Analisi Matematica I
Calcolo differenziale e applicazioni (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x\to 0} |x| = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(2) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} |x|(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(3) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(4) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\sqrt[3]{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(5) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(6) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|e^x-1|\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\sin\sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\sqrt[3]{x}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(7) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\log(1+|x|)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|(1+o(1))} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}|x|(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(8) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+o(1))} = 1$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(9) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|\log(1+x)|^{1/2}|x|^{3/4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{5/4}(1+o(1))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}|x|^{1/4}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(10) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(11) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(12) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(13) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|\sin^3 x|}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{3/2}(1+o(1))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}(1 + o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(14) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}(1 + o(1)) = \pm 1$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è angoloso.

(15) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}\frac{1}{\sqrt{|x|}} = \pm\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è di cuspide.

(16) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin^2|x|}{x\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|^2(1+o(1))}{x^{7/3}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(1 + o(1)) = \pm\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è di cuspide.

(17) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|1-e^x|}{x\sqrt[5]{x}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|(1+o(1))}{x\sqrt[5]{x}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}(1 + o(1)) = +\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è a tangente verticale.

(18) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|1-e^x|}}{x\sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}(1+o(1))}{x\sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}\frac{1}{|x|^{7/10}}(1 + o(1)) = \pm\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è di cuspide.

(19) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \sin\frac{1}{x} = \nexists$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha $f(x) = e^{\frac{1}{x}\log x}$, per cui $f'(x) = e^{\frac{1}{x}\log x}\frac{1-\log x}{x^2}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, e quindi la retta tangente è $y = 1 + (x-1) = x$.

(2) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x\log x}$, $f(e) = 0$, $f'(e) = \frac{1}{e}$, e quindi la retta tangente è $y = \frac{1}{e}(x-e) = \frac{x}{e} - 1$.

(3) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x(1+\log x)^2}$, $f(e) = \frac{1}{2}$, $f'(e) = \frac{1}{4e}$, e quindi la retta tangente è $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4e}(x-e) = \frac{x}{4e} + \frac{1}{4}$.

(4) Si ha $f'(x) = 4xe^{2x^2+1}\cos(e^{2x^2+1})$, $f(1) = \sin(e^3)$, $f'(1) = 4e^3\cos(e^3)$, e quindi la retta tangente è $y = \sin(e^3) + 4e^3\cos(e^3)(x-1)$.

(5) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-(\log x+1)^2}}$, $f(\frac{1}{e}) = 0$, $f'(\frac{1}{e}) = e$, e quindi la retta tangente è $y = e(x-\frac{1}{e}) = ex-1$.

(6) Si ha $f'(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\arcsin x)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$, $f(\frac{1}{2}) = \log\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}$, e quindi la retta tangente è $y = \log\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} + \log\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(7) Si ha $f'(x) = \frac{\cosh x}{\sqrt{1+(1+\sinh x)^2}}$, $f(0) = \operatorname{arsinh} 1 = \log 2$, $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e quindi la retta tangente è $y = \log 2 + \frac{x}{\sqrt{2}}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 3

(1) Si ha $f'(x) = 3(x^2+x-2)$ e $f'(x) = 0 \iff x = -2 \notin A^o \ \vee x = 1 \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 3, 1\}$. Si ha $f(-2) = 11$, $f(3) = \frac{47}{2} = \max_A f$, $f(1) = -\frac{5}{2} = \min_A f$.

(2) Si ha $f'(x) = \begin{cases} 3(x^2+x-2), & 0 < x < 3, \\ -3(x^2-x+2), & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = 1 \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 3, 0, 1\}$. Si ha $f(-2) = 27 = \max_A f$, $f(3) = \frac{47}{2}$, $f(0) = 1$,$f(1) = -\frac{5}{2} = \min_A f$.

(3) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 0 < x < 2, \\ -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & -1 < x < 0, \end{cases}$ per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-1, 2, 0\}$. Si ha $f(-1) = 1$, $f(2) = \sqrt[3]{2} = \max_A f$, $f(0) = 0 = \min_A f$.

(4) Si ha $f'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \\ -2x, & -2 < x < 0, \end{cases}$ per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 1, 0\}$. Si ha $f(-2) = -4 = \min_A f$, $f(1) = 1 = \max_A f$, $f(0) = 0$.

(5) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}, & 0 < x < 3, \\ \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}, & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = 1+\sqrt{2} \in A^o \ \vee x = -1-\sqrt{2} \notin A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\left\{-2, 3, 0, 1+\sqrt{2}\right\}$. Si ha $f(-2) = \frac{6}{5}$, $f(3) = \frac{6}{5}$, $f(0) = 0 = \min_A f$, $f(1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \max_A f$.

(6) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{3(x^2+4x-4)}{(x^2+4)^2}, & 0 < x < 3, \\ \frac{-6(x^2-2)}{(x^2+4)^2}, & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{8} - 2 \in A^o \vee x = -\sqrt{2} \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 2, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{8} - 2\}$. Si ha $f(-2) = \frac{1}{4}$, $f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(-1) = \frac{2}{5} = \max_A f$, $f(-\sqrt{2}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\sqrt{8} - 2) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{2} = \min_A f$. □

Svolgimento esercizio 4

(1) Sia $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{2x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = 2 + o(1)$, per cui $y = 2$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{4x(x^2+1)-2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \iff x \geq 0$.

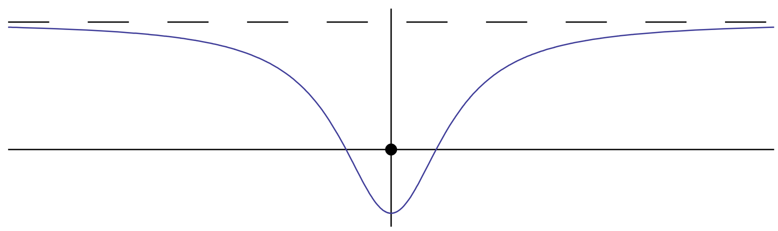

Figura 1: Grafico per l'esercizio 4 (1)

Allora, $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Si ha $f(0) = -1$.
Il grafico è riportato in figura 1.

(2) Sia $f(x) = \frac{x^2+2x}{2x^2-1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{2x^2(1+o(1))} = \frac{1}{2}(1 + o(1))$, per cui $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$. Per $x \to (-\frac{1}{\sqrt{2}})^\pm$, si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\sqrt{2}+o(1)}{(-2+o(1))(\sqrt{2}x+1)} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}x+1}(1 + o(1)) \to \pm\infty$. Per $x \to (\frac{1}{\sqrt{2}})^\pm$, si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{2}+o(1)}{(2+o(1))(\sqrt{2}x-1)} = \frac{2\sqrt{2}+1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}x-1}(1 + o(1)) \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{(2x+2)(2x^2-1)-4x(x^2+2x)}{(2x^2-1)^2} = \frac{-2(2x^2+x+1)}{(2x^2-1)^2} \leq 0 \iff x \in \operatorname{dom} f$.

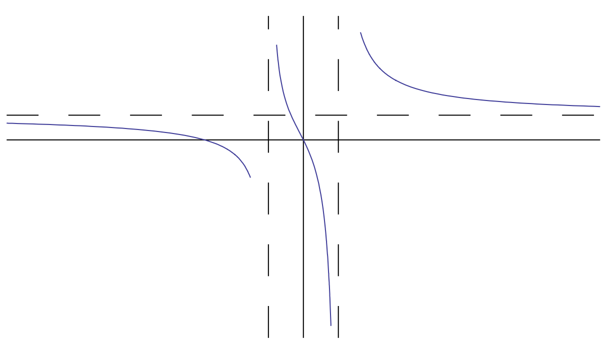

Figura 2: Grafico per l'esercizio 4 (2)

Il grafico è riportato in figura 2.

(3) Sia $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = 1 + o(1)$, per cui $y = 1$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}, & x > 0, \\ \frac{x^2+2x-1)}{(x^2+1)^2}, & x < 0, \end{cases}$ per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1-\sqrt{2}] \cup (0, 1+\sqrt{2}]$. Si ha poi $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \pm 1$.

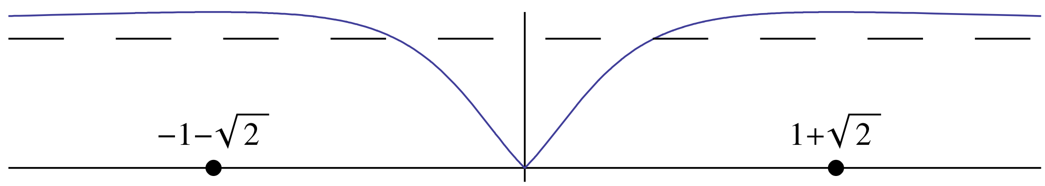

Figura 3: Grafico per l'esercizio 4 (3)

Allora, $x = \pm(1+\sqrt{2})$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di minimo relativo ed è angoloso. Si ha $f(0) = 0$, $f\big(\pm(1+\sqrt{2})\big) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
Il grafico è riportato in figura 3.

(4) Sia $f(x) = x^2 - 3x^{2/3}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Si ha, per $x \to \pm\infty$, $f(x) = x^2(1+o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2(x^{4/3}-1)}{\sqrt[3]{x}} \geq 0 \iff x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty)$. Si ha anche $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{2(x^{4/3}-1)}{\sqrt[3]{x}} = \mp\infty$.

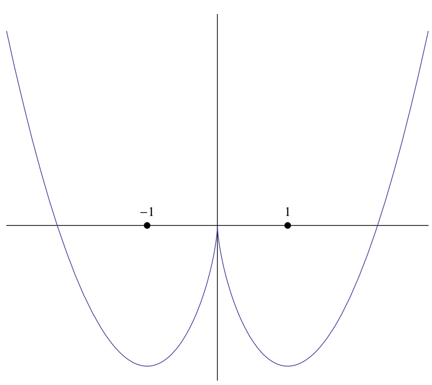

Figura 4: Grafico per l'esercizio 4 (4)

Allora, $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo e di cuspide. Si ha $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = -2$.
Il grafico è riportato in figura 4.

(5) Sia $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1} = \frac{1}{x^{2/3}(1+o(1))} = o(1)$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$. Per $x \to (-1)^\pm$, si ha $f(x) = -\frac{1}{x+1}(1+o(1)) \to \mp\infty$, per cui $x = -1$ è asintoto verticale di f.

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, si ha $f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}(x+1) - \sqrt[3]{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-2x}{3x^{2/3}(x+1)^2} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2}]$. Si ha poi $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3x^{2/3}} 1 + o(1) = +\infty$.

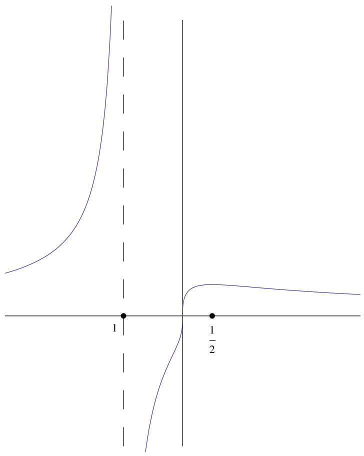

Figura 5: Grafico per l'esercizio 4 (5)

Allora, $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.
Il grafico è riportato in figura 5.

(6) Sia $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} = x\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = x(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) = x - 1 + o(1)$, per cui $y = x - 1$ è asintoto obliquo di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, si ha $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x^3 - 3x^2)^{2/3}} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$. Si ha poi $f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{-2x(1+o(1))}{(-3x^2)^{2/3}(1+o(1))} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{2}{\sqrt[3]{9x}(1+o(1))} = \pm\infty$, cioè $x = 0$ è un punto di cuspide, e $f'_{\pm}(3) = \lim_{x \to 3^\pm} f'(x) = \lim_{x \to 3^\pm} \frac{3 + o(1)}{9^{4/3}(x-3)^{2/3}(1+o(1))} = +\infty$, cioè $x = 3$ è un punto di flesso a tangente verticale.

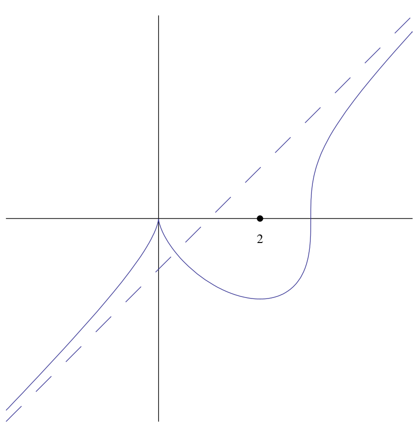

Figura 6: Grafico per l'esercizio 4 (6)

Allora, $x = 2$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(0) = f(3) = 0$, e $f(2) = -\sqrt[3]{4}$.
Il grafico è riportato in figura 6.

(7) Sia $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{|3-x^2|} - 2}$. Si ha $\operatorname{dom} f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -\sqrt{\sqrt{7}-1}] \cup [\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, f è continua, e pari. Per $x \to +\infty$, si ha $f(x) = \sqrt{\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3}} = \sqrt{\frac{x^4-3x^2+x^2+6}{x^2-3}} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2+6}{x^2-3}} = x\sqrt{1 + \frac{x^2+6}{x^2(x^2-3)}} = x\big(1 + \frac{x^2+6}{2x^2(x^2-3)}\big) = x + o(1)$, per cui $y = x$ è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$, e, di conseguenza, $y = -x$ è asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$. Per $x \to \sqrt{3}$, si ha $f(x) = \sqrt{\frac{9}{2\sqrt{3}|x-\sqrt{3}|}(1 + o(1))} \to +\infty$, per cui $x = \sqrt{3}$ è asintoto verticale di f.

Inoltre, per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap (0, +\infty)$, si ha $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^4+2x^2-6}{3-x^2}}, & x \in [\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}), \\ \sqrt{\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3}}, & x \in (\sqrt{3}, +\infty), \end{cases}$ per cui

$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^3(6-x^2)}{(3-x^2)^{3/2}\sqrt{x^4+2x^2-6}}, & x \in (\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}), \\ \frac{x^3(x^2-6)}{(x^2-3)^{3/2}\sqrt{x^4-2x^2+6}}, & x \in (\sqrt{3}, +\infty), \end{cases}$ per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$. Si ha poi $f'_+(\sqrt{\sqrt{7}-1}) = \lim_{x\to(\sqrt{\sqrt{7}-1})^+} f'(x) = +\infty$.

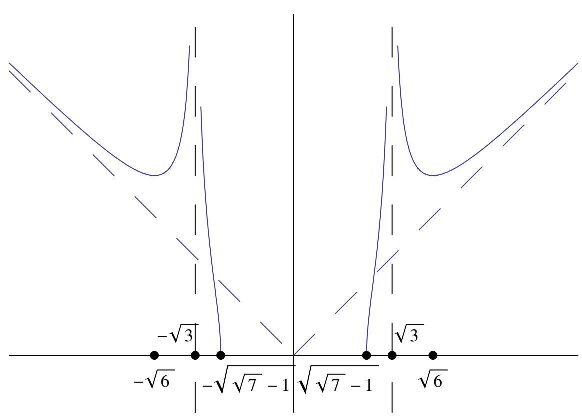

Figura 7: Grafico per l'esercizio 4 (7)

Allora, $x = \pm\sqrt{\sqrt{7}-1}$ e $x = \pm\sqrt{6}$ sono punti di minimo relativo. Si ha $f(\pm\sqrt{\sqrt{7}-1}) = 0$, $f(\pm\sqrt{6}) = \sqrt{10}$.
Il grafico è riportato in figura 7.

(8) Sia $f(x) = x^2\big(\log\frac{x}{4} - 1\big)^2$. Si ha $\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to +\infty$, si ha $f(x) = x^2(\log x)^2(1 + o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \to +\infty$. Per $x \to 0^+$, si ha $f(x) = x^2(\log x)^2(1 + o(1)) \to 0$.
Inoltre, per ogni $x \in (0, +\infty)$, si ha $f'(x) = 2x\big(\log\frac{x}{4} - 1\big)^2 + x^2 \cdot 2\big(\log\frac{x}{4} - 1\big)\frac{1}{x} = 2x\log\frac{x}{4}\big(\log\frac{x}{4} - 1\big) \geq 0 \iff x \in (0, 4) \cup (4e, +\infty)$. Si ha poi $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x(\log x)^2(1 + o(1)) = 0$.
Allora, $x = 4$ è un punto di massimo relativo, mentre $4e$ è un punto di minimo relativo. Si ha $f(4) = 16$, $f(4e) = 0$.
Il grafico è riportato in figura 8.

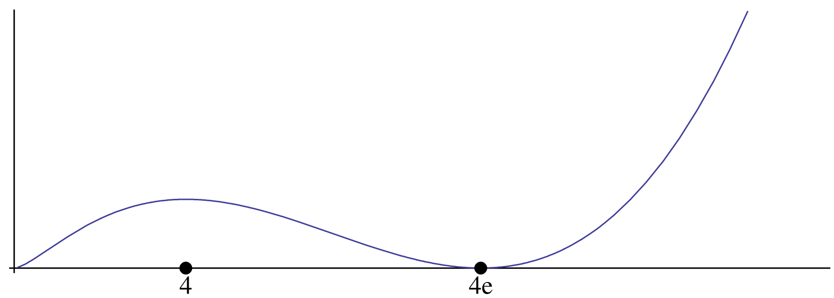

Figura 8: Grafico per l'esercizio 4 (8)

(9) Sia $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x+2}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x \to -2^\pm} \frac{e^{-x^2}}{x+2} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{x+2} = 0,$$

per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{-2x(x+2)-1}{(x+2)^2} e^{-x^2} = -\frac{2x^2+4x+1}{(x+2)^2} e^{-x^2} \geq 0 \iff x \in [-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

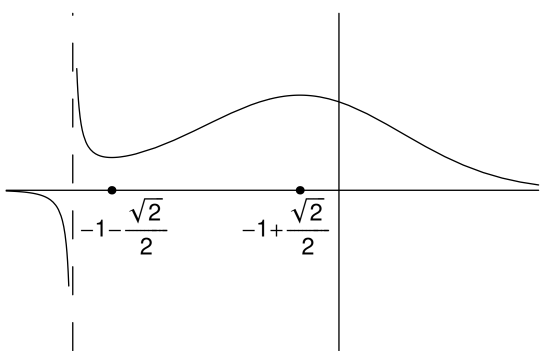

Figura 9: Grafico per l'esercizio 4 (9)

Allora, $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo relativo.
Il grafico è riportato in figura 9.

(10) Sia $f(x) = (x^2 + 12x)e^{-2/x}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = x^2(1 + o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \to \pm\infty$. Per $x \to 0^+$, si ha $f(x) = 12xe^{-2/x}(1 + o(1)) \to 0$, mentre per $x \to 0^-$, si ha $f(x) = 12xe^{-2/x}(1 + o(1)) \to +\infty$, per cui $x = 0$ è asintoto verticale di f.
Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha $f'(x) = (2x+12)e^{-2/x} + (x^2+12x) \cdot \frac{2}{x^2} e^{-2/x} = \frac{2e^{-2/x}}{x}(x^2+7x+12) \geq 0 \iff x \in (-4, -3) \cup (0, +\infty)$. Si ha poi $\lim_{x \to 0^+} f'(x) \overset{(z=1/x)}{=} \lim_{z \to +\infty} \frac{24z}{e^{2z}}(1 + o(1)) = 0$.
Allora, $x = -4$ è un punto di minimo relativo, mentre -3 è un punto di massimo relativo. Si ha $f(-4) = -32\sqrt{e}$, $f(-3) = -27e^{2/3}$.

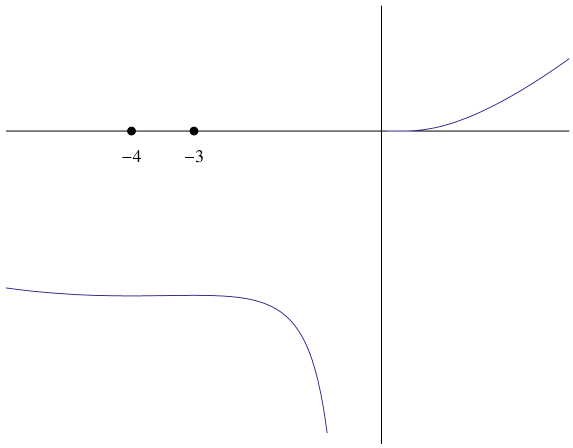

Figura 10: Grafico per l'esercizio 4 (10)

Il grafico è riportato in figura 10.

(11) Sia $f(x) = xe^{\frac{x}{x+1}}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{x}{x+1}} = \pm\infty \\
m_\pm := &\lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{\frac{x}{x+1}}}{x} = e \\
q_\pm := &\lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{x}{x+1}} - ex = \lim_{x\to\pm\infty} ex\Big(e^{\frac{x}{x+1}-1} - 1\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} ex\frac{-(1+o(1))}{x+1} = -e \\
&\lim_{x\to(-1)^+} xe^{\frac{x}{x+1}} = 0 \\
&\lim_{x\to(-1)^-} xe^{\frac{x}{x+1}} = -\infty,
\end{aligned}$$

per cui f ha asintoto obliquo $y = ex - e$, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \Big(1 + x\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\Big)e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{x^2+3x+1}{(x+1)^2}e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

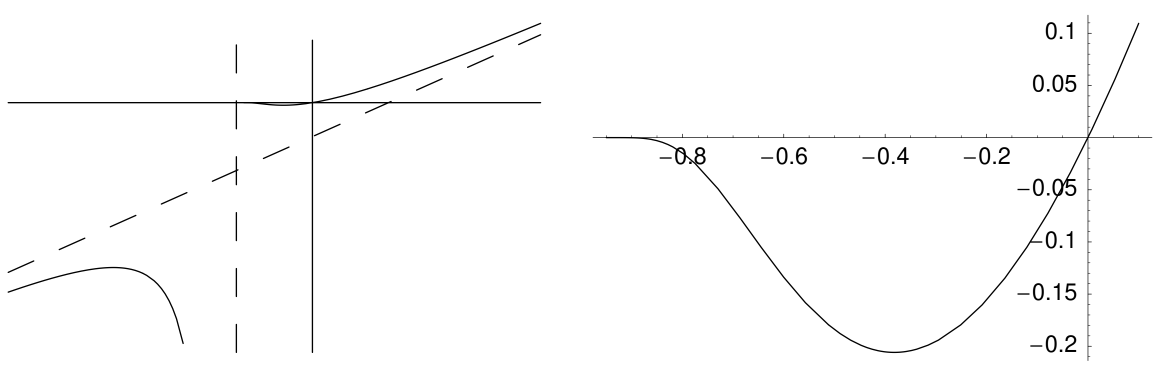

Figura 11: Grafico per l'esercizio 4 (11)

Quindi, f è crescente in $(-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ e in $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ e decrescente in $(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -1)$ e in $(-1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$.
Inoltre $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$, e $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} e^{\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1}}$. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 0$.
Il grafico è riportato in figura 11, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = -1$.

(12) Sia $f(x) = |x|e^{\frac{x}{x+1}}$. Poiché $|x|e^{\frac{x}{x+1}} = |xe^{\frac{x}{x+1}}|$, il grafico di f si ottiene da quello dell'esercizio 4 (11).
Osserviamo che l'asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$ ha equazione $y = -e(x-1)$. Infatti

$$m_- := \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|e^{\frac{x}{x+1}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -e^{1+o(1)} = -e$$
$$q_- := \lim_{x\to-\infty} |x|e^{\frac{x}{x+1}} + ex = \lim_{x\to-\infty} ex\Big(-e^{\frac{x}{x+1}-1} + 1\Big) = \lim_{x\to-\infty} -ex\frac{-(1+o(1))}{x+1} = e.$$

(13) Sia $f(x) = \arcsin \frac{x+1}{x-1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \Big\{x \in \mathbb{R} : -1 \le \frac{x+1}{x-1} \le 1\Big\} = (-\infty, 0]$, in quanto

$$\begin{cases} \frac{2x}{x-1} \ge 0 \\ \frac{2}{x-1} \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x \le 0. \end{cases}$$

Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to -\infty$, si ha $f(x) = \arcsin(1 + o(1)) = \frac{\pi}{2} + o(1)$, per cui $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to -\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}} \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{|x|}} < 0,$$

per ogni $x \in (-\infty, 0)$.

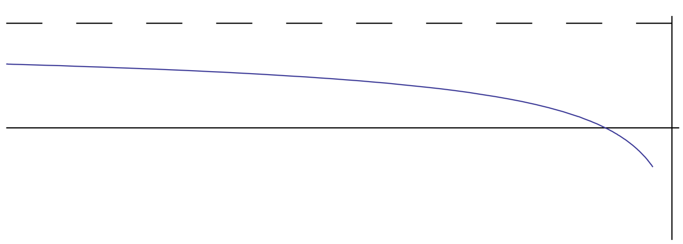

Figura 12: Grafico per l'esercizio 4 (13)

Allora, f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Si ha $f(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, e $f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{(x-1)\sqrt{|x|}} = -\infty$.
Il grafico è riportato in figura 12.

(14) Sia $f(x) = \arcsin \frac{1}{x^2-x}$. Allora $\operatorname{dom} f = \Big\{x \in \mathbb{R} : -1 \le \frac{1}{x^2-x} \le 1\Big\} = (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, in quanto

$$\begin{cases} \frac{1-x^2+x}{x^2-x} \le 0 \\ \frac{1+x^2-x}{x^2-x} \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2-x-1}{x^2-x} \ge 0 \\ \frac{x^2-x+1}{x^2-x} \ge 0 \end{cases} \overset{(a)}{\iff} \begin{cases} x^2 - x - 1 \ge 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases}$$

dove in (a) si è usato $x^2 - x + 1 > 0$, sempre.
Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} \arcsin \frac{1}{x^2-x} = 0$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x^2-x)^2}}} \frac{-(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{(1-2x)|x^2-x|}{(x^2-x)^2\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

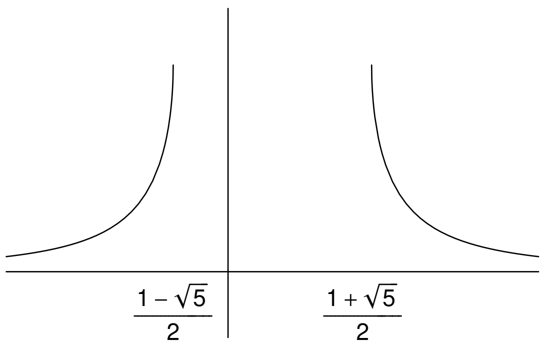

Figura 13: Grafico per l'esercizio 4 (14)

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$, e strettamente decrescente in $[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. Si ha $f(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, e

$$\lim_{x\to(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^-} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^-} \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^+} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^+} \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = -\infty,$$

in quanto $(x^2-x)^2 - 1 = (x^2-x-1)(x^2-x+1) = 0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Il grafico è riportato in figura 13.

(15) Sia $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(\frac{x}{(x+3)|x+4|}\right)\right)$. Allora $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{(x+3)|x+4|} > 0\} = (-\infty,-4) \cup (-4,-3) \cup (0,+\infty)$. Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\log\left(\frac{1+o(1)}{|x|}\right) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to-4} f(x) = \lim_{x\to-4} \operatorname{arctg}\big(-\log\big(|x+4|\big)(1+o(1))\big) = +\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to(-3)^-} f(x) = \lim_{x\to(-3)^-} \operatorname{arctg}\big(\log\big(-(x+3)\big)(1+o(1))\big) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \operatorname{arctg}\big(\log x(1+o(1))\big) = -\frac{\pi}{2},$$

per cui $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.

Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\big(\log(\frac{x}{(x+3)|x+4|})\big)^2}\,\frac{(x+3)|x+4|}{x}\,\frac{(x+3)|x+4|-x(|x+4|+\operatorname{sgn}(x+4)(x+3))}{(x+3)^2(x+4)^2}$$
$$= \frac{\operatorname{sgn}(x+4)(12-x^2)}{x(x+3)|x+4|}\,\frac{1}{1+\big(\log(\frac{x}{(x+3)|x+4|})\big)^2} = \frac{12-x^2}{x(x+3)(x+4)}\,\frac{1}{1+\big(\log(\frac{x}{(x+3)|x+4|})\big)^2},$$

per cui $f'(x)\ge 0 \iff x\in(-\infty,-4)\cup[-2\sqrt{3},-3)\cup(0,2\sqrt{3}]$.

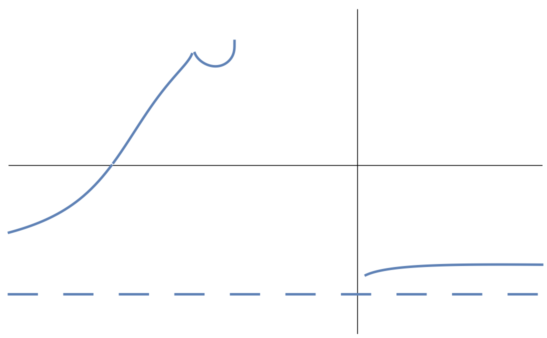

Figura 14: Grafico per l'esercizio 4 (15)

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty,-4]$, in $[-2\sqrt{3},-3)$, e in $(0,2\sqrt{3}]$, e strettamente decrescente in $[-4,-2\sqrt{3}]$, e in $[2\sqrt{3},+\infty)$, mentre $x=-2\sqrt{3}$ è un punto di minimo locale, e $x=2\sqrt{3}$ un punto di massimo locale, e si ha $f(-2\sqrt{3})=\operatorname{arctg}\log(7+4\sqrt{3})$, $f(2\sqrt{3})=\operatorname{arctg}\log(7-4\sqrt{3})$. Inoltre

$$\lim_{x\to(-4)^\pm} f'(x) = \lim_{x\to(-4)^\pm}\frac{-1+o(1)}{(x+4)\big(\log|x+4|\big)^2} = \mp\infty,$$
$$\lim_{x\to(-3)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-3)^-}\frac{-1+o(1)}{(x+3)\big(\log|x+3|\big)^2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{1+o(1)}{x\big(\log|x+3|\big)^2} = +\infty.$$

Il grafico è riportato in figura 14.

(16) Sia $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right)$. Allora $\operatorname{dom} f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Inoltre, f è

continua, dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\big(x(1+o(1))\big) = \pm\frac{\pi}{2},\\
\lim_{x\to(-1)^-} f(x) &= \lim_{x\to(-1)^-} \operatorname{arctg}\Big(-(1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\Big)\Big) = -\frac{\pi}{2},\\
\lim_{x\to(-1)^+} f(x) &= \lim_{x\to(-1)^+} \operatorname{arctg}\Big(-(1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\Big)\Big) = 0,\\
\lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-} \operatorname{arctg}\Big((1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\Big)\Big) = 0,\\
\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} \operatorname{arctg}\Big((1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\Big)\Big) = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

per cui $y=\pm\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x\to\pm\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2e^{2/(x^2-1)}}\Big(1-\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\Big)e^{1/(x^2-1)} = \frac{x^4-4x^2+1}{(x^2-1)^2}\,\frac{e^{1/(x^2-1)}}{1+x^2e^{2/(x^2-1)}},$$

per cui $f'(x)\geq 0 \iff x\in(-\infty,-\sqrt{2+\sqrt{3}}]\cup[-\sqrt{2-\sqrt{3}},\sqrt{2-\sqrt{3}}]\cup[\sqrt{2+\sqrt{3}},+\infty)$.

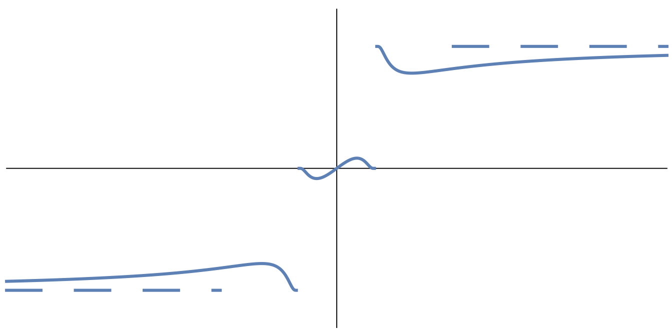

Figura 15: Grafico per l'esercizio 4 (16)

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty,-\sqrt{2+\sqrt{3}}]$, in $[-\sqrt{2-\sqrt{3}},\sqrt{2-\sqrt{3}}]$, e in $[\sqrt{2+\sqrt{3}},+\infty)$, e strettamente decrescente in $[-\sqrt{2+\sqrt{3}},-1)$, in $(-1,-\sqrt{2-\sqrt{3}}]$, in $[\sqrt{2-\sqrt{3}},1)$, e in $(1,\sqrt{2+\sqrt{3}}]$, mentre $x=-\sqrt{2+\sqrt{3}}$ e $x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ sono punti di massimo locale, e $x=-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ sono punti di minimo locale, e si ha $f(\pm\sqrt{2+\sqrt{3}})=\pm\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2+\sqrt{3}}\exp\big(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\big)\big)$,

$f(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}) = \pm \operatorname{arctg}\big(\sqrt{2-\sqrt{3}}\exp\big(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\big)\big)$. Inoltre

$$\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{-\exp\{\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x+1)^2\exp\{\frac{1}{-(x+1)(1+o(1))}\}(1+o(1))} = 0,$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-\exp\{\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x+1)^2(1+o(1))} = 0,$$

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{-\exp\{\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x-1)^2(1+o(1))} = 0,$$

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{-\exp\{\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x-1)^2\exp\{\frac{1}{(x-1)(1+o(1))}\}(1+o(1))} = 0.$$

Il grafico è riportato in figura 15.

(17) Sia $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, f è continua, 2π-periodica, né pari né dispari. Per $x \to 0$, si ha $f(x) = \frac{1}{x}(1+o(1))$; per $x \to \frac{\pi}{2}$, si ha $f(x) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{2})}(1+o(1)) = -\frac{1}{\sin(x-\frac{\pi}{2})}(1+o(1)) = -\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}(1+o(1))$; per $x \to \pi$, si ha $f(x) = \frac{1}{\sin(\pi+x-\pi)}(1+o(1)) = -\frac{1}{\sin(x-\pi)}(1+o(1)) = -\frac{1}{x-\pi}(1+o(1))$; per $x \to \frac{3\pi}{2}$, si ha $f(x) = \frac{1}{\cos(\frac{3\pi 2}{+}x-\frac{3\pi}{2})}(1+o(1)) = \frac{1}{\sin(x-\frac{3\pi}{2})}(1+o(1)) = \frac{1}{x-\frac{3\pi}{2}}(1+o(1))$. Quindi $x = k\frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale di f, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Inoltre, per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, si ha $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{(\sin x-\cos x)(1+\frac{1}{2}\sin 2x)}{\sin^2 x\cos^2 x} \geq 0 \iff \sin x - \cos x \geq 0 \iff x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \mod 2\pi$.

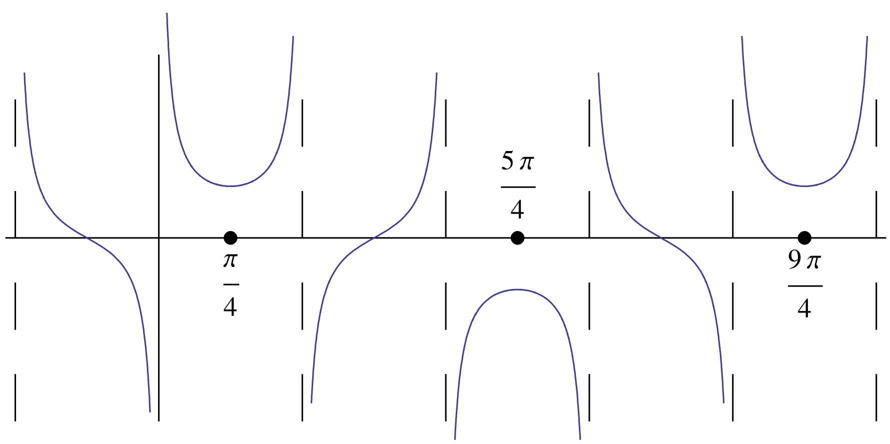

Figura 16: Grafico per l'esercizio 4 (17)

Allora, $x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo relativo, mentre $\frac{5\pi}{4}$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$, $f(\frac{5\pi}{4}) = -2\sqrt{2}$.
Il grafico è riportato in figura 16.

(18) Sia $f(x) = \sin\frac{1}{x^2+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} \sin\frac{1}{x^2+1} = 0$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.

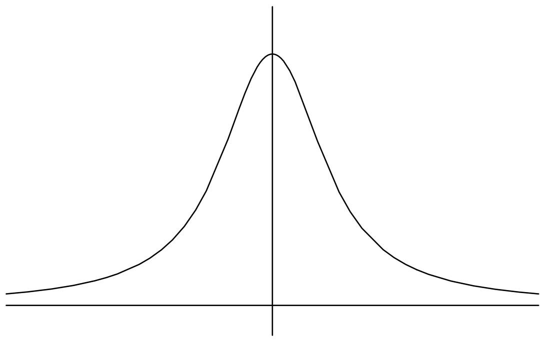

Figura 17: Grafico per l'esercizio 4 (18)

Inoltre, $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \cos \frac{1}{x^2+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0]$, in quanto $0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, per cui $\cos \frac{1}{x^2+1} > 0$.
Allora, $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = \sin 1$.
Il grafico è riportato in figura 17.

(19) Sia $f(x) = \sin \frac{2x^2-1}{x^2+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \sin \frac{2x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = \sin 2 + o(1)$, per cui $y = \sin 2$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$. Osserviamo che, posto $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, il cui grafico è riportato nell'esercizio 4 (1), si ha $f(x) = \sin g(x)$.
Inoltre, $f'(x) = g'(x) \cos g(x) = \frac{6x}{(x+1)^2)} \cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, per cui bisogna studiare la disequazione $\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1} \geq 0 \iff \frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \iff |x| \leq \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ [vedi il grafico di g nell'esercizio 4 (1)]. Quindi $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}] \cup [0, \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}]$.

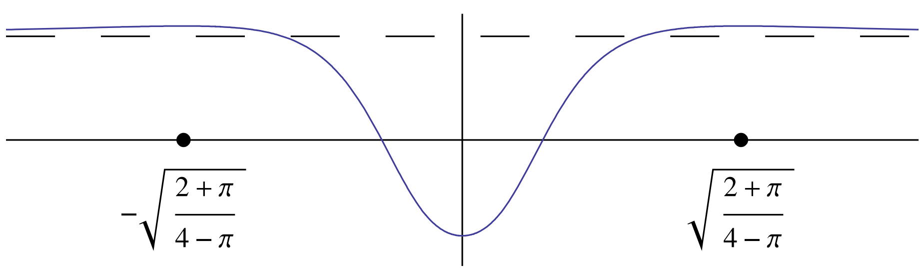

Figura 18: Grafico per l'esercizio 4 (19)

Allora, $x = 0$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ sono punti di massimo relativo. Si ha $f(0) = -\sin 1$, e $f(\pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = 1$.
Il grafico è riportato in figura 18.

(20) Sia $f(x) = \sqrt{\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}}$. Osserviamo che, posto $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, il cui grafico è riportato nell'esercizio 4 (1), si ha $f(x) = \sqrt{\cos g(x)}$. Allora $\operatorname{dom} f = [-\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}, \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}]$, f è continua, e pari.

Inoltre, $f'(x) = \frac{-g'(x)\sin g(x)}{2\sqrt{\cos g(x)}} = -\frac{3x}{(x+1)^2)} \frac{\sin\frac{2x^2-1}{x^2+1}}{\sqrt{\cos\frac{2x^2-1}{x^2+1}}}$, per cui bisogna studiare la disequazione $\sin\frac{2x^2-1}{x^2+1} \geq 0 \iff 0 \leq \frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ [vedi il grafico di g nell'esercizio 4 (1)]. Quindi $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Si ha poi $f'_-(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = \lim_{x\to(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}})^-} f'(x) = -\lim_{x\to(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}})^-} \frac{3\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}}{(\frac{2+\pi}{4-\pi}+1)^2}(1+o(1)) \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+o(1))}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}+o(1))}} = -\infty$.

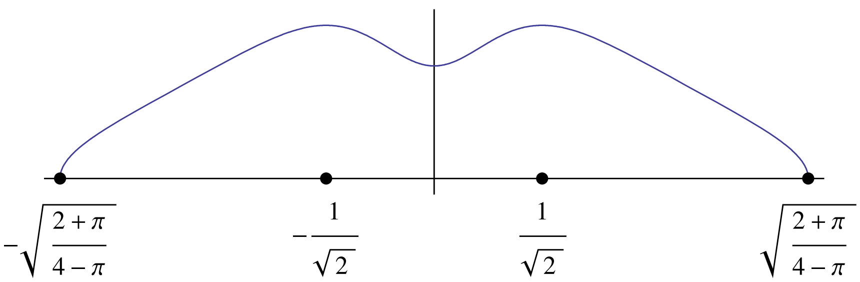

Figura 19: Grafico per l'esercizio 4 (20)

Allora, $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ sono punti di minimo relativo, e $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di massimo relativo. Si ha $f(0) = \sqrt{\cos 1}$, $f(\pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = 0$, $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$.
Il grafico è riportato in figura 19.

□

Svolgimento esercizio 5

(1) Sia $f(x) = \frac{x^2+2|x|+1}{x+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Poiché

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0, \\ \frac{x^2-2x+1}{x+1} & x < 0, \end{cases}$$

basta studiare la funzione f per $x < 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to(-1)^\pm} \frac{x^2-2x+1}{x+1} &= \pm\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x+1} &= \pm\infty \\ m_- := \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x(x+1)} &= 1 \\ q_- := \lim_{x\to-\infty} \Big(\frac{x^2-2x+1}{x+1} - x\Big) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1} = -3, \end{aligned}$$

per cui f ha asintoto verticale in $x = -1$ e asintoto obliquo $y = x - 3$, per $x \to -\infty$.

Inoltre, per $x < 0$, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2-2x+2x-2-x^2+2x-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \iff x \le -3. \end{aligned}$$

Quindi, f è crescente in $(-\infty,-3)$ e in $(0,+\infty)$, e decrescente in $(-3,-1)$, e in $(-1,0)$, per cui, $x=-3$ è un punto di massimo relativo, con $f(-3)=-8$, e $x=0$ e è un punto di minimo relativo, con $f(0)=1$. Osserviamo che $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-3$, mentre $f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=1$, per cui $x=0$ è un punto angoloso.

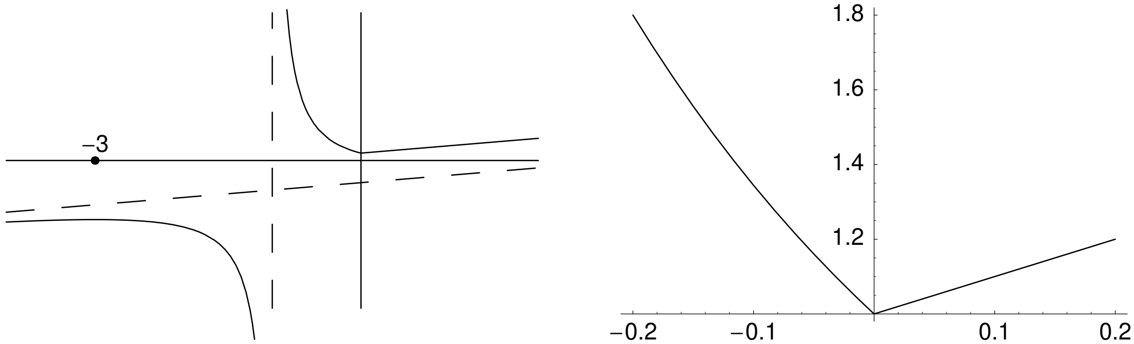

Figura 20: Grafico per l'esercizio 5 (1)

Ancora,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x-3)}{(x+1)^4} = \frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x+6}{(x+1)^3} \\ &= \frac{8}{(x+1)^3} > 0 \iff x > -1. \end{aligned}$$

Quindi, f è convessa in $(-1,0)$ e in $(0,+\infty)$, ed è concava in $(-\infty,-1)$, mentre non ci sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 20, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x=0$.

(2) Sia $f(x)=\frac{4|x^2+x|-1}{x^2}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4|x^2+x|-1}{x^2} = 4$$
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{4|x^2+x|-1}{x^2} = -\infty,$$

per cui f ha asintoto verticale in $x=0$ e asintoto orizzontale $y=4$, per $x\to\pm\infty$.
Poiché

$$f(x)=\begin{cases} \frac{4x^2+4x-1}{x^2} & x\le -1 \text{ o } x>0, \\ -\frac{4x^2+4x+1}{x^2} & -1<x<0, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(8x+4)x^2-2x(4x^2+4x-1)}{x^4} = \frac{8x^3+4x^2-8x^3-8x^2+2x}{x^4} = \frac{-4x^2+2x}{x^4} = \frac{2(1-2x)}{x^3} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ -\frac{(8x+4)x^2-2x(4x^2+4x+1)}{x^4} = -\frac{8x^3+4x^2-8x^3-8x^2-2x}{x^4} = \frac{4x^2+2x}{x^4} = \frac{2(2x+1)}{x^3} & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \iff & \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ \frac{1-2x}{x^3} \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{2x+1}{x^3} \geq 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x < -\frac{1}{2} \text{ o } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ne segue che $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}]$. Quindi, f è crescente in $(-1, -\frac{1}{2})$ e in $(0, \frac{1}{2})$, e decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 0)$ e in $(\frac{1}{2}, +\infty)$, per cui, $x = -1$ è un punto di minimo relativo, con $f(-1) = -1$, e $x = \pm\frac{1}{2}$ sono punti di massimo relativo, con $f(-\frac{1}{2}) = 0$ e $f(\frac{1}{2}) = 8$. Osserviamo che $f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = -6$, mentre $f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 2$, per cui $x = -1$ è un punto angoloso.

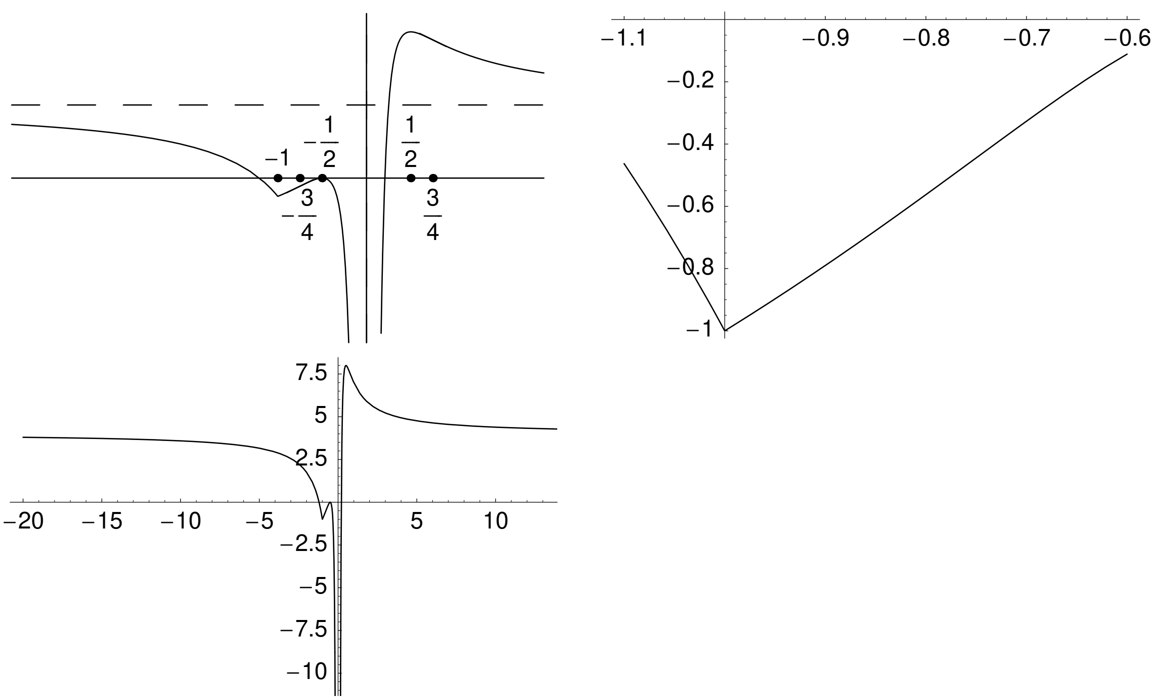

Figura 21: Grafico per l'esercizio 5 (2)

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\left(-2x^3-3x^2(1-2x)\right)}{x^6} = \frac{2(4x-3)}{x^4} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ \frac{2\left(2x^3-3x^2(2x+1)\right)}{x^6} = \frac{-2(4x+3)}{x^4} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-1, -\frac{3}{4})$ e in $(\frac{3}{4}, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 1)$ e in $(1, +\infty)$, mentre $x = -\frac{3}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$ sono punti di flesso per f.

Il grafico è riportato in figura 21, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x = -1$, e il comportamento per x grandi.

(3) Sia $f(x) = \frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2} = 1$$
$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2} = -\infty,$$

per cui f ha asintoto verticale in $x = 1$ e asintoto orizzontale $y = 1$, per $x \to \pm\infty$.
Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{(x-1)^2} & x \le -1 \text{ o } x > 1, \\ -\frac{x^2}{(x-1)^2} & -1 < x < 1, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2)}{(x-1)^4} = \frac{2x^2-2x-2x^2+4}{(x-1)^3} = \frac{2(2-x)}{(x-1)^3} & x < -1 \text{ o } x > 1, \\ -\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)x^2}{(x-1)^4} = -\frac{2x^2-2x-2x^2}{(x-1)^3} = \frac{2x}{(x-1)^3} & -1 < x < 1. \end{cases}$$

Poiché

$$f'(x) \ge 0 \iff \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 1 \\ \frac{2-x}{(x-1)^3} \ge 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{2x}{(x-1)^3} \ge 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 1 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \le 0 \text{ o } x > 1, \end{cases}$$

ne segue che $f'(x) \ge 0 \iff x \in (-1, 0] \cup (1, 2]$. Quindi, f è crescente in $(-1, 0)$ e in $(1, 2)$, e decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(0, 1)$ e in $(2, +\infty)$, per cui, $x = -1$ è un punto di minimo relativo, con $f(-1) = -\frac{1}{4}$, e $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo, con $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$. Osserviamo che $f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = -\frac{3}{4}$, mentre $f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \frac{1}{4}$, per cui $x = -1$ è un punto angoloso.
Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\big(-(x-1)^3-3(x-1)^2(2-x)\big)}{(x-1)^6} = \frac{2(2x-5)}{(x-1)^4} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ \frac{2\big((x-1)^3-3(x-1)^2x\big)}{(x-1)^6} = \frac{-2(2x+1)}{(x-1)^4} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \ge 0 \iff x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-1, -\frac{1}{2})$ e in $(\frac{5}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 1)$ e in $(1, \frac{5}{2})$, mentre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{5}{2}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 22, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x = -1$, in un intorno di $x = -\frac{1}{2}$, e il comportamento per x grandi.

(4) Sia $f(x) = x - \log(x^2 + x + 1)$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ [perché $x^2 + x + 1 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$], f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} x - \log(x^2 + x + 1) = \pm\infty$$
$$m_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \log(x^2 + x + 1)}{x} = 1$$
$$q_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} x - \log(x^2 + x + 1) - x = -\infty,$$

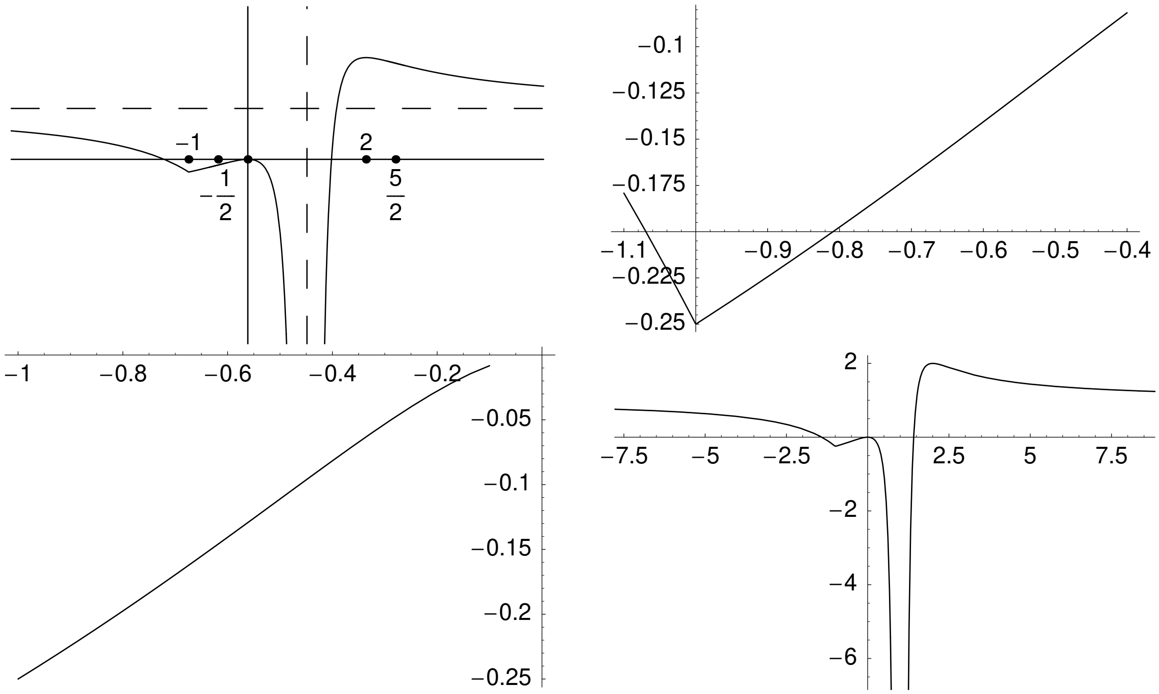

Figura 22: Grafico per l'esercizio 5 (3)

per cui f non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Quindi, f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(1, +\infty)$, e decrescente in $(0, 1)$, per cui, $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = 0$, e $x = 1$ è un punto di minimo relativo, con $f(1) = 1 - \log 3$.
Ancora,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{(2x^3 - x^2 + 2x^2 - x + 2x - 1) - (2x^3 + x^2 - 2x^2 - x)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ e in $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, mentre $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 23, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = 0$, e il comportamento per x grandi.

(5) Sia $f(x) = |x| - \log(x^2 + x + 1)$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ [perché $x^2 + x + 1 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$], f è

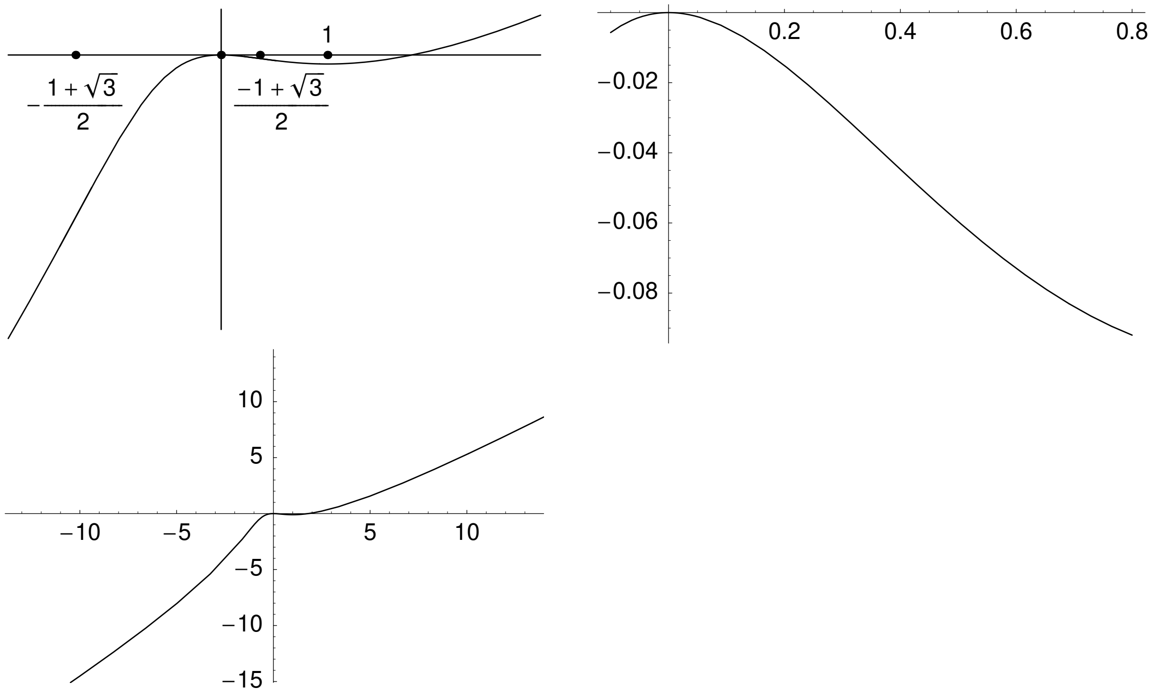

Figura 23: Grafico per l'esercizio 5 (4)

continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} |x| - \log(x^2+x+1) &= +\infty \\
m_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x| - \log(x^2+x+1)}{x} &= \pm 1 \\
q_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} |x| - \log(x^2+x+1) - (\pm x) &= -\infty,
\end{aligned}$$

per cui f non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} & x > 0 \\ -1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = -\frac{x^2+x+1+2x+1}{x^2+x+1} = -\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1} & x < 0, \end{cases}$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-2,-1] \cup [1,+\infty)$. Quindi, f è crescente in $(-2,-1)$ e in $(1,+\infty)$, e decrescente in $(-\infty,-2)$ e in $(-1,1)$, per cui, $x=-2$ e $x=1$ sono punti di minimo relativo, con $f(-2) = 2-\log 3$ e $f(1) = 1-\log 3$, e $x=-1$ è un punto di massimo relativo, con $f(-1)=1$.
Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & x > 0 \\ -\frac{(2x+3)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+3x+2)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ e in $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, mentre $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso per f.

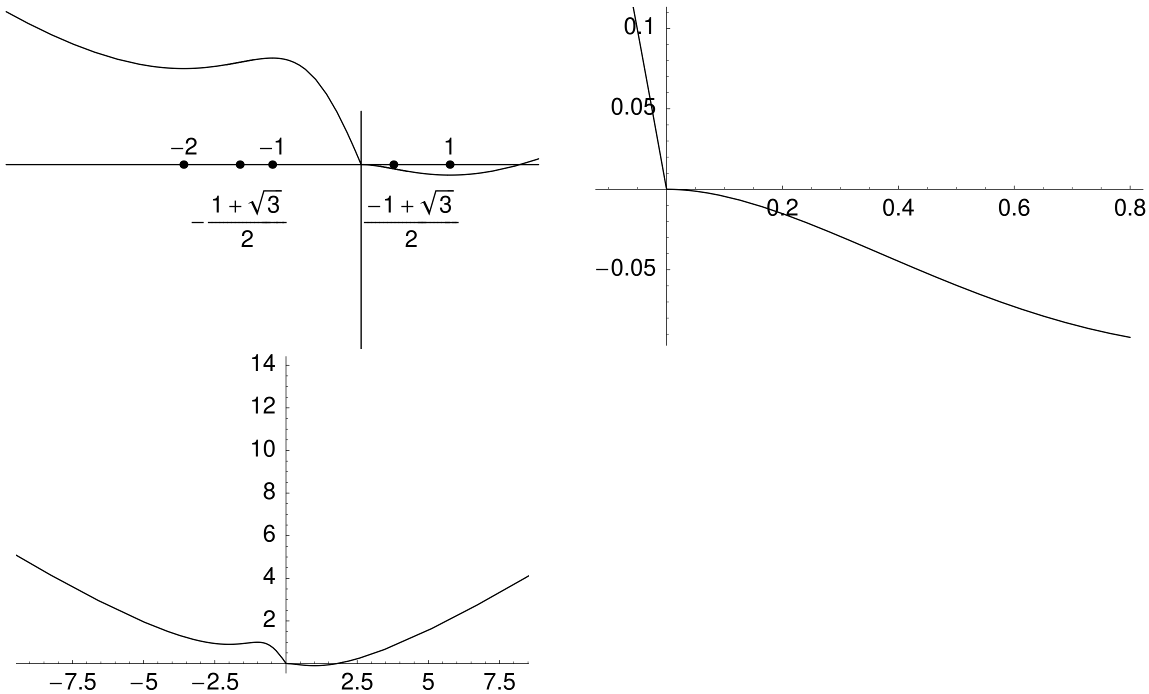

Figura 24: Grafico per l'esercizio 5 (5)

Il grafico è riportato in figura 24, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = 0$, e il comportamento per x grandi.

(6) Sia $f(x) = (x^2 + x)e^{x+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2 + x)e^{x+1} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 + x)e^{x+1} = +\infty$$
$$m_+ := \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2 + x)e^{x+1}}{x} = +\infty,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = 0$, per $x \to -\infty$, mentre non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to +\infty$.
Inoltre, $f'(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.
Allora, $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = (2 + \sqrt{5})e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, e $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo per f, con $f(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}) = (2 - \sqrt{5})e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.
Ancora, $f''(x) = (x^2 + 5x + 4)e^{x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -4)$ e in $(-1, +\infty)$, ed è concava in $(-4, -1)$, mentre $x = -4$ e $x = -1$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 25.

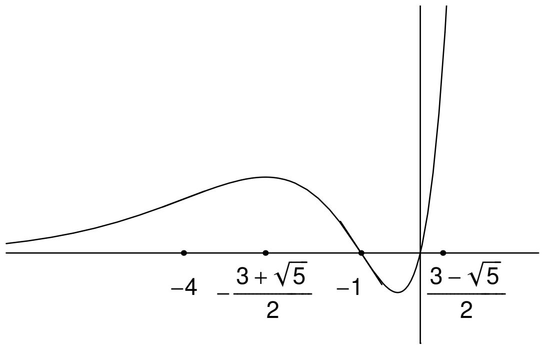

Figura 25: Grafico per l'esercizio 5 (6)

(7) Sia $f(x) = (x^2 + x)e^{-(x+1)}$. Allora dom $f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + x)e^{-(x+1)} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 + x)e^{-(x+1)} = +\infty$$
$$m_- := \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2 + x)e^{-(x+1)}}{x} = +\infty,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = 0$, per $x \to +\infty$, mentre non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to -\infty$.
Inoltre, $f'(x) = -(x^2 - x - 1)e^{-(x+1)} \geq 0 \iff x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

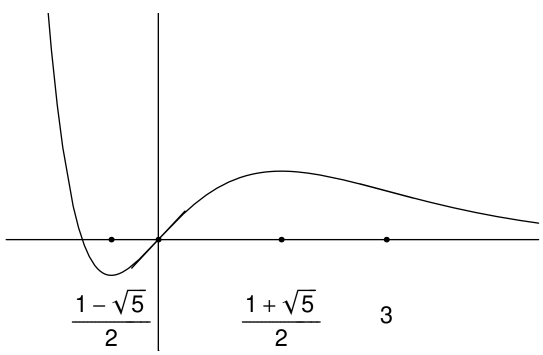

Figura 26: Grafico per l'esercizio 5 (7)

Allora, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = (2 - \sqrt{5})e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, e $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo per f, con $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = (2 + \sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.
Ancora, $f''(x) = (x^2 - 3x)e^{-(x+1)} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(3, +\infty)$, ed è concava in $(0, 3)$, mentre $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 26.

(8) Sia $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$$
$$\lim_{x\to(-1)^-} e^{\frac{x}{x+1}} = +\infty,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = e$, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} > 0$, per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Quindi, f è crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, +\infty)$. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 0$.

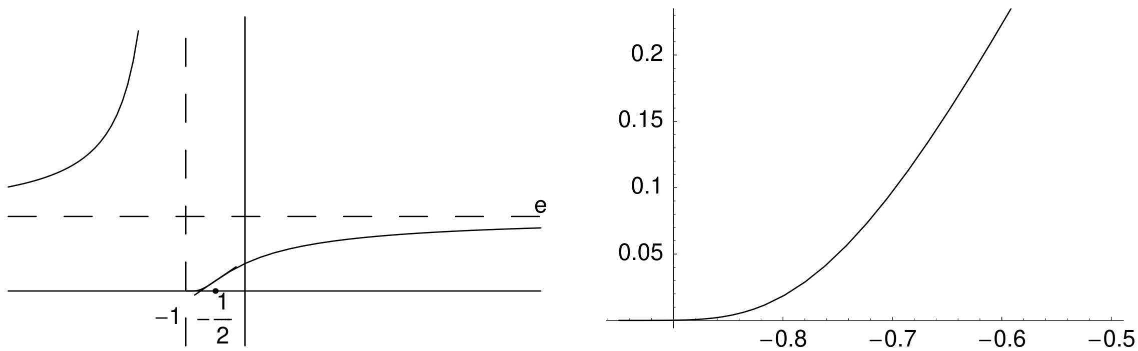

Figura 27: Grafico per l'esercizio 5 (8)

Ancora, $f''(x) = \left(-\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right) e^{\frac{x}{x+1}} = -\frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, -\frac{1}{2})$, ed è concava in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, mentre $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 27, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = -1$.

(9) Sia $f(x) = e^{\frac{x}{|x+1|}}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{|x+1|}} = e$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{|x+1|}} = \frac{1}{e}$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{\frac{x}{|x+1|}} = 0$$
$$\lim_{x\to(-1)^-} e^{\frac{x}{|x+1|}} = 0,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = e$, per $x \to +\infty$, e asintoto orizzontale $y = \frac{1}{e}$, per $x \to -\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{|x+1| - x \operatorname{sgn}(x+1)}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{|x+1|}} = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} e^{-\frac{x}{x+1}} & x < -1 \\ \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} & x > -1, \end{cases}$
per cui $f'(x) > 0$, per ogni $x \in (-1, +\infty)$. Quindi, f è decrescente in $(-\infty, -1)$ e crescente in $(-1, +\infty)$ [per cui, $x = -1$ sarebbe un punto di minimo relativo, se $-1 \in \operatorname{dom} f$]. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^\pm} f'(x) = 0$.

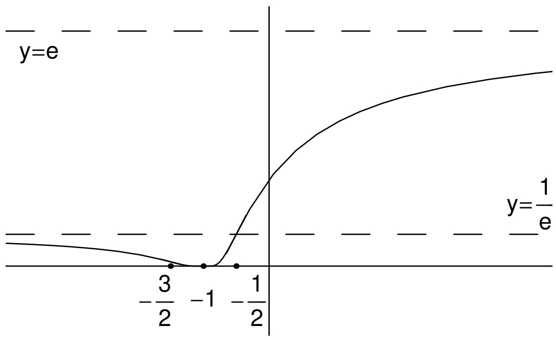

Figura 28: Grafico per l'esercizio 5 (9)

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right)e^{-\frac{x}{x+1}} = \frac{2x+3}{(x+1)^4}e^{-\frac{x}{x+1}} & x < -1 \\ \left(-\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right)e^{-\frac{x}{x+1}} = -\frac{2x+1}{(x+1)^4}e^{-\frac{x}{x+1}} & x > -1, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in [-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2}]$. Quindi, f è convessa in $[-\frac{3}{2}, -1)$ e in $(-1, -\frac{1}{2})$, ed è concava in $(-\infty, -\frac{3}{2})$ e in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, mentre $x = -\frac{3}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 28.

(10) Sia $f(x) = \text{arctg}(1 - x^2)$. Allora $\text{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = -\frac{\pi}{2} + o(1)$, per cui f ha asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi}{2}$, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre si ha $f'(x) = \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2}$. Poiché $f'(x) > 0 \iff x < 0$, ne segue che f è crescente in $(-\infty, 0)$, e decrescente in $(0, +\infty)$, per cui $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = \frac{\pi}{4}$.

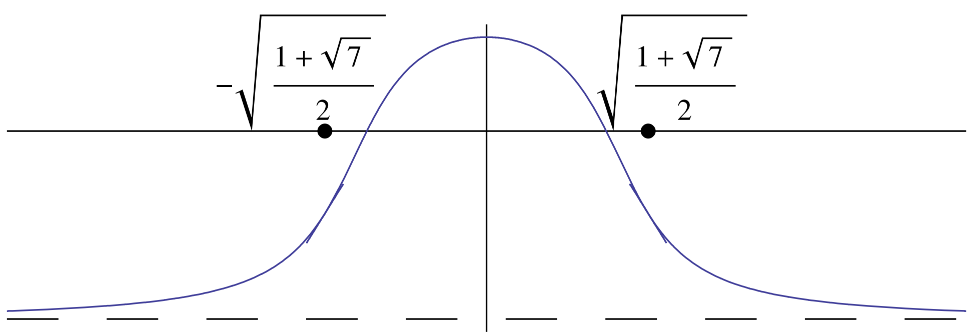

Figura 29: Grafico per l'esercizio 5 (10)

Ancora, $f''(x) = -2\frac{1+(x^2-1)^2-x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2} = -2\frac{1+x^4-2x^2+1-4x^4+4x^2}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2} = \frac{2(3x^4-2x^2-2)}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2}$ ed essendo $3x^4 - 2x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, si ha $f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$ e in $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$, ed è concava in $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 29.

(11) Sia $f(x)=\operatorname{arctg}(1-x^2)+\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{|1-x^2|}\Big)$. Allora $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, f è continua, e pari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}(1-x^2)+\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{|1-x^2|}\Big)=-\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 1^\pm}\operatorname{arctg}(1-x^2)+\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{|1-x^2|}\Big)=\frac{\pi}{2},$$

per cui f può essere prolungata per continuità anche in $x=\pm 1$, e ha asintoto orizzontale $y=-\frac{\pi}{2}$, per $x\to\pm\infty$.
Poiché

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(1-x^2)+\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big)=\frac{\pi}{2} & -1<x<1,\\ \operatorname{arctg}(1-x^2)+\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{x^2-1}\Big) & x<-1 \text{ o } x>1,\end{cases}$$

si ha

$$f'(x)=\begin{cases}0 & -1<x<1,\\ \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2}+\frac{-\frac{2x}{(x^2-1)^2}}{1+\frac{1}{(x^2-1)^2}}=\frac{-4x}{1+(1-x^2)^2} & x<-1 \text{ o } x>1.\end{cases}$$

Poiché $f'(x)>0 \iff x<-1$, ne segue che f è crescente in $(-\infty,-1)$, è costante in $(-1,1)$, e decrescente in $(1,+\infty)$, per cui ogni $x\in[-1,1]$ è un punto di massimo relativo, con $f(x)=\frac{\pi}{2}$. Osserviamo che $f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=0$, mentre $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=-4$, per cui $x=\pm 1$ sono punti angolosi.

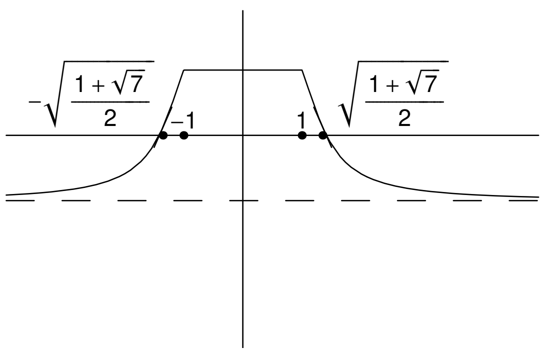

Figura 30: Grafico per l'esercizio 5 (11)

Ancora,

$$f''(x)=\begin{cases}-4\frac{1+(x^2-1)^2-x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{\big(1+(x^2-1)^2\big)^2}=-4\frac{1+x^4-2x^2+1-4x^4+4x^2}{\big(1+(x^2-1)^2\big)^2}=\frac{4(3x^4-2x^2-2)}{\big(1+(x^2-1)^2\big)^2} & x<-1 \text{ o } x>1,\\ 0 & -1<x<1,\end{cases}$$

ed essendo $3x^4-2x^2-2\geq 0 \iff x^2\geq\frac{1+\sqrt{7}}{2}$, si ha $f''(x)>0 \iff x\in(-\infty,-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})\cup(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}},+\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty,-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$ e in $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}},+\infty)$, ed è concava in $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}},-1)$ e in $(1,\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$, mentre $x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 30.

$\square$