Analisi Matematica I

Calcolo differenziale e applicazioni

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili in $x_0 = 0$.

(1) $f(x) = x|x|$

(2) $f(x) = |x| \sin x$

(3) $f(x) = |x \sin x|$

(4) $f(x) = x \sin \sqrt[3]{x}$

(5) $f(x) = (e^x - 1) \sin \sqrt[3]{x}$

(6) $f(x) = |e^x - 1| \sin \sqrt[3]{x}$

(7) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log(1+|x|)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(8) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log(1+x^2)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(9) $f(x) = |\log(1+x)|^{1/2}|x|^{3/4}$

(10) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(11) $f(x) = x\sqrt{|x|}$

(12) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(13) $f(x) = \sqrt{|\sin^3 x|}$

(14) $f(x) = |x| \cos x$

(15) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(16) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 |x|}{\sqrt[3]{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(17) $f(x) = \begin{cases} \frac{|1-e^x|}{\sqrt[5]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(18) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|1-e^x|}}{\sqrt[5]{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(19) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto x_0.

(1) $f(x) = x^{1/x}, \qquad x_0 = 1$

(2) $f(x) = \log\log x, \qquad x_0 = e$

(3) $f(x) = \dfrac{\log x}{1+\log x}, \qquad x_0 = e$

(4) $f(x) = \sin(e^{2x^2+1}), \qquad x_0 = 1$

(5) $f(x) = \arcsin(\log x + 1), \qquad x_0 = \dfrac{1}{e}$

(6) $f(x) = \log\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \arcsin x\right)\right), \qquad x_0 = \dfrac{1}{2}$

(7) $f(x) = \operatorname{arsinh}(1+\sinh x), \qquad x_0 = 0$

Esercizio 3. Determinare estremo superiore/inferiore di f nell'insieme A indicato.

(1) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1, \qquad A = [-2, 3]$

(2) $f(x) = |x|^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1, \qquad A = [-2, 3]$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}, \qquad A = [-1, 2]$

(4) $f(x) = x|x|, \qquad A = [-2, 1]$

(5) $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}, \qquad A = [-2, 3]$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x+1| + 1}{x^2+4}, \qquad A = [-2, 2]$

Esercizio 4. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza/decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

(1) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{2x^2-1}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$

(4) $f(x) = x^2 - 3x^{2/3}$

(5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$

(6) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$

(7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4}{|3-x^2|} - 2}$

(8) $f(x) = x^2\left(\log(\dfrac{x}{4}) - 1\right)^2$

(9) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x+2}$

(10) $f(x) = (x^2 + 12x)e^{-2/x}$

(11) $f(x) = xe^{\frac{x}{1+x}}$

(12) $f(x) = |x|e^{\frac{x}{1+x}}$

(13) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

(14) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x^2-x}\right)$

(15) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(\dfrac{x}{(x+3)|x+4|}\right)\right)$

(16) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x\exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)\right)$

(17) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

(18) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

(19) $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$

(20) $f(x) = \sqrt{\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)}$

Esercizio 5. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza/decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. Determinare eventuali punti di flesso, e intervalli di concavità/convessità.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2+2|x|+1}{x+1}$

(2) $f(x) = \dfrac{4|x^2+x|-1}{x^2}$

(3) $f(x) = \dfrac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2}$

(4) $f(x) = x - \log(x^2+x+1)$

(5) $f(x) = |x| - \log(x^2+x+1)$

(6) $f(x) = (x^2+x)e^{x+1}$

(7) $f(x) = (x^2+x)e^{-(x+1)}$

(8) $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}}$

(9) $f(x) = e^{\frac{x}{|1+x|}}$

(10) $f(x) = \operatorname{arctg}(1-x^2)$