Analisi Matematica I
Equazioni differenziali (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha $\int y^{-2/3}\,dy = \int dt \iff 3\sqrt[3]{y} = t + c$. Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 3$, per cui $y(t) = \left(1 + \frac{t}{3}\right)^3$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Si ha $\int \frac{dy}{8y+1} = \int t\,dt \iff \frac{1}{8}\log|8y+1| = \frac{1}{2}t^2 + c \iff 8y+1 = c'e^{4t^2} \iff y = c''e^{4t^2} - \frac{1}{8}$. Dalla condizione iniziale otteniamo $\frac{7}{8} = c'' - \frac{1}{8} \iff c'' = 1$, per cui $y(t) = e^{4t^2} - \frac{1}{8}$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) Si ha $\int \frac{dy}{y-1} = -\int \frac{dt}{t} \iff \log|y-1| = -\log|t| + c \iff y - 1 = \frac{c'}{t} \iff y = \frac{c'}{t} + 1$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $2 = c' + 1 \iff c' = 1$, per cui $y(t) = \frac{1}{t} + 1$, $t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 1$, $t > 0$.

(4) Si ha $\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \iff \log|y+1| = 2\sqrt{t} + c \iff y+1 = c'e^{2\sqrt{t}} \iff y = c'e^{2\sqrt{t}} - 1$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $1 = c'e^2 - 1 \iff c' = \frac{2}{e^2}$, per cui $y(t) = 2e^{2(\sqrt{t}-1)} - 1$, $t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = -1$, $t > 0$.

(5) Si ha $\int \frac{dy}{y^2} = \int 2t\,dt \iff -\frac{1}{y} = t^2 + c \iff y = \frac{1}{c'-t^2}$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $-1 = \frac{1}{c'} \iff c' = -1$, per cui $y(t) = -\frac{1}{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

(6) Si ha $\int y\,dy = \int t\,dt \iff \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + c \iff y = \pm\sqrt{t^2 + c'}$. Dalla condizione iniziale otteniamo $-1 = -\sqrt{c'} \iff c' = 1$, per cui $y(t) = -\sqrt{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$.

(7) Si ha $\int \frac{2y\,dy}{y^2+1} = \int \frac{dt}{t^2} \iff \log(y^2+1) = -\frac{1}{t} + c \iff y^2 + 1 = c'e^{-\frac{1}{t}} \iff y = \pm\sqrt{c'e^{-\frac{1}{t}} - 1}$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $-1 = -\sqrt{c'e^{-1} - 1} \iff c' = 2e$, per cui $y(t) = -\sqrt{2e^{1-\frac{1}{t}} - 1}$, $t > \frac{1}{1+\log 2}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = \sqrt{2e^{1-\frac{1}{t}} - 1}$, $t > \frac{1}{1+\log 2}$.

(8) Si ha $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dt}{t^2} \iff \operatorname{arctg} y = -\frac{1}{t} + c \iff y = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{t})$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $1 = \operatorname{tg}(c+1) \iff c = \frac{\pi}{4} - 1$, per cui $y(t) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - 1 - \frac{1}{t})$, $t < -\frac{1}{1+\frac{\pi}{4}}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $-1 = \operatorname{tg}(c-1) \iff c = 1 - \frac{\pi}{4}$, per cui $y(t) = \operatorname{tg}(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{t})$, $t > \frac{1}{1+\frac{\pi}{4}}$.

(9) Si ha $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(t-1)\,dt}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t+1} \iff \log|y| = \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \log|t+1| + c \iff y = c'\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}$. Dalla condizione iniziale otteniamo $-1 = c'$, per cui $y(t) = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}$, $t > -1$.

(10) Si ha $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 2t\,dt \iff \arcsin y = t^2 + c \iff y = \sin(t^2 + c)$. Dalla condizione iniziale otteniamo $0 = c$, per cui $y(t) = \sin(t^2)$, $|t| < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(11) Si ha $\int \frac{dy}{y\log y} = \int \frac{dt}{t} \iff \log|\log y| = \log|t| + c \iff \log y = c't \iff y = e^{c't}$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c' = \log e = 1$, per cui $y(t) = e^t$, $t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 1$, $t > 0$.

(12) Si ha $\int \frac{dy}{y+1} = \int \cos t\,dt \iff \log|y+1| = \sin t + c \iff y = c'e^{\sin t} - 1$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $1 = c' - 1 \iff c' = 2$, per cui $y(t) = 2e^{\sin t} - 1$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = -1$, $t \in \mathbb{R}$.

(13) Si ha $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dt \iff \operatorname{tg} y = t + c$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, per cui $y(t) = \operatorname{arctg}(t+1)$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = \frac{\pi}{2}$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla terza condizione iniziale otteniamo $c = \operatorname{tg} \pi = 0$, per cui $y(t) = \pi + \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$ [in quanto la funzione inversa di $\operatorname{tg}|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})}$ è $\pi + \operatorname{arctg}$].

(14) Si ha $\int y\, dy = \int \frac{\cos t}{\sin t}\, dt \iff \frac{1}{2} y^2 = \log|\sin t| + c$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c = \frac{1}{2} + \log 2$, per cui $y(t) = -\sqrt{\log(4\sin^2 t) + 1}$, $t \in \big(-\pi + \arcsin \frac{1}{2\sqrt{e}}, -\arcsin \frac{1}{2\sqrt{e}}\big)$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = \sqrt{\log(4\sin^2 t) + 1}$, $t \in \big(-\pi + \arcsin \frac{1}{2\sqrt{e}}, -\arcsin \frac{1}{2\sqrt{e}}\big)$.

(15) Si ha $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt \iff 2\sqrt{y} = -2\cos\sqrt{t} + c$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c = 1$, per cui $y(t) = (1 - \cos\sqrt{t})^2$, $t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 0$, $t > 0$.

(16) Si ha $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \sqrt{t}\, dt \iff 2\sqrt{y} = \frac{2}{3} t^{3/2} + c \iff y = \big(\frac{1}{3} t^{3/2} + \frac{c}{2}\big)^2$. Dalla condizione iniziale otteniamo $2 = c$, per cui $y(t) = \big(\frac{1}{3} t^{3/2} + 1\big)^2$, $t \geq 0$.

(17) Si ha $\int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int \sqrt{1-t^2}\, dt \iff 3y^{1/3} \overset{(a)}{=} \int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2z)\, dz = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \sin z \cos z + c = \frac{1}{2} \arcsin t + \frac{1}{2} t\sqrt{1-t^2} + c \iff y = \big(\frac{1}{6} \arcsin t + \frac{1}{6} t\sqrt{1-t^2} + \frac{c}{3}\big)^3$ [dove in (a) si è usata la sostituzione $t = \sin z$]. Dalla condizione iniziale otteniamo $3 = c$, per cui $y(t) = \big(\frac{1}{6} \arcsin t + \frac{1}{6} t\sqrt{1-t^2} + 1\big)^3$, $t \in [-1, 1]$.

□

Svolgimento esercizio 2

(1) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int dt \iff \log|y| = t + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ce^t$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)e^t$, per cui $y_p'(t) = c'(t)e^t + c(t)e^t$, e quindi $c'(t)e^t + c(t)e^t = c(t)e^t + t \iff c'(t) = te^{-t} \implies c(t) = \int te^{-t}\, dt = -(t+1)e^{-t}$. Quindi $y_p(t) = -(t+1)$, per cui $y_{gen}(t) = ce^t - t - 1$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = e^t - t - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = \log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ct$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)t$, per cui $y_p'(t) = c'(t)t + c(t)$, e quindi $c'(t)t + c(t) = c(t) + t^2 e^t \iff c'(t) = te^t \implies c(t) = \int te^t\, dt = (t-1)e^t$. Quindi $y_p(t) = t(t-1)e^t$, per cui $y_{gen}(t) = ct + t(t-1)e^t$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = t(t-1)e^t - t$, $t > 0$.

(3) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1-t^4)\, dt}{t} \iff \log|y| = \log|t| - \frac{1}{4} t^4 + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = cte^{-t^4/4}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)te^{-t^4/4}$, per cui $y_p'(t) = c'(t)te^{-t^4/4} + c(t)(1 - t^4)e^{-t^4/4}$, e quindi $c'(t)te^{-t^4/4} + c(t)(1-t^4)e^{-t^4/4} = c(t)(1-t^4)e^{-t^4/4} + t^4 \iff c'(t) = t^3 e^{t^4/4} \implies c(t) = \int t^3 e^{t^4/4}\, dt = e^{t^4/4}$. Quindi $y_p(t) = t$, per cui $y_{gen}(t) = cte^{-t^4/4} + t$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -2e$, per cui $y_{Cauchy}(t) = t - 2te^{1-t^4/4}$, $t > 0$.

(4) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = -2\log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{t^2}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{t^2}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{t^2} - \frac{2c(t)}{t^3}$, e quindi $\frac{c'(t)}{t^2} - \frac{2c(t)}{t^3} = -\frac{2c(t)}{t^3} + \frac{1}{t+1} \iff c'(t) = \frac{t^2}{t+1} \implies c(t) = \int \frac{t^2}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}\,t^2 - t + \log|t+1|$. Quindi $y_p(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\,\log|t+1|$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\,\log|t+1|$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{1}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{t^2}\,\log(t+1)$, $t > 0$.

(5) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dt}{t+1} \iff \log|y| = -2\log|t+1| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{(t+1)^2}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{(t+1)^2}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{(t+1)^2} - \frac{2c(t)}{(t+1)^3}$, e quindi $\frac{c'(t)}{(t+1)^2} - \frac{2c(t)}{(t+1)^3} = -\frac{2c(t)}{(t+1)^3} + \frac{1}{t} \iff c'(t) = \frac{t^2}{t+1} \implies c(t) = \int \frac{(t+1)^2}{t}\,dt = \frac{1}{2}\,t^2 + 2t + \log|t|$. Quindi $y_p(t) = \frac{t^2+4t+\log t^2}{2(t+1)^2}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{2c+4t+t^2+\log t^2}{2(t+1)^2}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $2c = -1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{-1+4t+t^2+\log t^2}{2(t+1)^2}$, $t > 0$.

(6) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = 2\log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ct^2$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)t^2$, per cui $y_p'(t) = c'(t)t^2 + 2tc(t)$, e quindi $c'(t)t^2 + 2tc(t) = 2tc(t) + \frac{t+1}{t} \iff c'(t) = \frac{t+1}{t^2} \implies c(t) = \int \frac{t+1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}$. Quindi $y_p(t) = -t - \frac{1}{2}$, per cui $y_{gen}(t) = ct^2 - t - \frac{1}{2}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{9}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{9}{2}\,t^2 - t - \frac{1}{2}$, $t > 0$.

(7) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{(t-1)\,dt}{t} \iff \log|y| = t - \log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{t}\,e^t$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{t}\,e^t$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{t}\,e^t + c(t)\,\frac{t-1}{t^2}\,e^t$, e quindi $\frac{c'(t)}{t}\,e^t + c(t)\,\frac{t-1}{t^2}\,e^t = c(t)\,\frac{t-1}{t^2}\,e^t + t^2 \iff c'(t) = t^3e^{-t} \implies c(t) = \int t^3e^{-t}\,dt = -(t^3+3t^2+6t+6)e^{-t}$.
Quindi $y_p(t) = -t^2 - 3t - 6 - \frac{6}{t}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{t}\,e^t - t^2 - 3t - 6 - \frac{6}{t}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{16}{e}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{16}{t}\,e^{t-1} - t^2 - 3t - 6 - \frac{6}{t}$, $t > 0$.

(8) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t(t^2+1)} \iff \log|y| = \log|t| - \frac{1}{2}\,\log(t^2+1) + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{ct}{\sqrt{t^2+1}}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)t}{\sqrt{t^2+1}}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{c(t)}{(t^2+1)^{3/2}}$, e quindi $\frac{c'(t)t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{c(t)}{(t^2+1)^{3/2}} = \frac{c(t)}{(t^2+1)^{3/2}} + \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \iff c'(t) = \frac{t^2+1}{t^2} \implies c(t) = \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt = t - \frac{1}{t} = \frac{t^2-1}{t}$.
Quindi $y_p(t) = \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2+1}}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{t^2-1+ct}{\sqrt{t^2+1}}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -\frac{3}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{2t^2-3t-2}{2\sqrt{t^2+1}}$, $t > 0$.

(9) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \iff \log|y| = 2\sqrt{t} + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ce^{2\sqrt{t}}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)e^{2\sqrt{t}}$, per cui $y_p'(t) = c'(t)e^{2\sqrt{t}} + c(t)\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$, e quindi $\chi'(t)e^{2\sqrt{t}} + c(t)\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = c(t)\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \iff c'(t) = \sqrt{t}\,e^{-2\sqrt{t}} \implies c(t) = \int \sqrt{t}\,e^{-2\sqrt{t}}\,dt = -\left(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-2\sqrt{t}}$. Quindi $y_p(t) = -\left(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2}\right)$, per cui $y_{gen}(t) = ce^{2\sqrt{t}} - \left(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2}\right)$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{3}{e^2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = 3e^{2(\sqrt{t}-1)} - \left(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2}\right)$, $t > 0$.

(10) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = -\frac{1}{2} \log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}$ [usando la condizione iniziale].
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{\sqrt{t}}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{c(t)}{2t^{3/2}}$, e quindi $\frac{c'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{c(t)}{2t^{3/2}} = -\frac{c(t)}{2t^{3/2}} + \sqrt{t} \iff c'(t) = t \implies c(t) = \int t\,dt = \frac{1}{2}\,t^2$. Quindi $y_p(t) = \frac{1}{2}\,t^{3/2}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\,t^{3/2}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -\frac{1}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{t^2-1}{2\sqrt{t}}$, $t > 0$.

(11) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t\log t} \iff \log|y| = \log|\log t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = c\log t$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)\log t$, per cui $y_p'(t) = c'(t)\log t + \frac{c(t)}{t}$, e quindi $c'(t)\log t + \frac{c(t)}{t} = \frac{c(t)}{t} + \frac{1}{t} \iff c'(t) = \frac{1}{t\log t} \implies c(t) = \int \frac{dt}{t\log t} = \log|\log t|$. Quindi $y_p(t) = \log t\,\log|\log t|$, per cui $y_{gen}(t) = (c + \log|\log t|)\log t$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = (1 + \log\log t)\log t$, $t > 1$.

(12) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \sin t\,dt \iff \log|y| = -\cos t + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ce^{-\cos t}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)e^{-\cos t}$, per cui $y_p'(t) = c'(t)e^{-\cos t} + c(t)\sin t e^{-\cos t}$, e quindi $c'(t)e^{-\cos t} + c(t)\sin te^{-\cos t} = c(t)\sin te^{-\cos t} + \sin t\cos^2 t \iff c'(t) = \sin t\cos^2 te^{\cos t} \implies c(t) = \int \sin t\cos^2 te^{\cos t}\,dt = -(\cos^2 t - 2\cos t + 2)e^{\cos t}$. Quindi $y_p(t) = -(\cos^2 t - 2\cos t + 2)$, per cui $y_{gen}(t) = ce^{-\cos t} - (\cos^2 t - 2\cos t + 2)$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 3$, per cui $y_{Cauchy}(t) = 3e^{-\cos t} - (\cos^2 t - 2\cos t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(13) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg} t\,dt \iff \log|y| = -\log|\cos t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{\cos t}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{\cos t}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{\cos t} + c(t)\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}$, e quindi $\frac{c'(t)}{\cos t} + c(t)\,\frac{\sin t}{\cos^2 t} = c(t)\,\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \sin t \iff c'(t) = \sin t\cos t \implies c(t) = \int \sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\,\sin^2 t$. Quindi $y_p(t) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 t}{\cos t}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{\cos t} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2 t}{\cos t}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 2$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{4+\sin^2 t}{2\cos t}$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(14) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{ctg} t\,dt \iff \log|y| = \log|\sin t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = c\sin t$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)\sin t$, per cui $y_p'(t) = c'(t)\sin t + c(t)\cos t$, e quindi $c'(t)\sin t + c(t)\cos t = c(t)\cos t + \sin t \iff c'(t) = 1 \implies c(t) = t$. Quindi $y_p(t) = t\sin t$, per cui $y_{gen}(t) = (c + t)\sin t$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 2 - \frac{\pi}{6}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \big(2 - \frac{\pi}{6} + t\big)\sin t$, $t \in (0, \pi)$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ ha radici $\lambda = 1$, $\lambda = 4$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1e^t + a_2e^{4t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ -1 = y_{gen}'(0) = a_1e^t + 4a_2e^{4t}\big|_{t=0} = a_1 + 4a_2, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = \frac{5}{3}$, $a_2 = -\frac{2}{3}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{5}{3}\,e^t - \frac{2}{3}\,e^{4t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$ ha radici $\lambda = \pm 2i$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 2 = y'_{gen}(0) = 2a_2 \cos 2t\big|_{t=0} = 2a_2, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ ha radici $\lambda = 0$, $\lambda = -2$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 e^{-2t}$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ 0 = y'_{gen}(0) = -2a_2 e^{-2t}\big|_{t=0} = -2a_2, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Allora $y_{Cauchy}(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(4) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ ha radici $\lambda = -2$, $\lambda = 3$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{3t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = ae^{4t} + b$. Allora $y'_p(t) = 4ae^{4t}$, $y''_p(t) = 16ae^{4t}$, per cui $16ae^{4t} - 4ae^{4t} - 6ae^{4t} - 6b = -e^{4t} + 6$, e quindi $a = -\frac{1}{6}$, $b = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{3t} - \frac{1}{6}\, e^{4t} - 1$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 - \frac{1}{6} - 1 \\ \frac{1}{3} = y'_{gen}(0) = -2a_1 e^{-2t} + 3a_2 e^{3t} - \frac{2}{3}\, e^{4t}\big|_{t=0} = -2a_1 + 3a_2 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2}\, e^{-2t} + \frac{2}{3}\, e^{3t} - \frac{1}{6}\, e^{4t} - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(5) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ ha radici $\lambda = -4$, $\lambda = 1$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-4t} + a_2 e^{t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a \cos t + b \sin t + c$. Allora $y'_p(t) = -a \sin t + b \cos t$, $y''_p(t) = -a \cos t - b \sin t$, per cui $-a \cos t - b \sin t + 3(-a \sin t + b \cos t) - 4(a \cos t + b \sin t + c) = 4 + 17 \sin t$, e quindi $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-4t} + a_2 e^{t} - \frac{3}{2}\, \cos t - \frac{5}{2}\, \sin t - 1$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} = y'_{gen}(0) = -4a_1 e^{-4t} + a_2 e^{t} + \frac{3}{2}\, \sin t - \frac{5}{2}\, \cos t\big|_{t=0} = -4a_1 + a_2 - \frac{5}{2} \end{cases}$$

cioè $a_1 = -\frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{11}{5}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = -\frac{1}{5}\, e^{-4t} + \frac{11}{5}\, e^{t} - \frac{3}{2}\, \cos t - \frac{5}{2}\, \sin t - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(6) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0$ ha radici $\lambda = \pm i$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a \cos 2t + b \sin 2t$. Allora $y'_p(t) = -2a \sin 2t + 2b \cos 2t$, $y''_p(t) = -4a \cos 2t - 4b \sin 2t$, per cui $-4a \cos 2t - 4b \sin 2t + a \cos 2t + b \sin 2t = \sin 2t$, e quindi $a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - \frac{1}{3}\, \sin 2t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 0 = y'_{gen}(0) = -a_1 \sin t + a_2 \cos t - \frac{2}{3}\, \cos 2t\big|_{t=0} = a_2 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

cioè $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \cos t + \frac{2}{3}\, \sin t - \frac{1}{3}\, \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

(7) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2+2\lambda+5=0$ ha radici $\lambda=-1\pm 2i$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^{-t}\cos 2t+a_2e^{-t}\sin 2t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=ae^{-t}$. Allora $y_p'(t)=-ae^{-t}$, $y_p''(t)=ae^{-t}$, per cui $ae^{-t}-2ae^{-t}+5ae^{-t}=e^{-t}$, e quindi $a=\frac{1}{4}$, $b=0$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1e^{-t}\cos 2t+a_2e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1=y_{gen}(0)=a_1+\frac{1}{4} \\ 0=y_{gen}'(0)=-(2a_1+a_2)e^{-t}\sin 2t+(2a_2-a_1)e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{4}\,e^{-t}\big|_{t=0}=2a_2-a_1-\frac{1}{4} \end{cases}$$

cioè $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=\frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t)=\frac{3}{4}\,e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{2}\,e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$.

(8) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2+2\lambda+1=0$ ha radice $\lambda=-1$ (doppia). Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^{-t}+a_2te^{-t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=ae^{t}$. Allora $y_p'(t)=ae^{t}$, $y_p''(t)=ae^{t}$, per cui $ae^t+2ae^t+ae^t=e^t$, e quindi $a=\frac{1}{4}$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1e^{-t}+a_2te^{-t}+\frac{1}{4}\,e^{t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1=y_{gen}(0)=a_1+\frac{1}{4} \\ 0=y_{gen}'(0)=-a_1e^{-t}-a_2(t-1)e^{-t}+\frac{1}{4}\,e^{t}\big|_{t=0}=-a_1+a_2+\frac{1}{4} \end{cases}$$

cioè $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=\frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t)=\frac{3}{4}\,e^{-t}+\frac{1}{2}\,te^{-t}+\frac{1}{4}\,e^{t}$, $t\in\mathbb{R}$.

(9) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2+3\lambda+2=0$ ha radici $\lambda=-2$, $\lambda=-1$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^{-2t}+a_2e^{-t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=ate^{-t}$. Allora $y_p'(t)=-a(t-1)e^{-t}$, $y_p''(t)=a(t-2)e^{-t}$, per cui $a(t-2)e^{-t}-3a(t-1)e^{-t}+2ate^{-t}=e^{-t}$, e quindi $a=1$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1e^{-2t}+a_2e^{-t}+te^{-t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}=y_{gen}(0)=a_1+a_2 \\ \frac{1}{2}=y_{gen}'(0)=-2a_1e^{-2t}-a_2e^{-t}-(t-1)e^{-t}\big|_{t=0}=-2a_1-a_2+1 \end{cases}$$

cioè $a_1=1$, $a_2=-\frac{3}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t)=e^{-2t}-\frac{3}{2}\,e^{-t}+te^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$.

(10) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2-\lambda=0$ ha radici $\lambda=0$, $\lambda=1$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1+a_2e^{t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=t(at+b)=at^2+bt$. Allora $y_p'(t)=2at+b$, $y_p''(t)=2a$, per cui $2a-2at-b=t$, e quindi $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1+a_2e^t-\frac{1}{2}\,t^2-t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1=y_{gen}(0)=a_1+a_2 \\ 1=y_{gen}'(0)=a_2e^t-1\big|_{t=0}=a_2-1 \end{cases}$$

cioè $a_1=-1$, $a_2=2$. Allora $y_{Cauchy}(t)=-1+2\,e^t-\frac{1}{2}\,t^2-t$, $t\in\mathbb{R}$.

(11) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ ha radici $\lambda = 0$, $\lambda = 2$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 + a_2 e^{2t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = ate^{2t} + t(bt + c)$. Allora $y_p'(t) = a(2t+1)e^{2t} + 2bt + c$, $y_p''(t) = 4a(t+1)e^{2t} + 2b$, per cui $4a(t+1)e^{2t} + 2b - 2\big(a(2t+1)e^{2t} + 2bt + c\big) = e^{2t} + t - 1$, e quindi $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 e^{2t} + \frac{1}{2}\, te^{2t} - \frac{1}{4}\, t^2 + \frac{1}{4}\, t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ \frac{1}{4} = y_{gen}'(0) = 2a_2 e^{2t} + (2t+1)e^{2t} - \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{4}\big|_{t=0} = 2a_2 + \frac{5}{4} \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{2t} + \frac{1}{2}\, te^{2t} - \frac{1}{4}\, t^2 + \frac{1}{4}\, t$, $t \in \mathbb{R}$.

(12) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 = 0$ ha radici $\lambda = 0$ (doppia). Quindi, $y_{om}(t) = a_1 + a_2 t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t^2(at^2 + bt + c) = at^4 + bt^3 + ct^2$. Allora $y_p'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct$, $y_p''(t) = 12at^2 + 6t + 2c$, per cui $12at^2 + 6t + 2c = t^2$, e quindi $a = \frac{1}{12}$, $b = c = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 t + \frac{1}{12}\, t^2$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 1 = y_{gen}'(0) = a_2 + \frac{1}{6}\, t\big|_{t=0} = a_2 \end{cases}$$

cioè $a_1 = a_2 = 1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = 1 + t + \frac{1}{12}\, t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

(13) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0$ ha radici $\lambda = \pm i$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t(a\cos t + b \sin t)$. Allora $y_p'(t) = (a + bt)\cos t + (b - at)\sin t$, $y_p''(t) = (2b - at)\cos t - (2a + bt)\sin t$, per cui $(2b - at)\cos t - (2a + bt)\sin t + at\cos t + bt\sin t = \sin t$, e quindi $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - \frac{1}{2}\, t\cos t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 0 = y_{gen}'(0) = -a_1 \sin t + a_2 \cos t - \frac{1}{2}\,(\cos t - t \sin t)\big|_{t=0} = a_2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

cioè $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \cos t + \frac{1}{2}\, \sin t - \frac{1}{2}\, t\cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

(14) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ha radice $\lambda = -1$ (doppia). Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-t} + a_2 te^{-t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t^2(at + b)e^{-t}$. Allora $y_p'(t) = \big(-at^3 + (3a - b)t^2 + 2bt\big)e^{-t}$, $y_p''(t) = \big(at^3 + (b - 6a)t^2 + 2(3a - 2b)t + 2b\big)e^{-t}$, per cui $\big(at^3 + (b - 6a)t^2 + 2(3a - 2b)t + 2b\big)e^{-t} + 2\big(-at^3 + (3a - b)t^2 + 2bt\big)e^{-t} + (at^3 + bt^2)e^{-t} = te^{-t}$, e quindi $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-t} + a_2 te^{-t} + \frac{1}{6}\, t^3 e^{-t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = y_{gen}(0) = a_1 \\ -\frac{1}{2} = y_{gen}'(0) = -a_1 e^{-t} - a_2(t - 1)e^{-t} - \frac{1}{6}\,(t^3 - 3t^2)e^{-t}\big|_{t=0} = -a_1 + a_2 \end{cases}$$

cioè $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = -\frac{1}{2}\, e^{-t} - te^{-t} + \frac{1}{6}\, t^3 e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(15) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2+2\lambda+5=0$ ha radici $\lambda=-1\pm 2i$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^{-t}\cos 2t+a_2e^{-t}\sin 2t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=t(ae^{-t}\cos 2t+be^{-t}\sin 2t)$. Allora $y_p'(t)=(a-at+2bt)e^{-t}\cos 2t+(b-2at-bt)e^{-t}\sin 2t$, $y_p''(t)=\big(-2a+4b-3at-4bt\big)e^{-t}\cos 2t+(-4a-2b+4at-3bt)e^{-t}\sin 2t$, per cui $\big(-2a+4b-3at-4bt\big)e^{-t}\cos 2t+(-4a-2b+4at-3bt)e^{-t}\sin 2t+2(a-at+2bt)e^{-t}\cos 2t+2(b-2at-bt)e^{-t}\sin 2t+5ate^{-t}\cos 2t+5bte^{-t}\sin 2t=e^{-t}\cos 2t$, e quindi $a=0$, $b=\frac{1}{4}$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1e^{-t}\cos 2t+a_2e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}\sin 2t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases}1=y_{gen}(0)=a_1\\ 0=y_{gen}'(0)=-(2a_1+a_2)e^{-t}\sin 2t+(2a_2-a_1)e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}(-\sin 2t+2\cos 2t)\big|_{t=0}=2a_2-a_1+\frac{1}{2}\end{cases}$$

cioè $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{4}$. Allora $y_{Cauchy}(t)=e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}\sin 2t$, $t\in\mathbb{R}$.

(16) L'equazione caratteristica $\lambda^3-\lambda=0$ ha radici $\lambda=0$, $\lambda=\pm 1$. Quindi, $y_{gen}(t)=a_1+a_2e^t+a_3e^{-t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases}0=y_{gen}(0)=a_1+a_2+a_3\\ 1=y_{gen}'(0)=a_2e^t-a_3e^{-t}\big|_{t=0}=a_2-a_3\\ 1=y_{gen}''(0)=a_2e^t+a_3e^{-t}\big|_{t=0}=a_2+a_3,\end{cases}$$

che ha soluzione $a_1=-1$, $a_2=1$, $a_3=0$. Allora $y_{Cauchy}(t)=e^t-1$, $t\in\mathbb{R}$.

(17) L'equazione caratteristica $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ ha radice tripla $\lambda=1$. Quindi, $y_{gen}(t)=(a_1+a_2t+a_3t^2)e^t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases}1=y_{gen}(0)=a_1\\ 0=y_{gen}'(0)=(a_2+2a_3t+a_1+a_2t+a_3t^2)e^t\big|_{t=0}=a_1+a_2\\ 2=y_{gen}''(0)=(2a_3+a_2+2a_3t+a_2+2a_3t+a_1+a_2t+a_3t^2)e^t\big|_{t=0}=a_1+a_2+2a_3\end{cases}$$

cioè $a_1=a_3=1$, $a_2=-1$. Allora $y_{Cauchy}(t)=(1-t+t^2)e^t$, $t\in\mathbb{R}$.

(18) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^3+\lambda^2-2=0$ ha radici $\lambda=1$, $\lambda=-1\pm i$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^t+a_2e^{-t}\sin t+a_3e^{-t}\cos t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=ate^t$. Allora $y_p'(t)=a(t+1)e^t$, $y_p''(t)=a(t+2)e^t$, $y_p'''(t)=a(t+3)e^t$, per cui $a(t+3)e^t+a(t+2)e^t-2ate^t=5e^t$, e quindi $a=1$. Quindi $y_{gen}(t)=(a_1+t)e^t+a_2e^{-t}\sin t+a_3e^{-t}\cos t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases}1=y_{gen}(0)=a_1+a_3\\ 1=y_{gen}'(0)=(a_1+1+t)e^t+\big((a_2-a_3)\cos t+(-a_2-a_3)\sin t\big)e^{-t}\big|_{t=0}=a_1+1+a_2-a_3\\ 0=y_{gen}''(0)=(a_1+2+t)e^t+\big((-a_2+a_3-a_2-a_3)\cos t+(a_2+a_3-a_2+a_3)\sin t\big)e^{-t}\big|_{t=0}=a_1+2-2a_2\end{cases}$$

cioè $a_1=0$, $a_2=a_3=1$. Allora $y_{Cauchy}(t)=e^{-t}(\sin t+\cos t)$, $t\in\mathbb{R}$.

(19) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^4-4\lambda^2=0$ ha radici $\lambda=0$ (doppia), $\lambda=\pm 2$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1+a_2t+a_3e^{2t}+a_4e^{-2t}$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = at^2$. Allora $y_p'(t) = 2at$, $y_p''(t) = 2a$, $y_p'''(t) = y^{(4)}(t) = 0$, per cui $-8a = 8$, e quindi $a = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 e^{2t} + a_4 e^{-2t} - t^2$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_3 + a_4 \\ 0 = y'_{gen}(0) = a_2 + 2a_3 e^{2t} - 2a_4 e^{-2t} - 2t\big|_{t=0} = a_2 + 2a_3 - 2a_4 \\ 2 = y''_{gen}(0) = 4a_3 e^{2t} + 4a_4 e^{-2t} - 2\big|_{t=0} = 4a_3 + 4a_4 - 2 \\ 1 = y''_{gen}(0) = 8a_3 e^{2t} - 8a_4 e^{-2t}\big|_{t=0} = 8a_3 - 8a_4 \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{3}{4}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t - t^2 + e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(20) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ ha radici doppie $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. Quindi, $y_{om}(t) = (a_1 + a_2 t)\sin t + (a_3 + a_4 t)\cos t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a$. Allora $y_p'(t) = y_p''(t) = y_p'''(t) = y^{(4)}(t) = 0$, per cui $a = 1$. Quindi $y_{gen}(t) = (a_1 + a_2 t)\sin t + (a_3 + a_4 t)\cos t + 1$.

Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_3 + 1 \\ 1 = y'_{gen}(0) = a_2 \sin t + (a_1 + a_2 t)\cos t + a_4 \cos t - (a_3 + a_4 t)\sin t\big|_{t=0} = a_1 + a_4 \\ 1 = y''_{gen}(0) = a_2 \cos t - a_4 \sin t + (a_2 - a_3 - a_4 t)\cos t - (a_1 + a_4 + a_2 t)\sin t\big|_{t=0} = 2a_2 - a_3 \\ 1 = y''_{gen}(0) = -a_4 \cos t - a_2 \sin t - (2a_2 - a_3 + a_4 t)\sin t - (a_1 + 2a_4 + a_2 t)\cos t\big|_{t=0} = -a_1 - 3a_4 \end{cases}$$

cioè $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = (2 + \frac{1}{2}t)\sin t - t\cos t + 1$, $t \in \mathbb{R}$.

$\square$