 f(x) dx$ determinando l'errore $\delta = |\tilde{I} - I|$.

- Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I . Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Determinare successivamente un intero \bar{n} tale che $|I_{\bar{n}} - I| \leq \delta$, dove δ è l'errore al punto (c).

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A . La matrice A possiede autovalori reali?
- Dimostrare che A è invertibile e che $8 < \rho(A) < 10$.
- Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti oppure no.
- Sia J la matrice d'iterazione del metodo di Jacobi e siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ gli autovalori di J . Dimostrare che per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + |\lambda_i|^n + \frac{1}{n})}{|\lambda_i|^n + \frac{1}{n}} = 1.$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$. Poiché $\det(A) = \alpha + 4$, la matrice A è invertibile per ogni $\alpha > 0$.

- Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- Consideriamo il metodo di Gauss-Seidel modificato, cioè il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ con M data dalla parte triangolare superiore di A (inclusa la diagonale). Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel modificato applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- Per ciascun valore di α per cui sia il metodo di Gauss-Seidel che il metodo di Gauss-Seidel modificato convergono, stabilire quale dei due converge più velocemente.

Esercizio 1. Sia $f(x) = \frac{2\sqrt{x-1}}{x+1}$.

- (a) Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 1$.
- (b) Sia

$$I = \int_1^2 f(x)dx = 0.5717153224\dots$$

e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I . Calcolare I_4 e I_8 mostrando fino alla settima cifra decimale.

- (c) Applicare la procedura di estrapolazione usando le formule dei trapezi I_4 e I_8 per calcolare il valore estrapolato E . Stabilire quale fra I_4 , I_8 , E fornisce l'approssimazione migliore di I .
- (d) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = |E - I|$?

Esercizio 2. Sia $n \geq 3$ e si consideri la matrice $n \times n$ data da

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(è sottointeso che le componenti non scritte della matrice sono uguali a 0).

- (a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- (b) Dimostrare che gli autovalori di A sono reali e positivi e che $\rho(A) < 4$. La matrice A è definita positiva?
- (c) Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti oppure no.
- (d) Dimostrare che esiste almeno un autovalore di A nell'intervallo $[2, 4)$ e che $2 \leq \rho(A) < 4$.
Suggerimento. Considerare la traccia(A).

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha > 0$. Poiché $\det(A) = 2 + \alpha$, la matrice A è invertibile per ogni $\alpha > 0$.

- (a) Calcolare $\rho(J)$ e $\rho(G)$, dove J e G sono le matrici d'iterazione dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per risolvere un sistema lineare di matrice A .
- (b) Stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi converge e per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel converge. Per i valori di α per cui entrambi convergono, dire quale dei due converge più velocemente.
- (c) Calcolare $\|A^{-1}\|_\infty$.

Calcolo Numerico

Esame del 23/01/2023

Esercizio 1. Sia $f(x) = 8x4^{-x}$ e siano $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

- (a) Supponiamo di voler approssimare la funzione $f(x)$ sull'intervallo $[0, 2]$ mediante una funzione $g(x)$ ottenuta “incollando” insieme due polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$, dove $p_1(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2 mentre $p_2(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_2, x_3 . Il risultato di questa “incollatura” è

$$g(x) = \begin{cases} p_1(x), & x \in [0, 1], \\ p_2(x), & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Determinare $g(x)$ scrivendo in forma canonica $p_1(x)$ e $p_2(x)$.

- (b) Stimare l'errore $|f(x) - g(x)|$ per $x \in [0, 1]$ determinando una costante C tale che $|f(x) - g(x)| \leq C$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Suggerimento. $4^{-x} = e^{-x \log 4}$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = e^{-x^2}$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $\int_0^a f(x)dx$, dove $a > 0$ è un parametro fissato.

- (a) Calcolare I_2 .
 (b) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $a = 1$?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
 (b) Possiamo affermare che la matrice A possiede almeno un autovalore reale? Motivare la risposta.
 (c) Determinare un numero $a > 0$ tale che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(A)^n}{x^n}$$

converge per ogni $x \geq a$. Calcolare inoltre la somma di tale serie per ogni $x \geq a$.

Suggerimento. La serie geometrica di ragione q data da $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge se e solo se $|q| < 1$, e in tal caso la sua somma è data dalla formula $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Stabilire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati a un sistema lineare di matrice A sono convergenti.
 (b) Sia $\omega > 0$ e sia

$$M = \begin{bmatrix} 2/\omega & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ per risolvere un sistema lineare di matrice A . Si scriva la matrice d'iterazione P di questo metodo e si calcoli il raggio spettrale $\rho(P)$.

- (c) Stabilire per quali valori di $\omega \in (0, \infty)$ il metodo menzionato al punto (b) risulta convergente.
- (d) Determinare il valore ω_* di $\omega \in (0, \infty)$ che minimizza il raggio spettrale $\rho(P)$. Quanto vale il raggio spettrale minimo? Qual è il valore di $\omega \in (0, \infty)$ per il quale il metodo menzionato al punto (b) converge più velocemente?
- (e) Sia $\mathbf{b} = [1, 1]^T$. Partendo da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ e scegliendo $\omega = \omega_*$, calcolare le prime 2 iterazioni del metodo menzionato al punto (b) per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e confrontarle con la soluzione esatta \mathbf{x} . Che cosa si nota?

Esercizio 1. Un'approssimazione di $\sqrt{5}$ può essere ottenuta calcolando $p(5)$, dove $p(x)$ è un opportuno polinomio d'interpolazione di \sqrt{x} .

- Stimare l'errore $|\sqrt{5} - p(5)|$ che si commette approssimando $\sqrt{5}$ con $p(5)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di \sqrt{x} sui nodi $(2.1)^2$, $(2.15)^2$, $(2.2)^2$, $(2.25)^2$, $(2.3)^2$, $(2.35)^2$, $(2.4)^2$.
- Spiegare perché $p(5)$ è un numero razionale e perché il calcolo di $p(5)$ può essere fatto solo attraverso operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione di numeri razionali (quindi senza estrazioni di radice).

Esercizio 2. Sia $f(x) = (\cos x)^\alpha$, dove $\alpha > 2$ è un parametro assegnato, e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^{\pi/3} f(x)dx$.

- Calcolare I_3 .
- Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$?

Esercizio 3. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2[a, b]$, sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_a^b f(x)dx$, e sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi tale che $a_n \rightarrow +\infty$. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 |I_n - I|}{a_n} = 0.$$

Suggerimento. Usare il teorema sull'errore della formula dei trapezi.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & i & 7 \end{bmatrix}.$$

- Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
- Possiamo affermare che la matrice A possiede almeno un autovalore reale? Motivare la risposta.
- Determinare un numero $R > 0$ tale che la successione di matrici $x^k A^k$ converge alla matrice nulla per ogni $x \in \mathbb{C}$ tale che $|x| < R$.

Esercizio 5. Sia $\alpha > 0$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 + \alpha \\ \alpha & 3 \end{bmatrix}.$$

- Stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi risulta convergente quando applicato a un sistema lineare di matrice A .
- Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente quando applicato a un sistema lineare di matrice A .

Esercizio 1. Sia $f(x) = x(2\alpha - x^2)$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $\beta \in [2, 3]$.

- Scrivere in forma canonica, in forma di Lagrange e in forma di Newton il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \beta$.
- Determinare per quale valore di $\beta \in [2, 3]$ la pendenza del polinomio $p(x)$ approssima meglio la pendenza della funzione $f(x)$ in $x = 0$, nel senso che l'errore $|p'(0) - f'(0)|$ risulta minimo.
- Supponiamo di aggiungere un nuovo nodo x_3 diverso da x_0, x_1, x_2 . Dimostrare che il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3 coincide con la funzione $f(x)$ stessa.

Soluzione.

(a) Iniziamo dalla forma di Lagrange di $p(x)$. Notiamo che

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0(2\alpha - 0^2) = 0, \\ f(x_1) &= 1(2\alpha - 1^2) = 2\alpha - 1, \\ f(x_2) &= \beta(2\alpha - \beta^2). \end{aligned}$$

Dunque la forma di Lagrange di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= (2\alpha - 1) \frac{(x - 0)(x - \beta)}{(1 - 0)(1 - \beta)} + \beta(2\alpha - \beta^2) \frac{(x - 0)(x - 1)}{(\beta - 0)(\beta - 1)} \\ &= (2\alpha - 1) \frac{x(x - \beta)}{1 - \beta} + \beta(2\alpha - \beta^2) \frac{x(x - 1)}{\beta(\beta - 1)}. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Lagrange, portiamo il polinomio in forma canonica:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2\alpha - 1) \frac{x(x - \beta)}{1 - \beta} + \beta(2\alpha - \beta^2) \frac{x(x - 1)}{\beta(\beta - 1)} = \frac{1 - 2\alpha}{\beta - 1} (x^2 - \beta x) + \frac{2\alpha - \beta^2}{\beta - 1} (x^2 - x) \\ &= \frac{1 - \beta^2}{\beta - 1} x^2 + \frac{-\beta + 2\alpha\beta - 2\alpha + \beta^2}{\beta - 1} x = \frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{\beta - 1} x^2 + \frac{2\alpha(\beta - 1) + \beta(\beta - 1)}{\beta - 1} x \\ &= -(1 + \beta)x^2 + (2\alpha + \beta)x. \end{aligned} \tag{1}$$

Per determinare la forma di Newton di $p(x)$, calcoliamo le differenze divise della Tabella 1. Si ha

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\ f[x_1] &= f(x_1) = 2\alpha - 1 \\ f[x_2] &= f(x_2) = \beta(2\alpha - \beta^2) \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2\alpha - 1 - 0}{1 - 0} = 2\alpha - 1 \\ f[x_0, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\beta(2\alpha - \beta^2) - 0}{\beta - 0} = 2\alpha - \beta^2 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{2\alpha - \beta^2 - 2\alpha + 1}{\beta - 1} = \frac{1 - \beta^2}{\beta - 1} = \frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{\beta - 1} = -(1 + \beta) \end{aligned}$$

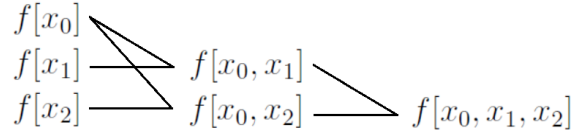


Tabella 1: Tabella delle differenze divise nel caso di tre nodi x_0, x_1, x_2 .

Dunque la forma di Newton di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned}
 p(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
 &= 0 + (2\alpha - 1)(x - 0) - (1 + \beta)(x - 0)(x - 1) \\
 &= (2\alpha - 1)x - (1 + \beta)x(x - 1).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo nuovamente la forma canonica $p(x) = -(1 + \beta)x^2 + (2\alpha + \beta)x$ già ottenuta in (1). Questa è una prova della correttezza dei calcoli effettuati.

Osservazione. Non occorre calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$. Infatti, dalla forma di Newton (2) risulta che $f[x_0, x_1, x_2]$ è il coefficiente di x^2 e quindi, per confronto con la forma canonica (1), si poteva immediatamente concludere che $f[x_0, x_1, x_2] = -(1 + \beta)$ senza calcolarlo. Non essendo necessario calcolare $f[x_0, x_1, x_2]$, potevamo risparmiarci il calcolo di tutte le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 1.

- (b) Osserviamo che le derivate di $p(x) = -(1 + \beta)x^2 + (2\alpha + \beta)x$ e di $f(x) = x(2\alpha - x^2) = 2\alpha x - x^3$ sono date da

$$\begin{aligned}
 p'(x) &= -2(1 + \beta)x + 2\alpha + \beta, \\
 f'(x) &= 2\alpha - 3x^2,
 \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
 p'(0) &= 2\alpha + \beta, \\
 f'(0) &= 2\alpha, \\
 |p'(0) - f'(0)| &= |2\alpha + \beta - 2\alpha| = |\beta| = \beta,
 \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tolto il modulo perché $\beta \in [2, 3]$ è positivo. Dunque, il valore di $\beta \in [2, 3]$ che minimizza l'errore $|p'(0) - f'(0)|$ è $\beta = 2$.

- (c) Sia $q(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3 . Dobbiamo dimostrare che $q(x)$ coincide con $f(x)$. Per il teorema di esistenza e unicità del polinomio d'interpolazione, $q(x)$ è l'unico polinomio in $\mathbb{R}_3[x]$ che soddisfa la condizione $q(x_i) = f(x_i)$ per ogni $i = 0, 1, 2, 3$. D'altra parte, la funzione $f(x)$ è essa stessa un polinomio in $\mathbb{R}_3[x]$ che soddisfa (ovviamente) la condizione $f(x_i) = f(x_i)$ per ogni $i = 0, 1, 2, 3$. Pertanto, per l'unicità del polinomio d'interpolazione, $q(x)$ deve coincidere con $f(x)$.

Osservazione. Un altro modo per dimostrare che $q(x)$ coincide con $f(x)$ è quello di scrivere esplicitamente $q(x)$ e verificare che coincide con $f(x)$. Per scrivere esplicitamente $q(x)$, si può utilizzare ad esempio la forma di Newton, che è la forma più conveniente per l'aggiunta di un nodo. Lasciamo al lettore il compito di scrivere esplicitamente $q(x)$ e verificare che effettivamente coincide con $f(x)$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = (\log x)^\alpha$, dove $\alpha > 2$ è un parametro assegnato, e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_1^2 f(x)dx$.

- (a) Calcolare I_3 .

(b) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$?

Soluzione.

(a) Per un n generico, la formula dei trapezi I_n è data da

$$I_n = h \left[\frac{f(1) + f(2)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(1 + jh) \right], \quad h = \frac{1}{n}.$$

Per $n = 3$, si ha

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3} \left[\frac{f(1) + f(2)}{2} + \sum_{j=1}^2 f\left(1 + \frac{j}{3}\right) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{(\log 1)^\alpha + (\log 2)^\alpha}{2} + \left(\log \frac{4}{3}\right)^\alpha + \left(\log \frac{5}{3}\right)^\alpha \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{(\log 2)^\alpha}{2} + \left(\log \frac{4}{3}\right)^\alpha + \left(\log \frac{5}{3}\right)^\alpha \right]. \end{aligned}$$

(b) Osserviamo che

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(\log x)^{\alpha-1} \frac{1}{x} = \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-1}}{x}, \\ f''(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\log x)^{\alpha-2} \frac{1}{x} \cdot x - \alpha(\log x)^{\alpha-1} \cdot 1}{x^2} = \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-2}(\alpha-1-\log x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Siccome $\alpha > 2$, l'esponente $\alpha - 2$ è positivo e la funzione $f''(x)$ è continua sull'intervallo $[1, 2]$, per cui $f \in C^2[1, 2]$. Possiamo dunque applicare il teorema sull'errore della formula dei trapezi: per ogni n si ha

$$|I - I_n| = \left| -\frac{(2-1)f''(\eta)}{12} \left(\frac{2-1}{n}\right)^2 \right| = \frac{|f''(\eta)|}{12n^2},$$

dove $\eta \in [1, 2]$. Per ogni $x \in [1, 2]$ si ha $\log x \geq 0$ e

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= \left| \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-2}(\alpha-1-\log x)}{x^2} \right| = \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-2}|\alpha-1-\log x|}{x^2} \leq \frac{\alpha(\log x)^{\alpha-2}(\alpha+1+\log x)}{x^2} \\ &\leq \frac{\alpha(\log 2)^{\alpha-2}(\alpha+1+\log 2)}{1^2} = C_\alpha, \quad C_\alpha = \alpha(\log 2)^{\alpha-2}(\alpha+1+\log 2). \end{aligned}$$

Dunque,

$$|I - I_n| = \frac{|f''(\eta)|}{12n^2} \leq \frac{C_\alpha}{12n^2}.$$

Poiché

$$\frac{C_\alpha}{12n^2} \leq \varepsilon \iff n \geq \sqrt{\frac{C_\alpha}{12\varepsilon}} = n_\alpha(\varepsilon),$$

concludiamo che $|I - I_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\alpha(\varepsilon)$. In particolare, se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 3$, si ha $n_\alpha(\varepsilon) = n_3(10^{-7}) = 2851.772\dots$, e dunque prenderemo $n = 2852$ per garantire che $|I - I_n| \leq 10^{-7}$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & i & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 7i \end{bmatrix}.$$

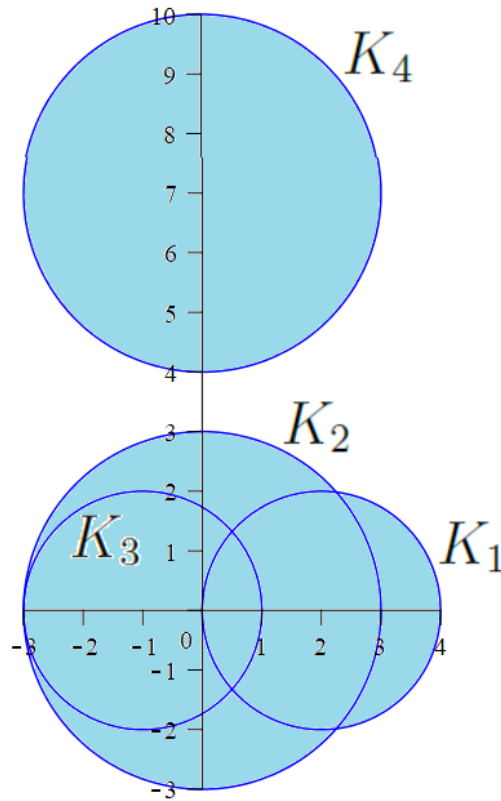


Figura 1: Cerchi di Gershgorin per riga K_1, K_2, K_3, K_4 della matrice A dell'Esercizio 3. L'unione $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ è evidenziata in azzurro.

- Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
- Possiamo affermare che la matrice A possiede almeno un autovalore reale? Motivare la risposta.
- Consideriamo la successione

$$a_n = \frac{\alpha^n}{\alpha^n + \rho(A)^n},$$

dove α è un numero positivo assegnato. Dimostrare che $a_n \rightarrow 0$ se $\alpha \leq 4$ e $a_n \rightarrow 1$ se $\alpha \geq 10$.

Soluzione.

- Per localizzare gli autovalori di A nel modo più preciso possibile, usiamo i teoremi di Gershgorin considerando sia i cerchi per riga K_1, K_2, K_3, K_4 che i cerchi per colonna H_1, H_2, H_3, H_4 . Indicando con $\mathcal{C}(z_0, r)$ il cerchio nel piano complesso di centro z_0 e raggio r , si ha

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathcal{C}(2, 2), & H_1 &= \mathcal{C}(2, 2), \\ K_2 &= \mathcal{C}(0, 3), & H_2 &= \mathcal{C}(0, 3), \\ K_3 &= \mathcal{C}(-1, 2), & H_3 &= \mathcal{C}(-1, 2), \\ K_4 &= \mathcal{C}(7i, 3), & H_4 &= \mathcal{C}(7i, 3). \end{aligned}$$

Notiamo che i cerchi per colonna coincidono con i cerchi per riga, quindi possiamo limitarci a considerare solo i cerchi per riga. In base al primo teorema di Gershgorin, gli autovalori di A si trovano in $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$; si veda la Figura 1.

In base al secondo teorema di Gershgorin, tre autovalori di A stanno in $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ e uno sta in K_4 .

Osserviamo ora che la matrice A è irriducibile (il suo grafo contiene il ciclo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ che tocca tutti i nodi). Possiamo dunque applicare il terzo teorema di Gershgorin (debole). Concludiamo così che nessun punto del bordo dell'unione $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo dell'unione $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi K_1, K_2, K_3, K_4 .

- (b) In base alla localizzazione degli autovalori ottenuta nel punto (a), l'autovalore λ_4 di A che sta in K_4 è quello di modulo massimo. Infatti, la sua distanza dall'origine, che è proprio il suo modulo $|\lambda_4|$, è sicuramente maggiore di 4 in quanto λ_4 sta fuori dal cerchio di centro l'origine e raggio 4: $|\lambda_4| > 4$. Invece, gli altri tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ di A stanno in $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ e dunque hanno distanza dall'origine minore di 4 in quanto stanno dentro il cerchio di centro 0 e raggio 4: $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| < 4$. In conclusione, $\rho(A) = |\lambda_4|$. Poiché λ_4 sta fuori dal cerchio di centro l'origine e raggio 4 (come già osservato) e sta dentro il cerchio di centro l'origine e raggio 10 (come risulta dalla Figura 1), si conclude che $4 < |\lambda_4| < 10$, cioè $4 < \rho(A) < 10$.

- (c) Sulla base delle informazioni spettrali ottenute, non possiamo affermare che A possiede almeno un autovalore reale.

Osservazione. Possiamo invece affermare che A possiede almeno un autovalore non reale. Infatti, l'autovalore λ_4 che sta in K_4 non sta sull'asse reale e dunque non è reale.

- (d) Per ogni n si ha

$$a_n = \frac{\alpha^n}{\alpha^n + \rho(A)^n} = \frac{\alpha^n}{\alpha^n [1 + (\rho(A)/\alpha)^n]} = \frac{1}{1 + (\rho(A)/\alpha)^n}.$$

Ricordiamo che $\alpha > 0$ per ipotesi e dunque anche $\rho(A)/\alpha > 0$. Ricordiamo inoltre che $4 < \rho(A) < 10$ per il punto (b). Pertanto, si ha quanto segue.

- Se $\alpha \leq 4$ allora $\rho(A)/\alpha > 1$, per cui $(\rho(A)/\alpha)^n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$ e dunque $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.
- Se $\alpha \geq 10$ allora $\rho(A)/\alpha < 1$, per cui $(\rho(A)/\alpha)^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e dunque $a_n \rightarrow 1$ per $n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{11/2\}$ di modo che $\det(A) = 22 - 4\alpha \neq 0$.

- (a) Stabilire per quali valori di α il metodo di Jacobi risulta convergente quando applicato a un sistema lineare di matrice A .
- (b) Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente quando applicato a un sistema lineare di matrice A .

Soluzione.

- (a) Per trovare i valori di α richiesti, calcoliamo il raggio spettrale $\rho(J)$, dove J è la matrice d'iterazione del metodo di Jacobi applicato a un sistema lineare di matrice A , e determiniamo i valori di α per i quali $\rho(J) < 1$. Sia

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

la parte diagonale di A . In base a un'osservazione "famosa", gli autovalori di $J = D^{-1}(D - A)$ sono le soluzioni dell'equazione $\det(\lambda D + A - D) = 0$. Si ha

$$\det(\lambda D + A - D) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ \alpha & 3\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(12\lambda^2 - 1) - 4\alpha\lambda = 2\lambda(12\lambda^2 - 1 - 2\alpha),$$

per cui gli autovalori di J sono 0 e le due radici quadrate di $\frac{2\alpha+1}{12}$. Dunque, gli autovalori di J sono

$$0, \pm\sqrt{\frac{2\alpha+1}{12}}, \quad \text{se } 2\alpha+1 > 0,$$

$$0, \pm i\sqrt{\frac{-(2\alpha+1)}{12}}, \quad \text{se } 2\alpha+1 < 0,$$

e si ha

$$\rho(J) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\alpha+1}{12}}, & \text{se } 2\alpha+1 > 0, \\ \sqrt{\frac{-(2\alpha+1)}{12}}, & \text{se } 2\alpha+1 < 0, \end{cases}$$

$$= \sqrt{\left|\frac{2\alpha+1}{12}\right|},$$

dove l'ultima uguaglianza vale in entrambi i casi, sia che $2\alpha+1 > 0$ sia che $2\alpha+1 < 0$. In conclusione, il metodo di Jacobi è convergente se e solo se

$$\rho(J) < 1 \iff \sqrt{\left|\frac{2\alpha+1}{12}\right|} < 1 \iff \left|\frac{2\alpha+1}{12}\right| < 1 \iff -1 < \frac{2\alpha+1}{12} < 1$$

$$\iff -12 < 2\alpha+1 < 12 \iff -\frac{13}{2} < \alpha < \frac{11}{2}.$$

- (b) Per trovare i valori di α richiesti, procediamo esattamente come nel punto (a): calcoliamo il raggio spettrale $\rho(G)$, dove G è la matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A , e determiniamo i valori di α per i quali $\rho(G) < 1$. Sia

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

la parte triangolare inferiore di A . In base a un'osservazione "famosa", gli autovalori di $G = E^{-1}(E-A)$ sono le soluzioni dell'equazione $\det(\lambda E + A - E) = 0$. Si ha

$$\det(\lambda E + A - E) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & 0 \\ \alpha\lambda & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(12\lambda^2 - \lambda) - 4\alpha\lambda^2 = 2\lambda^2(12\lambda - 1 - 2\alpha),$$

per cui gli autovalori di G sono $0, 0, \frac{2\alpha+1}{12}$. Dunque,

$$\rho(G) = \left|\frac{2\alpha+1}{12}\right|.$$

In conclusione, il metodo di Gauss-Seidel è convergente se e solo se

$$\rho(G) < 1 \iff \left|\frac{2\alpha+1}{12}\right| < 1 \iff -1 < \frac{2\alpha+1}{12} < 1 \iff -12 < 2\alpha+1 < 12$$

$$\iff -\frac{13}{2} < \alpha < \frac{11}{2}.$$

Calcolo Numerico

Esame del 11/07/2023

Esercizio 1. Sia $f(x) = (x - a) \sin(\pi x)$, dove $a \in \mathbb{R}$, e siano $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

(a) Consideriamo le due approssimazioni $p(x)$ e $q(x)$ di $f(x)$ costruite nel modo seguente:

- $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2 ;
- $q(x) = (x - a)s(x)$, dove $s(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $\sin(\pi x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2 .

Scrivere $p(x)$ e $q(x)$ in forma canonica.

(b) Consideriamo le due approssimazioni $p(\frac{3}{2})$ e $q(\frac{3}{2})$ di $f(\frac{3}{2})$. Stabilire per quali valori di a l'approssimazione $p(\frac{3}{2})$ è migliore e per quali valori di a l'approssimazione $q(\frac{3}{2})$ è migliore.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \log(1 + x)$.

(a) Calcolare $I = \int_0^1 f(x) dx$ e $J = \int_0^1 p(x) dx$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

Suggerimento. Per calcolare I , notare che $f(x) = 1 \cdot f(x)$ e applicare il metodo d'integrazione per parti.

(b) Sia $\delta = |I - J|$ l'errore commesso approssimando I con J . Sia inoltre I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I . Determinare un n tale che I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I - I_n| \leq \delta$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 20i \end{bmatrix}.$$

(a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .

(b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).

(c) Dimostrare che se λ è un autovalore di modulo minimo di A allora $|\lambda| > 3$.

(d) Sia $11 \leq \alpha \leq 19$. Per ciascuno degli autovalori λ di A , dire quanto vale il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda|^n}{\alpha^n}.$$

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Supponiamo di voler risolvere un sistema lineare di matrice A usando il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ con $M = \frac{1}{\omega} D$, dove D è la parte diagonale di A (come nel metodo di Jacobi) e $\omega > 0$ è un parametro positivo assegnato. Questo metodo si chiama *metodo di Jacobi con rilassamento*. Il parametro ω si chiama *parametro di rilassamento*. Osserviamo che per $\omega = 1$ si ha $M = D$ e dunque si ottiene il metodo di Jacobi classico.

(a) Sia J_ω la matrice d'iterazione del metodo di Jacobi con rilassamento. Calcolare il raggio spettrale $\rho(J_\omega)$ in funzione di ω .

(b) Stabilire per quali valori di ω il metodo di Jacobi con rilassamento risulta convergente.

(c) Determinare il valore ω_{opt} di ω tale che la velocità di convergenza del metodo di Jacobi con rilassamento risulta massima. Determinare inoltre il raggio spettrale $\rho(J_\omega)$ per $\omega = \omega_{\text{opt}}$.

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sin(\pi x)$.

- Calcolare $I = \int_0^1 f(x) dx$.
- Calcolare $I(a) = \int_0^1 p(x) dx$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = a$ e $a \in (\frac{1}{2}, 1]$ è un parametro fissato. Osserviamo che $I(a)$ può essere vista come un'approssimazione di I che cambia a seconda del valore di a .
- Determinare il valore ottimale di $a \in \{\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, 1\}$ tale per cui l'approssimazione di I data da $I(a)$ risulta migliore. Chiamiamo a_* il valore ottimale ottenuto.
- Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I . Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = |I - I(a_*)|$?

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 4 & i \\ \alpha & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in (0, 1)$ è un parametro assegnato.

- Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
- Dimostrare che i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel *non* possono essere utilizzati per risolvere un sistema lineare di matrice A .

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro assegnato.

- Calcolare $\rho(A)$ in funzione di α .
- Calcolare $\|A\|_\infty$ in funzione di α .
- È vero che $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$? Motivare la risposta.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \neq 4$. Poiché $\det(A) = 4 - \alpha$, la matrice A è invertibile per ogni $\alpha \neq 4$.

- Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- Consideriamo il metodo di Gauss-Seidel modificato, cioè il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ in cui il preconditionatore M è dato dalla parte triangolare *superiore* di A (inclusa la diagonale). Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel modificato applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- Per ciascun valore di α nell'intervallo $(-8, -\frac{1}{6})$, stabilire quale fra il metodo di Gauss-Seidel e il metodo di Gauss-Seidel modificato conviene utilizzare per risolvere un sistema lineare di matrice A e motivare la risposta.

Esercizio 1. Sia $f(x) = 3\sqrt{|\cos(\pi x)|}$.

- (a) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$. Calcolare $p(2)$ utilizzando l'algoritmo di valutazione in un punto del polinomio d'interpolazione studiato durante il corso. Si scrivano esplicitamente tutti i passaggi dell'algoritmo.
- (b) Sia

$$I = \int_0^{1/4} f(x) dx.$$

Osserviamo che $\cos(\pi x) > 0$ per ogni $x \in [0, 1/4]$. Fissato $\varepsilon > 0$, determinare un n tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I - I_n| \leq \varepsilon$.

- (c) Calcolare un'approssimazione di I con errore ≤ 0.01 .

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & i \\ \alpha & -i & 1 \end{bmatrix},$$

dove α è un parametro assegnato tale che $0 < \alpha < 2$ e $\alpha \neq \sqrt{6}/3$ (quest'ultima condizione su α serve a far sì che A sia invertibile).

- (a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A . La matrice A possiede autovalori reali? Motivare la risposta.
- (b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
- (c) Determinare i valori di α per i quali la matrice A è definita positiva. Come può essere migliorata la localizzazione del punto (a) per tali valori di α ? Motivare la risposta.
- (d) Determinare i valori di α per i quali il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente. Che cosa si nota confrontando tali valori di α con quelli ottenuti nel punto (c)?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -3 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro assegnato.

- (a) Sia $C_A(\lambda)$ il polinomio caratteristico di A . Calcolare esplicitamente $C_A(A)$. Che cosa si nota?
- (b) Utilizzando il risultato del punto (a), scrivere A^2 come $q(A)$, dove $q(\lambda)$ è un polinomio di grado 1.
- (c) Calcolare $\rho(A)$ in funzione di α .
- (d) Calcolare $\|A\|_1$ in funzione di α .
- (e) È vero che $\rho(A) \leq \|A\|_1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$? Motivare la risposta.
- (f) Stabilire per quali valori di α risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{4^k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolo Numerico

Esame del 29/01/2024

Esercizio 1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assegnata e siano x_0, x_1, x_2 tre punti distinti di $[a, b]$ tali che

$$f(x_i) = x_i + 2, \quad i = 0, 1, 2.$$

- (a) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sul nodo x_0 .
- (b) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1 .
- (c) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2 .

Esercizio 2. Sia $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, dove $\alpha > 0$ è un parametro assegnato, e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- (a) Calcolare I_3 .
- (b) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = 10^{-7}$ e $\alpha = 1$?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & 1+i & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- (b) Possiamo affermare che la matrice A possiede almeno un autovalore reale? Motivare la risposta.
- (c) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
- (d) Stabilire se la matrice A è definita positiva.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2a & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & \frac{9}{2} \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $a \geq 0$. Poiché $\det(A) = 8 + 8a$, la matrice A è invertibile qualunque sia $a \geq 0$.

- (a) Stabilire per quali valori di a il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- (b) Dimostrare che la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2a & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ottenuta dalla matrice A ponendo uguali a 0 tutti gli elementi sull'ultima riga e colonna tranne l'elemento in posizione $(4, 4)$, è invertibile qualunque sia $a \geq 0$.

- (c) Stabilire per quali valori di a il metodo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ per risolvere un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- (d) Per i valori di a per i quali entrambi i metodi ai punti (a) e (c) sono convergenti, stabilire quale dei due converge più velocemente.

Esercizio 1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assegnata e siano $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ otto punti distinti di $[a, b]$ tali che

$$f(x_i) = x_i^2 + x_i + \alpha, \quad i = 0, \dots, 7,$$

dove $\alpha > 0$ è una costante fissata.

- (a) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi x_0, x_7 .
Quanto vale $p(x)$ nel caso in cui $x_7 = -x_0 = \sqrt{\alpha}$?
- (b) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, dove $\alpha > 0$ è una costante fissata, e sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$.

- (a) Fornire una stima dell'errore d'interpolazione $|f(x) - p(x)|$ per ogni $x \in [0, 1]$, cioè determinare una costante C_α , che può dipendere dalla costante fissata α , tale che $|f(x) - p(x)| \leq C_\alpha$ per ogni $x \in [0, 1]$.
- (b) Dimostrare che

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 p(x) dx \right| \leq C_\alpha,$$

dove C_α è la costante determinata nel punto (a).

- (c) Determinare un intero n_α , che può dipendere dalla costante fissata α , tale che $|I_{n_\alpha} - I| \leq C_\alpha$, dove C_α è la costante determinata nel punto (a), $I = \int_0^1 f(x) dx$, e per ogni $n \geq 1$ il simbolo I_n denota la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I . Quanto vale n_α se $\alpha = \frac{1}{5}$?

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & i \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 4 + 4i \end{bmatrix}.$$

- (a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- (b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
- (c) Dimostrare che -1 è un autovalore di A .

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2a & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Poiché $\det(A) = \frac{2a^2+1}{a}$, la matrice A è invertibile qualunque sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- (a) Stabilire per quali valori di a il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- (b) Stabilire per quali valori di a la matrice A risulta definita positiva.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio di grado ≤ 3 .

- Dimostrare che se $n \geq 3$ e $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ su $n + 1$ nodi distinti qualsiasi $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, allora $p(x)$ coincide con $f(x)$.
- Supponiamo di sapere che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = a$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un numero assegnato. Scrivere in forma canonica il polinomio $f(x)$.
- Esistono dei valori di a per i quali il polinomio $f(x)$ del punto (b) ha grado strettamente minore di 3? In caso affermativo, determinare tali valori di a .

Esercizio 2. Sia $f(x) = \sin(\pi x)$ e sia $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Calcolare gli integrali I e $\tilde{I} = \int_0^1 p(x) dx$, e l'errore $|\tilde{I} - I|$.
- Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I . Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$.
- Posto $\varepsilon = |\tilde{I} - I|$, determinare un \hat{n} tale che $|I_{\hat{n}} - I| \leq \varepsilon$. Calcolare successivamente $I_{\hat{n}}$ e verificare che effettivamente risulta $|I_{\hat{n}} - I| \leq \varepsilon$.

Esercizio 3. Sia $0 < a \leq 1$ un numero fissato e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & ai & 5 - 5i \end{bmatrix}.$$

- Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).

Esercizio 4. Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

- Stabilire per quali valori di a la matrice A è definita positiva.
- Utilizzando il principio d'induzione e la convenzione che $a^0 = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, dimostrare che per ogni $k \geq 1$ vale la seguente proprietà $\mathcal{P}(k)$:¹

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix}.$$

- Stabilire per quali valori di a risulta che $A^n \rightarrow O$ per $n \rightarrow \infty$.
- Assumiamo che $a \neq 0$, in modo tale che la matrice A sia invertibile e i suoi elementi diagonali siano diversi da 0. Stabilire per quali valori di a il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

¹ Ricordiamo il principio d'induzione: per dimostrare che una data proprietà $\mathcal{P}(k)$ vale ogni numero naturale $k \geq 1$ è sufficiente dimostrare che:

- la proprietà $\mathcal{P}(1)$ vale;
- fissato $k \geq 1$ e assunto che la proprietà $\mathcal{P}(k)$ valga, si deduce che anche la proprietà $\mathcal{P}(k + 1)$ vale.

Esercizio 1. Sia $f(x) = \frac{6x}{x+1}$.

- Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.
- Supponiamo di aggiungere il nodo $x_3 = a$ con $a \in (-1, \infty) \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $q(x)$ di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3 .
- Dire quali sono i valori di a per i quali $q(2)$ fornisce un'approssimazione di $f(2)$ migliore di $p(2)$.

Soluzione.

- Conviene iniziare a scrivere il polinomio $p(x)$ in forma di Lagrange o in forma di Newton, e poi portarlo in forma canonica successivamente, sviluppando i calcoli. Poiché il punto (b) prevede l'aggiunta di un nodo, conviene scrivere $p(x)$ in forma di Newton anziché in forma di Lagrange. Scriviamo dunque $p(x)$ in forma di Newton, calcolando le differenze divise della Tabella 1. Si ha

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) = 0 \\ f[x_1] &= f(x_1) = 2 \\ f[x_2] &= f(x_2) = 3 \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2 - 0}{\frac{1}{2} - 0} = 4 \\ f[x_0, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{3 - 0}{1 - 0} = 3 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 4}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \end{aligned}$$

Dunque la forma di Newton di $p(x)$ è data da

$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + 4(x - 0) - 2(x - 0)(x - \frac{1}{2}) \\ &= 4x - 2x(x - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo la forma canonica:

$$p(x) = 4x - 2x(x - \frac{1}{2}) = 5x - 2x^2.$$

- Sfruttando quanto già fatto nel punto (a), scriviamo il polinomio $q(x)$ in forma di Newton per poi portarlo in forma canonica successivamente, sviluppando i calcoli. La forma di Newton di $q(x)$ è

$$\begin{aligned} q(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= p(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 4x - 2x(x - \frac{1}{2}) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]x(x - \frac{1}{2})(x - 1). \end{aligned}$$

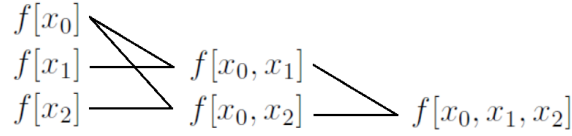


Tabella 1: Tabella delle differenze divise nel caso di tre nodi x_0, x_1, x_2 .

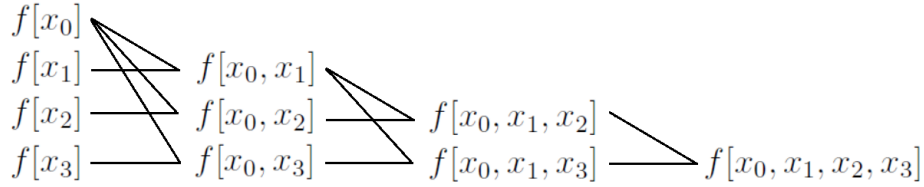


Tabella 2: Tabella delle differenze divise nel caso di quattro nodi x_0, x_1, x_2, x_3 .

L'unica cosa da calcolare è $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, che si ottiene calcolando le differenze divise dell'ultima riga della Tabella 2. Si ha

$$\begin{aligned}
 f[x_3] &= f(x_3) = \frac{6a}{a+1} \\
 f[x_0, x_3] &= \frac{f[x_3] - f[x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{6a}{a+1} - 0}{a - 0} = \frac{6}{a+1} \\
 f[x_0, x_1, x_3] &= \frac{f[x_0, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{6}{a+1} - 4}{a - \frac{1}{2}} = \frac{6 - 4(a+1)}{(a - \frac{1}{2})(a+1)} = \frac{2(1-2a)}{\frac{1}{2}(2a-1)(a+1)} = -\frac{4}{a+1} \\
 f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_0, x_1, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-\frac{4}{a+1} - (-2)}{a-1} = \frac{-4 + 2(a+1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{2(a-1)}{(a-1)(a+1)} \\
 &= \frac{2}{a+1}
 \end{aligned}$$

Dunque la forma di Newton di $q(x)$ è data da

$$q(x) = 4x - 2x(x - \frac{1}{2}) + \frac{2}{a+1}x(x - \frac{1}{2})(x - 1).$$

Sviluppando i calcoli a partire dalla forma di Newton, otteniamo la forma canonica:

$$\begin{aligned}
 q(x) &= 4x - 2x(x - \frac{1}{2}) + \frac{2}{a+1}x(x - \frac{1}{2})(x - 1) \\
 &= 5x - 2x^2 + \frac{2}{a+1}x(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \\
 &= 5x - 2x^2 + \frac{2}{a+1}x^3 - \frac{3}{a+1}x^2 + \frac{1}{a+1}x \\
 &= (5 + \frac{1}{a+1})x - (2 + \frac{3}{a+1})x^2 + \frac{2}{a+1}x^3.
 \end{aligned}$$

(c) Calcolando $f(2)$, $p(2)$ e $q(2)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
 f(2) &= \frac{6 \cdot 2}{2+1} = 4 \\
 p(2) &= 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 2 \\
 q(2) &= (5 + \frac{1}{a+1}) \cdot 2 - (2 + \frac{3}{a+1}) \cdot 2^2 + \frac{2}{a+1} \cdot 2^3 = 2 + \frac{6}{a+1}
 \end{aligned}$$

I valori di a per i quali $q(2)$ fornisce un'approssimazione di $f(2)$ migliore di $p(2)$ sono i valori di a tali che l'errore $|q(2) - f(2)|$ risulta minore dell'errore $|p(2) - f(2)|$. Si ha

$$\begin{aligned}
 |q(2) - f(2)| < |p(2) - f(2)| &\iff \left| -2 + \frac{6}{a+1} \right| < 2 \\
 &\iff -2 < -2 + \frac{6}{a+1} < 2 \\
 &\iff 0 < \frac{6}{a+1} < 4 \\
 &\iff 0 < 6 < 4(a+1)^* \\
 &\iff 6 < 4a + 4^\dagger \\
 &\iff a > \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

In conclusione, i valori di a per i quali $q(2)$ fornisce un'approssimazione di $f(2)$ migliore di $p(2)$ sono i valori in $(\frac{1}{2}, \infty)$.

Esercizio 2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2[a, b]$, sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_a^b f(x)dx$, e sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi tale che $a_n \rightarrow +\infty$. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 |I_n - I|}{a_n} = 0.$$

Suggerimento. Usare il teorema sull'errore della formula dei trapezi.

Soluzione. In base al teorema sull'errore della formula dei trapezi, per ogni fissato n esiste un punto $\eta = \eta_n \in [a, b]$ (che dipenderà da n) tale che

$$|I - I_n| = \left| -\frac{(b-a)f''(\eta)}{12} h^2 \right| = \frac{(b-a)|f''(\eta)|}{12} h^2,$$

dove $h = \frac{b-a}{n}$ è il passo di discretizzazione della formula I_n . Siccome $f \in C^2[a, b]$, la derivata seconda $f''(x)$ è una funzione continua su $[a, b]$ e quindi anche il suo modulo $|f''(x)|$ è una funzione continua su $[a, b]$, essendo la funzione composta delle due funzioni continue $f''(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $|y| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Di conseguenza, per il teorema di Weierstrass, $|f''(x)|$ assume un valore massimo M sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$:

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Pertanto, per ogni fissato n si ha

$$0 \leq |I - I_n| = \frac{(b-a)|f''(\eta)|}{12} h^2 = \frac{(b-a)^3 |f''(\eta)|}{12n^2} \leq \frac{(b-a)^3 M}{12n^2},$$

e moltiplicando per il numero positivo n^2/a_n otteniamo

$$0 \leq \frac{n^2 |I - I_n|}{a_n} \leq \frac{(b-a)^3 M}{12a_n}.$$

Siccome $a_n \rightarrow \infty$ per ipotesi, la successione di destra $(b-a)^3 M/(12a_n)$ tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, e ovviamente anche la successione di sinistra 0, essendo identicamente nulla, tende a 0 per $n \rightarrow \infty$. In conclusione, per il teorema dei due carabinieri, la successione $n^2 |I - I_n|/a_n$ tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, e dunque la tesi è dimostrata.

*Abbiamo moltiplicato ambo i membri della disuguaglianza per $a+1$ che è positivo essendo $a > -1$ per ipotesi.

†La disuguaglianza $0 < 6$ è sempre vera e quindi rimane solo la disuguaglianza $6 < 4a + 4$.

Esercizio 3. Sia $0 < a < 1$ un numero fissato e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 - 3i & 0 & i & 0 \\ -1 & -3 + 3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 + 3i & -i \\ 0 & a & 0 & 3 - 3i \end{bmatrix}.$$

- (a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- (b) Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
- (c) Dimostrare che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{6^k} = O.$$

Soluzione.

- (a) Per localizzare gli autovalori di A nel modo più preciso possibile, usiamo i teoremi di Gershgorin considerando sia i cerchi per riga K_1, K_2, K_3, K_4 che i cerchi per colonna H_1, H_2, H_3, H_4 . Indicando con $\mathcal{C}(z_0, r)$ il cerchio nel piano complesso di centro z_0 e raggio r , si ha[‡]

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathcal{C}(-3 - 3i, 1), & H_1 &= \mathcal{C}(-3 - 3i, 1), \\ K_2 &= \mathcal{C}(-3 + 3i, 1), & H_2 &= \mathcal{C}(-3 + 3i, a), \\ K_3 &= \mathcal{C}(3 + 3i, 1), & H_3 &= \mathcal{C}(3 + 3i, 1), \\ K_4 &= \mathcal{C}(3 - 3i, a), & H_4 &= \mathcal{C}(3 - 3i, 1). \end{aligned}$$

In base al primo teorema di Gershgorin, gli autovalori di A si trovano in

$$(K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4) \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4) = K_1 \cup H_2 \cup K_3 \cup K_4;$$

si veda la Figura 1.

In base al secondo teorema di Gershgorin applicato ai cerchi per riga, abbiamo un autovalore di A in K_1 , uno in K_2 , uno in K_3 e uno in K_4 . In base al secondo teorema di Gershgorin applicato ai cerchi per colonna, abbiamo un autovalore di A in H_1 , uno in H_2 , uno in H_3 e uno in H_4 . Mettendo assieme le informazioni, abbiamo un autovalore di A in K_1 , uno in H_2 , uno in K_3 e uno in K_4 .

Osserviamo ora che la matrice A è irriducibile (il suo grafo contiene il ciclo $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ che tocca tutti i nodi). Possiamo dunque applicare il terzo teorema di Gershgorin (debole). Applicandolo prima ai cerchi per riga, concludiamo che nessun punto del bordo di $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo di $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi K_1, K_2, K_3, K_4 . Applicandolo ai cerchi per colonna, concludiamo che nessun punto del bordo di $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$ può essere autovalore di A perché nessun punto del bordo di $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$ sta sul bordo di tutti i singoli cerchi H_1, H_2, H_3, H_4 . Mettendo assieme le informazioni, deduciamo che nessun punto del bordo dell'insieme $K_1 \cup H_2 \cup K_3 \cup K_4$ evidenziato in verde in Figura 1 può essere un autovalore di A .

Conclusione. Abbiamo un autovalore di A in K_1 privato del bordo, uno in H_2 privato del bordo, uno in K_3 privato del bordo e uno in K_4 privato del bordo.

- (b) Indichiamo con λ_1 l'autovalore di A in K_1 privato del bordo, con λ_2 l'autovalore di A in H_2 privato del bordo, con λ_3 l'autovalore di A in K_3 privato del bordo e con λ_4 l'autovalore di A in K_4 privato del bordo. Facciamo le seguenti osservazioni relative a K_1 e all'autovalore λ_1 in esso contenuto.

[‡]Si tenga presente che $|i| = |-i| = 1$ e $0 < a < 1$.

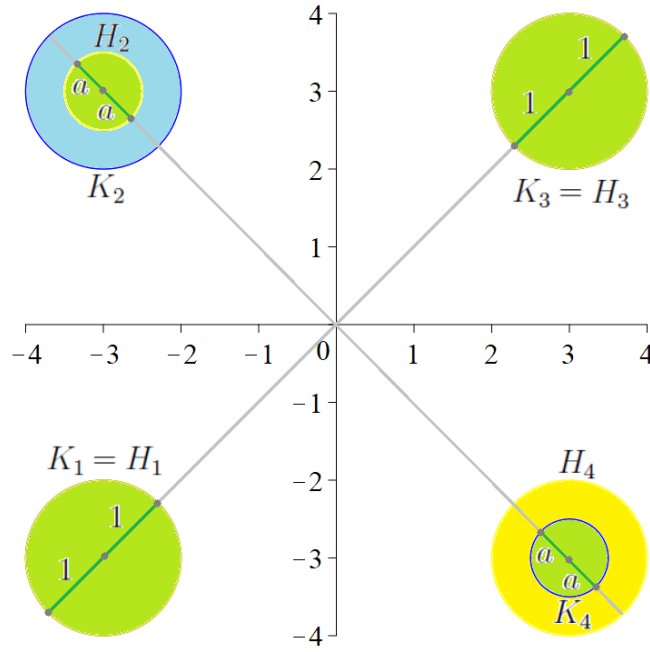


Figura 1: Cerchi di Gershgorin per riga K_1, K_2, K_3, K_4 (in blu) e per colonna H_1, H_2, H_3, H_4 (in giallo) della matrice A dell'Esercizio 3. L'intersezione $(K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4) \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4) = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ è evidenziata in verde.

- Il centro di K_1 è $-3 - 3i$ e la sua distanza da 0 è $|-3 - 3i| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$.
- Il punto di K_1 più vicino a 0 è il punto grigio segnato in Figura 1 che si trova a “nord-est” del centro $-3 - 3i$. Infatti, questo punto grigio sta sul bordo del cerchio di centro 0 e raggio $3\sqrt{2} - 1$, per cui la sua distanza da 0 è $3\sqrt{2} - 1$. Invece, tutti gli altri punti di K_1 stanno fuori dal cerchio di centro 0 e raggio $3\sqrt{2} - 1$, per cui la loro distanza da 0 è maggiore di $3\sqrt{2} - 1$.
- Il punto di K_1 più lontano da 0 è il punto grigio segnato in Figura 1 che si trova a “sud-ovest” del centro $-3 - 3i$. Infatti, questo punto grigio sta sul bordo del cerchio di centro 0 e raggio $3\sqrt{2} + 1$, per cui la sua distanza da 0 è $3\sqrt{2} + 1$. Invece, tutti gli altri punti di K_1 stanno all'interno del cerchio di centro 0 e raggio $3\sqrt{2} + 1$, per cui la loro distanza da 0 è minore di $3\sqrt{2} + 1$.
- Siccome $|\lambda_1|$ è la distanza di λ_1 da 0 e siccome λ_1 sta in K_1 privato del bordo, dalle due osservazioni precedenti deduciamo che

$$3\sqrt{2} - 1 < |\lambda_1| < 3\sqrt{2} + 1.$$

Utilizzando osservazioni simili alle precedenti per i cerchi H_2, K_3, K_4 e per gli autovalori $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ in essi contenuti, deduciamo che

$$3\sqrt{2} - a < |\lambda_2| < 3\sqrt{2} + a, \quad 3\sqrt{2} - 1 < |\lambda_3| < 3\sqrt{2} + 1, \quad 3\sqrt{2} - a < |\lambda_4| < 3\sqrt{2} + a.$$

Questo ci permette di concludere che[§]

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|) \geq |\lambda_2| > 3\sqrt{2} - a, \\ \rho(A) &= \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|) < 3\sqrt{2} + 1, \end{aligned}$$

e dunque

$$3\sqrt{2} - a < \rho(A) < 3\sqrt{2} + 1.$$

[§]Si ricordi che $0 < a < 1$.

(c) In base a un teorema noto, indicando con O la matrice nulla, per ogni matrice quadrata B si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = O \iff \rho(B) < 1.$$

La matrice $B = A/6$ è un polinomio di A , precisamente $B = p(A)$ con $p(\lambda) = \lambda/6$. Pertanto, in base a un altro teorema noto, gli autovalori di B sono $\lambda_1/6, \lambda_2/6, \lambda_3/6, \lambda_4/6$, dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono gli autovalori di A . Siccome $\rho(A) < 3\sqrt{2} + 1 \approx 5.24 < 6$, risulta

$$\begin{aligned} \rho(B) &= \max\left(\left|\frac{\lambda_1}{6}\right|, \left|\frac{\lambda_2}{6}\right|, \left|\frac{\lambda_3}{6}\right|, \left|\frac{\lambda_4}{6}\right|\right) = \max\left(\frac{|\lambda_1|}{6}, \frac{|\lambda_2|}{6}, \frac{|\lambda_3|}{6}, \frac{|\lambda_4|}{6}\right) = \frac{1}{6} \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|) \\ &= \frac{\rho(A)}{6} < 1 \end{aligned}$$

e dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{6^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{6}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} B^k = O.$$

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Supponiamo di voler risolvere un sistema lineare di matrice A usando il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ con $M = \frac{1}{\omega}E$, dove E è la parte triangolare inferiore di A (come nel metodo di Gauss-Seidel) e $\omega > 0$ è un parametro positivo assegnato. Osserviamo che per $\omega = 1$ si ha $M = E$ e dunque si ottiene il metodo di Gauss-Seidel.

- Sia G_ω la matrice d'iterazione del metodo assegnato. Calcolare il raggio spettrale $\rho(G_\omega)$ in funzione di ω .
- Stabilire per quali valori di ω il metodo assegnato risulta convergente.
- Determinare il valore ω_{opt} di ω tale che la velocità di convergenza del metodo assegnato risulta massima. Determinare inoltre il raggio spettrale $\rho(G_\omega)$ per $\omega = \omega_{\text{opt}}$.
- Nel caso in cui $\omega = \omega_{\text{opt}}$, partendo dal vettore iniziale nullo, calcolare le prime due iterazioni del metodo assegnato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0]^T$.

Soluzione. (a) Per calcolare il raggio spettrale $\rho(G_\omega)$ potremmo sfruttare un'osservazione "famosa" ed evitare di calcolare esplicitamente G_ω . Tuttavia, il calcolo di G_ω per $\omega = \omega_{\text{opt}}$ sarebbe comunque necessario per risolvere il punto (d), per cui tanto vale calcolare subito G_ω per ogni $\omega > 0$. Poiché

$$M = \frac{1}{\omega}E = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\omega} & 0 \\ \frac{1}{\omega} & \frac{3}{\omega} \end{bmatrix},$$

si ha[¶]

$$M^{-1} = \frac{1}{6/\omega^2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\omega} & 1 & \frac{3}{\omega} \\ \hline \frac{2}{\omega} & 1 & \frac{2}{\omega} & 0 \\ \frac{1}{\omega} & 0 & \frac{1}{\omega} & 1 \end{array} \right] = \frac{\omega^2}{6} \begin{bmatrix} \frac{3}{\omega} & 0 \\ -\frac{1}{\omega} & \frac{2}{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{\omega}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

[¶]Le componenti riquadrate erano già note senza ricorrere alla formula per l'inversa di una matrice. Ricordiamo infatti che l'inversa di una matrice triangolare inferiore è ancora una matrice triangolare inferiore con elementi diagonali dati dagli inversi di quelli della matrice di partenza.

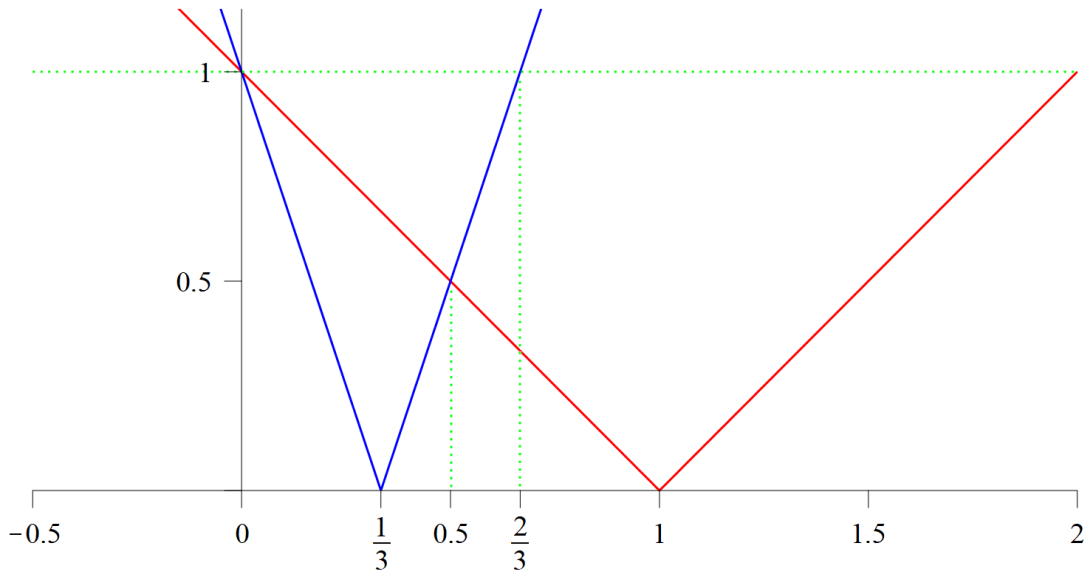


Figura 2: Grafici delle funzioni $|1 - \omega|$ (rosso) e $|1 - 3\omega|$ (blu).

per cui

$$G_\omega = M^{-1}(M - A) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\varepsilon} & 0 \\ -\frac{\varepsilon}{6} & \frac{\varepsilon}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\varepsilon} - 2 & 12 \\ \frac{1}{\varepsilon} - 1 & \frac{3}{\varepsilon} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \omega & 6\omega \\ 0 & 1 - 3\omega \end{bmatrix}.$$

Poiché G_ω è una matrice triangolare superiore, possiamo subito affermare che gli autovalori di G_ω sono gli elementi diagonali, cioè $1 - \omega$ e $1 - 3\omega$. Dunque,

$$\rho(G_\omega) = \max(|1 - \omega|, |1 - 3\omega|).$$

(b) Il metodo assegnato è convergente per i valori di ω tali che $\rho(G_\omega) < 1$. Si ha

$$\begin{aligned} \rho(G_\omega) < 1 &\iff \begin{cases} |1 - \omega| < 1 \\ |1 - 3\omega| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < 1 - \omega < 1 \\ -1 < 1 - 3\omega < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < \omega < 2 \\ 0 < \omega < \frac{2}{3} \end{cases} \\ &\iff 0 < \omega < \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

In conclusione, il metodo assegnato è convergente per $0 < \omega < \frac{2}{3}$ e non convergente per gli altri valori di ω .

(c) Il valore ω_{opt} di ω che rende massima la velocità di convergenza del metodo assegnato è quello che minimizza il raggio spettrale $\rho(G_\omega)$. Dobbiamo quindi cercare il valore di ω che minimizza il raggio spettrale $\rho(G_\omega) = \max(|1 - \omega|, |1 - 3\omega|)$. Optiamo per una risoluzione grafica. La Figura 2 mostra i grafici delle funzioni $|1 - \omega|$ e $|1 - 3\omega|$, da cui si vede che il valore di ω che rende minimo $\rho(G_\omega)$ è $\omega_{\text{opt}} = \frac{1}{2}$. Il valore ω_{opt} è l'ascissa del punto d'intersezione delle rette di equazione $y = 1 - \omega$ e $y = -1 + 3\omega$, e si ottiene risolvendo l'equazione $1 - \omega = -1 + 3\omega$. Per $\omega = \omega_{\text{opt}} = \frac{1}{2}$ si ottiene il raggio spettrale minimo $\rho(G_{\omega_{\text{opt}}}) = \rho(G_{1/2}) = \max(|1 - \frac{1}{2}|, |1 - \frac{3}{2}|) = \frac{1}{2}$.

(d) Calcoliamo le prime 2 iterazioni del metodo assegnato per risolvere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ e fissando $\omega = \omega_{\text{opt}}$. L'equazione del metodo assegnato è la seguente:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = G_\omega \mathbf{x}^{(k)} + M^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 - \omega & 6\omega \\ 0 & 1 - 3\omega \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{2}{\varepsilon} & 0 \\ -\frac{\varepsilon}{6} & \frac{\varepsilon}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \omega & 6\omega \\ 0 & 1 - 3\omega \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{2}{\varepsilon} \\ -\frac{\varepsilon}{6} \end{bmatrix}.$$

Nel caso $\omega = \omega_{\text{opt}} = \frac{1}{2}$, l'equazione del metodo diventa

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Le prime 2 iterazioni partendo da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0]^T$ sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{24} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 1. Sia $[a, b]$ un fissato intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} e si consideri la funzione

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x.$$

Siano x_0, x_1, \dots, x_n gli $n + 1$ nodi uniformi in $[a, b]$ dati da

$$x_i = a + i \frac{b - a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

e sia $p_n(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ su x_0, x_1, \dots, x_n . Sia infine

$$M_n = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)|$$

il massimo errore commesso approssimando $f(x)$ con $p_n(x)$ quando x varia in $[a, b]$. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0.$$

Suggerimento. Usare il teorema sull'errore dell'interpolazione polinomiale e osservare che per dimostrare il risultato non è necessario calcolare il massimo M_n .

Esercizio 2. Sia $f(x) = e^{-x^2}$, sia

$$I = \int_0^2 f(x) dx = 0.88208139076242\dots$$

e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I .

- Calcolare I_3 e I_6 mostrando fino alla settima cifra decimale.
- Applicare la procedura di estrapolazione usando le formule dei trapezi I_3 e I_6 per calcolare il valore estrapolato E . Stabilire quale fra I_3 , I_6 , E fornisce l'approssimazione migliore di I .
- Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = |E - I|$?

Esercizio 3. Sia $0 < a < 1$ un numero fissato e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & i & 0 \\ -1 & 7i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -i \\ 0 & a & 0 & -5i \end{bmatrix}.$$

- Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (a).
- Sulla base della stima del punto (b), dire se esiste e, in caso affermativo, qual è il più piccolo numero positivo $\alpha > 0$ per il quale si ha certezza che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{\alpha^k} = O.$$

Motivare la risposta.

Esercizio 4. Siano $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice fissata avente autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ un vettore fissato. Si consideri il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

e il metodo iterativo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &\in \mathbb{C}^n \text{ dato,} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= (I - \omega A)\mathbf{x}^{(k)} + \omega\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2}$$

dove $\omega \in \mathbb{R}$ è un parametro assegnato. Il metodo (2) si chiama *metodo di Richardson-Eulero*.

- (a) Stabilire per quali valori di ω il metodo (2) è consistente con il sistema (1).
- (b) Determinare gli autovalori e il raggio spettrale della matrice d'iterazione del metodo (2) in funzione di ω e degli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ di A .
- (c) Dimostrare che se esistono due autovalori di A che hanno parte reale di segno opposto, cioè due autovalori λ_i e λ_j tali che $\operatorname{Re}(\lambda_i)\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$, allora il metodo (2) non è convergente, qualunque sia il valore di ω .

Suggerimento. Può essere utile confrontare i due numeri $|1 - \omega\lambda_i|$ e $|1 - \omega\lambda_j|$ con 1, considerando prima il caso in cui $\omega \geq 0$ e poi quello in cui $\omega < 0$.

Esercizio 1. Sia $f(x) = x \log(\frac{1}{2} + x)$, dove “log” indica il logaritmo naturale (logaritmo in base e).

- (a) Scrivere in forma canonica il polinomio d’interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.
- (b) Stimare l’errore d’interpolazione $|f(x) - p(x)|$ per $x \in [0, 1]$ determinando una costante C tale che $|f(x) - p(x)| \leq C$ per ogni $x \in [0, 1]$.
- (c) Consideriamo l’integrale

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{8} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 = 0.065406017970\dots$$

Poiché il polinomio d’interpolazione $p(x)$ è un’approssimazione di $f(x)$ sull’intervallo $[0, 1]$, possiamo aspettarci che $\int_0^1 p(x)dx \approx \int_0^1 f(x)dx$. Calcolare $\tilde{I} = \int_0^1 p(x)dx$ e confrontarlo con $I = \int_0^1 f(x)dx$ determinando l’errore $\delta = |\tilde{I} - I|$.

- (d) Sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I . Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Determinare successivamente un intero \bar{n} tale che $|I_{\bar{n}} - I| \leq \delta$, dove δ è l’errore al punto (c).

Esercizio 2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a + bi & 1 & i & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -i & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Stabilire al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ qual è la norma ∞ della matrice A .
- (b) Stabilire per quali valori di a e b la matrice A è Hermitiana.
- (c) Stabilire per quali valori di a e b la matrice A è definita positiva.
- (d) Supponiamo che $a = 10$ e $b = 0$, e si consideri il vettore (colonna) $\mathbf{x}_\alpha = [1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3]^T$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che il numero

$$R(\alpha) = \mathbf{x}_\alpha^T A \mathbf{x}_\alpha$$

è reale qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e determinarne il segno (positivo, negativo o nullo) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \neq 5$. Poiché $\det(A) = 5 - \alpha$, la matrice A è invertibile qualunque sia $\alpha \neq 5$.

- (a) Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- (b) Consideriamo il metodo di Gauss-Seidel modificato, cioè il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ in cui il preconditionatore M è dato dalla parte triangolare superiore di A (inclusa la diagonale). Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel modificato applicato a un sistema lineare di matrice A risulta convergente.
- (c) Per ciascun valore di $\alpha > 0$ (con $\alpha \neq 5$), stabilire quale fra il metodo di Gauss-Seidel e il metodo di Gauss-Seidel modificato conviene utilizzare per risolvere un sistema lineare di matrice A e motivare la risposta.

Esercizio 1. Sia $f(x) = \max(0, 2x)$.

- Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $-1, 0, 1$.
- Calcolare $E = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$.^{*}
- Per ogni $n \geq 1$, scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $q_n(x)$ di $f(x)$ sugli $n + 1$ nodi $0, 1, \dots, n$.

Esercizio 2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, b]$ e sia $I = \int_a^b f(x) dx$. Per ogni $n \geq 1$, sia I_n la formula dei trapezi di ordine n e passo $h = \frac{b-a}{n}$ per approssimare l'integrale I . Costruiamo un'approssimazione R di I nel modo seguente: fissiamo $n_0 \geq 1$ e definiamo R come il valore estrapolato ottenuto applicando la procedura di estrapolazione che utilizza le tre formule dei trapezi $I_{n_0}, I_{2n_0}, I_{4n_0}$.[†] Dimostrare che il numero R è una combinazione lineare dei numeri $I_{n_0}, I_{2n_0}, I_{4n_0}$, cioè

$$R = \alpha I_{n_0} + \beta I_{2n_0} + \gamma I_{4n_0}$$

per certi coefficienti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, e determinare esplicitamente α, β, γ .

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3a & 1 & ai \\ 1 & 1 & -1 \\ -ai & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Stabilire per quali valori di a la matrice A è definita positiva.
- Supponiamo che $a > 3$. Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- Supponiamo che $a > 3$. Fornire la stima più precisa possibile del raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione del punto (b).

Esercizio 4. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix},$$

e sia \mathcal{B} l'insieme delle matrici B_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

- Determinare la matrice $B_{\alpha_{\text{opt}}} \in \mathcal{B}$ che risulta più vicina ad A in norma infinito $\|\cdot\|_\infty$ e il corrispondente valore ottimale α_{opt} .[‡] Determinare inoltre la distanza fra $B_{\alpha_{\text{opt}}}$ e A in norma infinito $\|\cdot\|_\infty$.
- Poiché $\det(B_\alpha) = 2 - \alpha^2$, la matrice B_α è invertibile per ogni $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$, calcolare $\mu_\infty(B_\alpha) =$ il numero di condizionamento di B_α in norma infinito $\|\cdot\|_\infty$.
- Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$ il metodo di Jacobi per risolvere un sistema lineare di matrice B_α risulta convergente.

^{*} E è l'errore massimo commesso approssimando $f(x)$ con $p(x)$ al variare di $x \in [-1, 1]$.

[†]Il numero R così ottenuto si chiama approssimazione di Romberg di I .

[‡]La matrice $B_{\alpha_{\text{opt}}}$ si chiama approssimazione ottima di A all'interno dell'insieme \mathcal{B} .

- (d) Supponiamo che α sia uno dei valori trovati al punto (c) che assicurano la convergenza del metodo di Jacobi su un sistema lineare di matrice B_α . Supponiamo inoltre di arrestare il metodo di Jacobi per risolvere il sistema lineare $B_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}$ alla prima iterazione $\mathbf{x}^{(K)}$ che soddisfa

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(K)}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \leq 10^{-10},$$

dove $\mathbf{r}^{(K)} = \mathbf{b} - B_\alpha \mathbf{x}^{(K)}$ è il residuo corrispondente a $\mathbf{x}^{(K)}$. Fornire una stima (dipendente da α) dell'errore relativo

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(K)} - \mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

commesso approssimando \mathbf{x} con $\mathbf{x}^{(K)}$, dove \mathbf{x} è la soluzione del sistema $B_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}$. La stima ottenuta è buona se α è molto vicino a $\sqrt{2}$? E se α è molto vicino a 0?

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $-1, 0, 1$.
- (b) Calcolare $E = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$.*
- (c) Per ogni $n \geq 1$, scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $q_n(x)$ di $f(x)$ sugli $n + 1$ nodi uniformi $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

Esercizio 2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2[a, b]$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare l'integrale $I = \int_a^b f(x)dx$. Supponiamo che I_n converga a I con una velocità superiore a n^2 , nel senso che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 |I_n - I| = 0.$$

Dimostrare che in tal caso deve esistere necessariamente un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f''(x_0) = 0$.

Suggerimento. Usare il teorema sull'errore della formula dei trapezi e il seguente risultato sulle funzioni continue: se $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua su $[a, b]$ che non ha zeri su $[a, b]$ (cioè $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$), allora il minimo $m_{|g|} = \min_{x \in [a, b]} |g(x)|$ è strettamente positivo ($m_{|g|} > 0$).

Esercizio 3. Sia[†] $f(x) = \frac{1}{\log(x+2)}$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- (a) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$.
- (b) Calcolare un'approssimazione \tilde{I} di I con errore $|\tilde{I} - I| \leq 10^{-2}$.

Esercizio 4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 + \alpha \end{bmatrix}$$

- (a) Stabilire per quali valori di α la matrice A è definita positiva.
- (b) Supponiamo che α sia uno dei valori trovati al punto (a) e sia $p(x)$ un polinomio tale che $-2 \leq p(x) \leq 2$ per ogni $x \in (0, \rho(A)]$. Dimostrare che $\rho(B) \leq 2$, dove $B = p(A)$.
- (c) Supponiamo che $\alpha > 1$. Dimostrare che gli autovalori di A si trovano nell'intervallo aperto $(-\alpha, 1 + 2\alpha)$ e, sulla base di questo fatto, fornire la stima più precisa possibile per il raggio spettrale $\rho(A)$.
- (d) Sia[‡]

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stabilire per quali valori di α il metodo iterativo associato alla decomposizione $A = M - (M - A)$ per risolvere un sistema lineare di matrice A risulta convergente.

* E è l'errore massimo commesso approssimando $f(x)$ con $p(x)$ al variare di $x \in [-1, 1]$.

[†]Il simbolo \log (senza specificazione della base del logaritmo) indica sempre il logaritmo in base e (logaritmo naturale).

[‡]In pratica, M è ottenuta sostituendo 0 al posto di α nell'espressione di A .

Esercizio 1. Sia a un numero reale fissato.

- (a) Determinare un polinomio $p(x)$ di grado al più 3 passante per i punti $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0)$, $(\frac{2}{3}, a)$, $(1, 1)$. Il polinomio $p(x)$ è unico?
- (b) Supponiamo che $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione di classe $C^\infty[0, 1]$ tale che $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{3}) = 0$, $f(\frac{2}{3}) = a$ e $f(1) = 1$. Supponiamo inoltre che

$$|f^{(4)}(x)| \leq K, \quad \forall x \in [0, 1],$$

dove K è una costante. Determinare una costante C tale che

$$|f(x) - p(x)| \leq C, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Esercizio 2. Per ogni $n \geq 1$, sia $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2[0, 1]$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare l'integrale $\int_0^1 f_n(x) dx$.

- (a) Supponiamo che, per ogni fissato $n \geq 1$,

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_n''(x)| \leq C_n,$$

dove

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n^2} = 0.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 f_n(x) dx - I_n \right| = 0.$$

- (b) Nel caso in cui $f_n(x) = \sin(n^\alpha x)$, dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ possiamo affermare con certezza che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 f_n(x) dx - I_n \right| = 0.$$

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} -2 + 2i & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & 2i & \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 2 + 2i \end{bmatrix},$$

dove a è un numero reale tale che $0 < a < 1$.

- (a) Localizzare nel modo più preciso possibile gli autovalori di A .
- (b) Fornire la stima più precisa possibile per il raggio spettrale $\rho(A)$ sulla base della localizzazione ottenuta al punto (a).

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- (a) Determinare, se esistono, i valori di α tali per cui il metodo di Jacobi applicato al sistema dato converge mentre il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato *non* converge.
- (b) Nel caso in cui $\alpha = 1$, calcolare le prime 3 iterazioni del metodo di Jacobi partendo dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ e confrontare il risultato con la soluzione esatta.

Esercizio 1. Sia $f(x) = \min(|x|, 1)$.

- Tracciare il grafico di $f(x)$ sull'intervallo $[-2, 2]$.
- Scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $-\alpha, 0, \alpha$, dove $\alpha \in (0, 1]$ è un numero fissato.
- Calcolare $E = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$.
Suggerimento. Osservare che $|f(x) - p(x)|$ è una funzione pari e l'intervallo $[-1, 1]$ è simmetrico rispetto a 0, quindi...
- Determinare il valore di $\alpha \in (0, 1]$ che minimizza l'errore E .
- Per ogni $n \geq 0$, scrivere in forma canonica il polinomio d'interpolazione $q_n(x)$ di $f(x)$ sugli $n + 1$ nodi $x_i = (-1)^i(i + 1)$, $i = 0, \dots, n$.

Esercizio 2. Sia $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$, sia

$$I = \int_0^\pi f(x) dx = 3.64555687090792\dots$$

e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare I .

- Calcolare I_3 e I_6 mostrando fino alla settima cifra decimale.
- Applicare la procedura di estrapolazione usando le formule dei trapezi I_3 e I_6 per calcolare il valore estrapolato E . Stabilire quale fra I_3, I_6, E fornisce l'approssimazione migliore di I .
- Per ogni fissato $\varepsilon > 0$, determinare un intero n tale che $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Quanto vale n se $\varepsilon = |E - I|$?

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo che $\det(A) = 3$, per cui la matrice A è invertibile qualunque sia il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Determinare il valore di $\alpha \in [2, \infty)$ che minimizza il numero di condizionamento di A in norma ∞ .
- Stabilire per quali valori di α la matrice A è definita positiva.
- Stabilire per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato risulta convergente.
- Consideriamo il metodo di Jacobi applicato al sistema dato e sia $\mathbf{x}^{(1)}$ la prima iterazione di tale metodo ottenuta partendo dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [1, -1, 1]^T$. Determinare il valore di α che minimizza la distanza in norma 1 di $\mathbf{x}^{(1)}$ dalla soluzione esatta \mathbf{x} del sistema. †

* E è l'errore massimo commesso approssimando $f(x)$ con $p(x)$ al variare di $x \in [-1, 1]$.

† La distanza in norma 1 di $\mathbf{x}^{(1)}$ da \mathbf{x} si chiama anche errore in norma 1 di $\mathbf{x}^{(1)}$ rispetto a \mathbf{x} .