Analisi Matematica I
Limiti di funzioni e continuità (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Verifichiamo che $\lim_{x\to 2}\sqrt{|x-2|}+3=3$. Infatti, per ogni $\varepsilon>0$, si ha $|\sqrt{|x-2|}+3-3|<\varepsilon \iff \sqrt{|x-2|}<\varepsilon \iff |x-2|<\varepsilon^2$, e quindi possiamo prendere $\delta_\varepsilon:=\varepsilon^2$.

(2) Verifichiamo che $\lim_{x\to 3}\log(1+|x-1|)=\log 3$. Infatti, per ogni $\varepsilon>0$, si ha $|\log(1+|x-1|)-\log 3|<\varepsilon \iff |\log x-\log 3|<\varepsilon \iff \log 3-\varepsilon<x<\log 3+\varepsilon \iff 3e^{-\varepsilon}<x<3e^{\varepsilon} \iff 3(e^{-\varepsilon}-1)<x-3<3(e^{\varepsilon}-1)$, e quindi possiamo prendere $\delta_\varepsilon:=\min\{3(1-e^{-\varepsilon}),3(e^{\varepsilon}-1)\}$.

(3) Verifichiamo che $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$. Infatti, per ogni $M>0$, si ha $\frac{1}{|x-1|}>M \iff |x-1|<\frac{1}{M}$, e quindi possiamo prendere $\delta_M:=\frac{1}{M}$.

(4) Verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty}(2+\frac{3}{x^2-1})=2$. Infatti, per ogni $\varepsilon>0$, si ha, se $x>1$, che $\left|2+\frac{3}{x^2-1}-2\right|<\varepsilon \iff \frac{3}{x^2-1}<\varepsilon \iff x^2>\frac{3}{\varepsilon}+1 \iff x>\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+1}$, e quindi possiamo prendere $x_\varepsilon:=\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+1}$.

(5) Verifichiamo che $\lim_{x\to-\infty}(2+\frac{3}{x^2-1})=2$. Infatti, per ogni $\varepsilon>0$, si ha, se $x<-1$, che $\left|2+\frac{3}{x^2-1}-2\right|<\varepsilon \iff \frac{3}{x^2-1}<\varepsilon \iff x^2>\frac{3}{\varepsilon}+1 \iff x<-\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+1}$, e quindi possiamo prendere $x_\varepsilon:=-\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+1}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha, per $x\to 0^+$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x(x^2+1)}=\dfrac{\frac12 x(1+o(1))}{x(1+o(1))}=\dfrac12(1+o(1))\to\dfrac12$, mentre, per $x\to+\infty$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x(x^2+1)}=\dfrac{\sqrt{x}(1+o(1))}{x^3(1+o(1))}=\dfrac{1}{x^{5/2}}(1+o(1))\to 0$.

(2) Si ha, per $x\to 0^+$, $\dfrac{x(\sqrt{1+x}-1)}{x^2+1}=\dfrac{x\cdot\frac12 x(1+o(1))}{1+o(1)}=\dfrac12 x^2(1+o(1))\to 0$, mentre, per $x\to+\infty$, $\dfrac{x(\sqrt{1+x}-1)}{x^2+1}=\dfrac{x\sqrt{x}(1+o(1))}{x^2(1+o(1))}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}(1+o(1))\to 0$.

(3) Si ha, per $x\to 0^+$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-e^x}{x^2(1+3^x)}=\dfrac{1+\frac12 x+o(x)-(1+x+o(x))}{x^2(2+o(1))}=-\dfrac{1}{4x}(1+o(1))\to-\infty$, mentre, per $x\to+\infty$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-e^x}{x^2(1+3^x)}=\dfrac{-e^x(1+o(1))}{x^2 3^x(1+o(1))}=-\dfrac{1}{x^2}\Big(\dfrac{e}{3}\Big)^x(1+o(1))\to 0$.

(4) Si ha, per $x\to 0^+$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-e^x)^2}{x(1+3^x)}=\dfrac{\big(1+\frac12 x+o(x)-(1+x+o(x))\big)^2}{x(2+o(1))}=\dfrac{\big(-\frac12 x(1+o(1))\big)^2}{x(2+o(1))}=\dfrac18 x(1+o(1))\to 0$, mentre, per $x\to+\infty$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-e^x)^2}{x(1+3^x)}=\dfrac{(-e^x)^2(1+o(1))}{x3^x(1+o(1))}=\dfrac1x\Big(\dfrac{e^2}{3}\Big)^x(1+o(1))\to+\infty$.

(5) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(e^x-1)}{x^2(1+2^x)} = \dfrac{\frac{1}{2}x(1+o(1))\cdot x(1+o(1))}{x^2(2+o(1))} = \dfrac{1}{4}(1+o(1)) \to \dfrac{1}{4}$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(e^x-1)}{x^2(1+2^x)} = \dfrac{\sqrt{x}\cdot e^x(1+o(1))}{x^2 2^x(1+o(1))} = \dfrac{1}{x^{3/2}}\Big(\dfrac{e}{2}\Big)^x(1+o(1)) \to +\infty$.

(6) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x}{x(1+x^2)} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x}{x(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1))}{x(1+o(1))} \to 1$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x}{x(1+x^2)} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x}{x^3(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1))}{x^3(1+o(1))} = \dfrac{1}{x^2} \to 0$.

(7) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x\log x}{x(1+\log x)} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x\log x}{x\log x(1+o(1))} = \dfrac{x\log x(1+o(1))}{x\log x(1+o(1))} \to 1$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x\log x}{x(1+\log x)} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x\log x}{x\log x(1+o(1))} = \dfrac{x\log x(1+o(1))}{x\log x(1+o(1))} \to 1$.

(8) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x^2}{x\log x} = \dfrac{2x^2(1+o(1))}{x\log x} = \dfrac{2x}{\log x}(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x\log x} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x^2}{x\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x\log x} = \dfrac{x}{\log x}(1+o(1)) \to +\infty$.

(9) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x^2\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x^2}{x^2\log x} = \dfrac{2x^2(1+o(1))}{x^2\log x} = \dfrac{2}{\log x}(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x^2\log x} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x^2}{x^2\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x^2\log x} = \dfrac{1}{\log x}(1+o(1)) \to 0$.

(10) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x^3\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x^2}{x^3\log x} = \dfrac{2x^2(1+o(1))}{x^3\log x} = \dfrac{2}{x\log x}(1+o(1)) \to -\infty$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x^3\log x} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x^2}{x^3\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x^3\log x} = \dfrac{1}{x\log x}(1+o(1)) \to 0$.

(11) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x)}{e^x-\sqrt{1+x}} = \dfrac{x(1+o(1))}{1+x+o(x)-\big(1+\frac{1}{2}x+o(x)\big)} = \dfrac{x(1+o(1))}{\frac{1}{2}x(1+o(1))} \to 2$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x)}{e^x-\sqrt{1+x}} = \dfrac{\log x(1+o(1))}{e^x-\sqrt{x}(1+o(1))} = \dfrac{\log x(1+o(1))}{e^x(1+o(1))} \to 0$.

(12) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{\log(x^2+1)} = \dfrac{\frac{x^2}{4}(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \to \dfrac{1}{4}$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{\log(x^2+1)} = \dfrac{x(1+o(1))}{2\log x(1+o(1))} \to +\infty$.

(13) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2-e^x}{x^2+\log(1+x)} = \dfrac{1+2\sqrt[3]{x}+o(x^{2/3})-(1+x+o(x))}{x^2+x(1+o(1))} = \dfrac{2\sqrt[3]{x}(1+o(1))}{x(1+o(1))} = \dfrac{2}{x^{2/3}}(1+o(1)) \to +\infty$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2-e^x}{x^2+\log(1+x)} = \dfrac{x^{2/3}(1+o(1))-e^x}{x^2+\log x(1+o(1))} = \dfrac{-e^x(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \to -\infty$.

(14) Si ha, per $x \to 0^+$, $\log x\cdot\log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big) = \log x\cdot\log\Big(\dfrac{1}{x}(1+o(1))\Big) = -(\log x)^2(1+o(1)) \to -\infty$, mentre, per $x \to +\infty$, $\log x\cdot\log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big) = \log x\cdot\dfrac{1}{x}(1+o(1)) \to 0$.

(15) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(\log x)^2}{\log(1+x)} = \dfrac{(\log x)^2}{x(1+o(1))} \to +\infty$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(\log x)^2}{\log(1+x)} = \dfrac{(\log x)^2}{\log x(1+o(1))} = \log x(1+o(1)) \to +\infty$.

(16) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(\log x)^2 \log(1+x^2)}{\log(1+x)} = \dfrac{(\log x)^2 \cdot x^2(1+o(1))}{x(1+o(1))} = x(\log x)^2(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(\log x)^2 \log(1+x^2)}{\log(1+x)} = \dfrac{(\log x)^2 \cdot 2\log x(1+o(1))}{\log x(1+o(1))} = 2(\log x)^2(1+o(1)) \to +\infty$.

(17) Si ha, per $x \to 0^+$, $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-1} \cdot \log x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}x(1+o(1))} \cdot \log x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} x^{1/3} \log x(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-1} \cdot \log x = \sqrt[3]{\sqrt{x}(1+o(1))} \cdot \log x = x^{1/6} \log x(1+o(1)) \to +\infty$.

(18) Si ha, per $x \to 0^+$, $\sqrt{x}\Big(\log x + \log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)\Big) = \sqrt{x}\log(x+1) = \sqrt{x} \cdot x(1+o(1)) = x^{3/2}(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\sqrt{x}\Big(\log x + \log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)\Big) = \sqrt{x}\log(x+1) = x^{1/2}\log x(1+o(1)) \to +\infty$.

(19) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{e^{-x}-1+\sin(x^2)}{|\log x| + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1-x+o(x)-1+x^2+o(x^2)}{-\log x + \log\left(\frac{1}{x}(1+o(1))\right)} = \dfrac{-x+o(x)}{-2\log x(1+o(1))} \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{e^{-x}-1+\sin(x^2)}{|\log x| + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{e^{-x}-1+\sin(x^2)}{\log x(1+o(1))} \to 0$, perché il numeratore è limitato.

(20) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\sin(x^2+x\sqrt{x})+x^3}{x^{3/2}+x^2} = \dfrac{\sin(x\sqrt{x}(1+o(1)))+x^3}{x^{3/2}(1+o(1))} = \dfrac{x\sqrt{x}(1+o(1))+x^3}{x^{3/2}(1+o(1))} = \dfrac{x\sqrt{x}(1+o(1))}{x^{3/2}(1+o(1))} \to 1$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\sin(x^2+x\sqrt{x})+x^3}{x^{3/2}+x^2} = \dfrac{x^3(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = x(1+o(1)) \to +\infty$.

(21) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(e^x - \sqrt{|\cos x|}\,) \cdot \operatorname{arctg} x}{(x^2+|\sin x|)^2} = \dfrac{(1+x+o(x)-\sqrt{|1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)|}\,) \cdot x(1+o(1))}{(x^2+|x|(1+o(1))\,)^2} = \dfrac{\big(1+x+o(x)-(1-\frac{1}{4}x^2+o(x^2))\big) \cdot x(1+o(1))}{|x|^2(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1)) \cdot x(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \to 1$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(e^x - \sqrt{|\cos x|}\,) \cdot \operatorname{arctg} x}{(x^2+|\sin x|)^2} = \dfrac{e^x(1+o(1)) \cdot \frac{\pi}{2}(1+o(1))}{(x^2(1+o(1)))^2} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^x}{x^4}(1+o(1)) \to +\infty$.

(22) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x \cdot \log x}{\sqrt[6]{x}(e^x-1)} = \dfrac{\sqrt[5]{\frac{x^2}{2}(1+o(1))} \cdot x(1+o(1)) \cdot \log x}{\sqrt[6]{x} \cdot x(1+o(1))} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}} x^{7/30} \log x(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x \cdot \log x}{\sqrt[6]{x}(e^x-1)} = \sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x \dfrac{\log x}{\sqrt[6]{x} \cdot e^x} \to 0$, perché il fattore $\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x$ è limitato, mentre $\frac{\log x}{\sqrt[6]{x} \cdot e^x} \to 0$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{e^{z^2+2z}-1}{\sqrt{\log(1+z)}} = \frac{(z^2+2z)(1+o(1))}{\sqrt{z(1+o(1))}} = \frac{2z(1+o(1))}{z^{1/2}(1+o(1))} = 2z^{1/2}(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo è $\frac{1}{2}$.

(2) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(e^{z^2+2z}-1)\log z}{\sqrt{\log(1+z)}} = \frac{(z^2+2z)(1+o(1))\log z}{\sqrt{z(1+o(1))}} = \frac{2z(1+o(1)\log z)}{z^{1/2}(1+o(1))} = 2z^{1/2}\log z(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo non esiste.

(3) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(\sqrt{1+z}-1)^3}{\sin z} = \frac{(\frac{1}{2}z)^3(1+o(1))}{z(1+o(1))} = \frac{1}{8}z^2(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo è 2.

(4) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(\sqrt{1+z}-1)^3\log z}{\sin z} = \frac{(\frac{1}{2}z)^3(1+o(1))\log z}{z(1+o(1))} = \frac{1}{8}z^2\log z(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo non esiste.

(5) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(\sqrt{1+z}-1)e^{-\frac{1}{z}}}{\sin z} = \frac{\frac{1}{2}z(1+o(1))e^{-\frac{1}{z}}}{z(1+o(1))} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{z}}(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo non esiste.

(6) Introdotta la variabile $z = x-2 \to 0$, si ha $f(x) = f(2+z) = \log(1+e^{2+z}-e^2) = \log(1+e^2(e^z-1)) = \log\big(1+e^2z(1+o(1))\big) = e^2z(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo è 1.

(7) Introdotta la variabile $z = x-2 \to 0$, si ha $f(x) = f(2+z) = \frac{\log(1+e^{2+z}-e^2)}{\sqrt{2(2+z)}-2} = \frac{1}{2}\frac{\log(1+e^2(e^z-1))}{\sqrt{1+\frac{z}{2}}-1} = \frac{1}{2}\frac{\log\big(1+e^2z(1+o(1))\big)}{\frac{z}{4}(1+o(1))} = 2e^2(1+o(1)) \to 2e^2$, e l'ordine di infinito/infinitesimo non esiste.

(8) Si ha $f(x) = \frac{\log(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+x^3)}{x(x+o(x))+x^5} = \frac{-\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = -\frac{1}{2}(1+o(1)) \to -\frac{1}{2}$, e l'ordine di infinito/infinitesimo non esiste.

$\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) Si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2(1+o(1))}{3x^2(1+o(1))} = \frac{2}{3}$, per cui $y = \frac{2}{3}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to +\infty$.

(2) Si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3(1+o(1))}{3x^2(1+o(1))} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3}(1+o(1)) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{2x}{3}(1+o(1)) = \frac{2}{3}$, e $q := \lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} - \frac{2}{3}x\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-20x^2+3x^{3/2}-50x-\frac{2}{3}\sqrt{x}+3}{3x^2+30x+75+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-20x^2(1+o(1))}{3x^2(1+o(1))} = -\frac{20}{3}$, per cui $y = \frac{2}{3}x - \frac{20}{3}$ è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$.

(3) Usando i risultati dell'esercizio (2), si ha $\lim_{x\to+\infty}\log\Big(\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}}\Big) = \lim_{x\to+\infty}\log\Big(\frac{2x}{3}(1+o(1))\Big) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$.

Inoltre, $m := \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log\Big(\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}}\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log\Big(\frac{2x}{3}(1+o(1))\Big) = 0$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \to +\infty$.

(4) Si ha $\lim_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x^2+5x-4}-x} = \lim_{x\to+\infty}\exp\Big(\frac{5x-4}{\sqrt{x^2+5x-4}+x}\Big) = \lim_{x\to+\infty}\exp\Big(\frac{5x(1+o(1))}{2x(1+o(1))}\Big) = e^{5/2}$, per cui $y = e^{5/2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to +\infty$.

(5) Si ha $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x = \lim_{x\to+\infty} 2x + 1 + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1+o(1)}{x} = 2$, e $q := \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + o(1) = 1$, per cui $y = 2x+1$ è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$.

(6) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \log(2e^{x+1} + 3x^{10}) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(2e^{x+1}(1+o(1))\right) = \lim_{x\to+\infty} x + 1 + \log 2 + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\log(2e^{x+1} + 3x^{10}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1+\log 2+o(1)}{x} = 1$, e $q := \lim_{x\to+\infty}\left(\log(2e^{x+1}+3x^{10}) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \log 2 + o(1) = 1 + \log 2$, per cui $y = x + 1 + \log 2$ è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$.

(7) Si ha $\lim_{x\to-\infty} \log(x^{12}e^x + |x|) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(|x|(1+o(1))\right) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\log(x^{12}e^x + |x|) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log|x| + o(1)}{x} = 0$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \to -\infty$.

(8) Si ha $\lim_{x\to-\infty} \log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(3e^{-x}(1+o(1))\right) = \lim_{x\to-\infty} -x + \log 3 + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\log 3+o(1)}{x} = -1$, e $q := \lim_{x\to-\infty}\left(\log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \log 3 + o(1) = \log 3$, per cui $y = -x + \log 3$ è asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$.

(9) Si ha $\lim_{x\to-\infty} \log(x^{12}e^{-x} + 1) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(x^{12}e^{-x}(1+o(1))\right) = \lim_{x\to-\infty} -x + 12\log|x| + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\log(x^{12}e^{-x} + 1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+12\log|x|+o(1)}{x} = -1$, e $q := \lim_{x\to-\infty}\left(\log(x^{12}e^{-x}+1) + x\right) = \lim_{x\to-\infty} 12\log|x| + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \to -\infty$.

(10) Si ha $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x|\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + o(1) - 2x\right) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x|\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x+1+o(1)}{x} = -2$, e $q := \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x| + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{3x^2+7}} = 1$, per cui $y = -2x+1$ è asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$.

$\square$

Svolgimento esercizio 5

(1) Si ha $f(x) = \frac{\log x - 3\log x(1+o(1))}{\log x(1+o(1))}\,\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}} = -2(1+o(1))\cdot 2x\sqrt{x}(1+o(1)) = -4x^{3/2}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito $\frac{3}{2}$.

(2) Si ha $f(x) = \frac{3x^2\cdot\frac{1}{x}(1+o(1)) + x^3\cdot\frac{1}{x}(1+o(1))}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))\,\frac{3x}{\sqrt{x^4+3x}+x^2}} = \frac{x^2(1+o(1))}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))\,\frac{3x}{2x^2(1+o(1))}} = \frac{4}{3\pi}x^3(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 3.

(3) Si ha $f(x) = x^4(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 4.

(4) Si ha $f(x) = \log\Big(\dfrac{x^3(1 + o(1))}{x^2(1 + o(1))}\Big) + 3x^6 = \log\big(x(1 + o(1))\big) + 3x^6 = 3x^6(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 6.

(5) Si ha $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}(1 + o(1)) \cdot x^3(1 + o(1)) = \dfrac{1}{2}x(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(6) Si ha $f(x) = \log\big(e^{2x}(1 + o(1))\big) = 2x(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(7) Si ha $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}\log 3} - 1}{\frac{1}{x^4}(1 + o(1))} = x^4 \cdot \dfrac{1}{x}\log 3(1 + o(1)) = \log 3 \cdot x^3(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 3.

(8) Si ha $f(x) = \dfrac{\log\big(x^4(1 + o(1))\big)}{e^{\frac{1}{x}\log x} - 1} = \dfrac{4\log x(1 + o(1))}{\frac{1}{x}\log x(1 + o(1))} = 4x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(9) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0$, si ha $f(x) = f(1+z) = \dfrac{1 + z}{|z|} = \dfrac{1 + o(1)}{|z|(1 + o(1))} = \dfrac{1}{|z|}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(10) Introdotta la variabile $z = x - 1 \to 0$, si ha $f(x) = f(1 + z) = \dfrac{1 + z}{|z^2 + 2z|} = \dfrac{1 + o(1)}{2|z|(1 + o(1))} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|z|}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(11) Introdotta la variabile $z = x - 1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1 + z) = \dfrac{1 + z}{\sqrt{z^2 + 2z}} = \dfrac{1 + o(1)}{\sqrt{2z}(1 + o(1))} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{z}}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito $\frac{1}{2}$.

(12) Si ha $f(x) = \dfrac{x(1 + o(1)) \cdot \log 9(1 + o(1))}{1 + x^3 + o(x^3) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \dfrac{\log 9 \cdot x(1 + o(1))}{\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))} = 2\log 9\dfrac{1}{x}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(13) Si ha $f(x) = \exp\big(\log x \cdot \log \operatorname{tg} x\big) = \exp\big((\log x)^2(1 + o(1))\big)$, per cui f non ha ordine di infinito.

(14) Si ha $f(x) = \dfrac{\arcsin\big(x\log x(1 + o(1))\big)}{-\log x(1 + o(1)) \cdot x^2(1 + o(1))} = \dfrac{x\log x(1 + o(1))}{-x^2\log x(1 + o(1))} = -\dfrac{1}{x}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(15) Si ha $f(x) = \dfrac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 - x + o(x)}{\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))} = \dfrac{-x(1 + o(1))}{\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))} = -\dfrac{2}{x}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(16) Si ha $f(x) = \dfrac{1 + x + o(x) - 1 + x + o(x)}{x^2} = \dfrac{2x(1 + o(1))}{x^2} = \dfrac{2}{x}(1 + o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(17) Si ha $f(x) = \exp\Big(\dfrac{1}{x^2}\log(1 + x)\Big) = \exp\Big(\dfrac{1}{x^2}x(1 + o(1))\Big) = e^{1/x(1+o(1))}$, per cui f non ha ordine di infinito.

(18) Si ha $f(x) = \exp\Big(e^{2x}\log\dfrac{2(1 + o(1))}{x(1 + o(1))}\Big) = \exp\Big(e^{2x}\log\dfrac{2}{x}(1 + o(1))\Big) = e^{-e^{2x}\log x(1+o(1))} \to +\infty$, ma f non ha ordine di infinito.

(19) Si ha $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x^5}x^4 \sin\frac{1}{x}(1+o(1)) + \frac{2}{x^2}\log x}{x(1+o(1)) + x^2(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}(1+o(1)) + \frac{2}{x^2}\log x}{x(1+o(1))} = \dfrac{\frac{2}{x^2}\log x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = \dfrac{2}{x^3}\log x(1+o(1))$, per cui f non ha ordine di infinito.

$\square$

Svolgimento esercizio 6

(1) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x} = x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(2) Si ha $f(x) = \dfrac{x}{1+o(1))} = x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(3) Si ha $f(x) = \dfrac{x}{1+o(1))}\, x(1+o(1)) = x^2(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 2.

(4) Si ha $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{x} = \dfrac{1}{2}x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(5) Si ha $f(x) = \dfrac{x(1+o(1))}{3\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{2}$.

(6) Si ha $f(x) = |x|$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(7) Si ha $f(x) = \dfrac{x^3(1+o(1))}{x} = x^2(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 2.

(8) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x(1+o(1))} = x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(9) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2 + x(1+o(1))}{x\log x + x^2(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1))}{x\log x(1+o(1))} = \dfrac{1}{\log x}(1+o(1))$, per cui f non ha ordine di infinitesimo.

(10) Si ha $f(x) = \dfrac{1 + x + o(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x}(1+o(1)) + x(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \sqrt{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{2}$.

(11) Si ha $f(x) = 1 - \exp\left(\dfrac{1}{|\log x|}\log|\log x|\right) = \dfrac{\log|\log x|}{|\log x|}(1+o(1))$, per cui f non ha ordine di infinitesimo.

(12) Introdotta la variabile $z = x - 1 \to 0$, si ha $f(x) = f(1+z) = z\log(1+z) = z^2(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 2.

(13) Introdotta la variabile $z = x - 2 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(2+z) = \dfrac{\sin\sqrt{z} + z^2}{\sqrt[4]{z} + 1 - \cos(2\pi + \pi z)} = \dfrac{\sqrt{z}(1+o(1)) + z^2}{\sqrt[4]{z} + \frac{1}{2}\pi^2 z^2 + o(z^2)} = \dfrac{\sqrt{z}(1+o(1))}{\sqrt[4]{z}(1+o(1))} = \sqrt[4]{z}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{4}$.

(14) Introdotta la variabile $z = x - \frac{\pi}{2} \to 0$, si ha $f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2} + z\right) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} + z) - 1}{2z} = \dfrac{\cos z - 1}{2z} = \dfrac{-\frac{1}{2}z^2(1+o(1))}{2z} = -\dfrac{1}{4}z(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(15) Si ha $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{1}{x}(1+o(1)) = \dfrac{2}{2\sqrt{x}(1+o(1))} \cdot \dfrac{1}{x}(1+o(1)) = \dfrac{1}{x^{3/2}}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{3}{2}$.

(16) Si ha $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} = \dfrac{1}{x^5}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 5.

(17) Si ha $f(x) = \cos\left(\dfrac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right) - 1 = \cos\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}(1+o(1))\right) - 1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4x}(1+o(1)) = -\dfrac{1}{8x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(18) Si ha $f(x) = \dfrac{5x^2(1+o(1))}{x^3(1+o(1))} \cdot \dfrac{1-e^{1+o(1)}}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))} = \dfrac{10(1-e)}{\pi x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

$\square$

Svolgimento esercizio 7

(1) Si ha $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right) = \sin\left(2\pi n\sqrt{1+n^{-3/2}}\right) = \sin\left(2\pi n\Big(1+\dfrac{1}{2n^{3/2}}(1+o(1))\Big)\right) \overset{(a)}{=} \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}(1+o(1))\right) \to 0$, dove in (a) si è usata la periodicità della funzione seno.

(2) Si ha $n\sin\left(\dfrac{n^2(n-1)-3}{n}\pi\right) = n\sin\left(-\dfrac{3\pi}{n}+n(n-1)\pi\right) \overset{(a)}{=} n\sin\left(-\dfrac{3\pi}{n}\right) = n\Big(-\dfrac{3\pi}{n}\Big)(1+o(1)) \to -3\pi$, dove in (a) si è usata la periodicità della funzione seno.

(3) Si ha $(2^n-n!)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}(n!)\right) \overset{(a)}{=} -n!(1+o(1))\sin\left(\pi-\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{n!}\right) = -n!(1+o(1))\sin\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{n!}\right) = -n!\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)(1+o(1)) \to -1$, dove in (a) si è usata la relazione $\mathrm{arctg}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(\frac{1}{x})$, $\forall x > 0$.

(4) Si ha $(3^n-n!)\cos\left(\pi+\mathrm{arctg}(n!)\right) \overset{(a)}{=} -n!(1+o(1))\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{n!}\right) = n!(1+o(1))\sin\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{n!}\right) = n!\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)(1+o(1)) \to 1$, dove in (a) si è usata la relazione $\mathrm{arctg}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(\frac{1}{x})$, $\forall x > 0$.

(5) Si ha $\dfrac{n^{n+1}+2\cdot n!}{(n-1)^n+2n^n}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{n^{n+1}(1+o(1))}{(n-1)^n+2n^n}\,\dfrac{2\pi}{n}(1+o(1)) = \dfrac{n(1+o(1))}{(\frac{n-1}{n})^n+2}\,\dfrac{2\pi}{n}(1+o(1)) =$
$= \dfrac{2\pi(1+o(1))}{e^{-1}(1+o(1))+2} \to \dfrac{2\pi}{e^{-1}+2} = \dfrac{2\pi e}{1+2e}$.

(6) Si ha $\dfrac{e^{n+\log n}+n\sin(n!)}{e^{n+1}+n^2}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{n(e^n+\sin(n!))}{e^{n+1}(1+o(1))}\,\dfrac{2\pi}{n}(1+o(1)) = \dfrac{ne^n(1+o(1))}{e^{n+1}(1+o(1))}\,\dfrac{2\pi}{n}(1+o(1)) = \dfrac{2\pi}{e}(1+o(1)) \to \dfrac{2\pi}{e}$.

(7) Si ha $\cos n \cdot \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\cos n}{n}(1+o(1)) \to 0$.

(8) Si ha $\dfrac{\log(1+e^n)}{n} = \dfrac{\log(e^n)(1+o(1))}{n} = \dfrac{n(1+o(1))}{n} \to 1$.

(9) Si ha $\log\left(1+\dfrac{\pi^n}{n!}\right) = \dfrac{\pi^n}{n!}(1+o(1)) \to 0$.

(10) Si ha $\dfrac{\log(3^n+\pi^n)}{2n}=\dfrac{\log(\pi^n(1+o(1)))}{2n}=\dfrac{n\log\pi(1+o(1))}{2n}\to\dfrac{\log\pi}{2}$.

(11) Si ha $\dfrac{\log(4^n+\pi^n)}{2n+\log n}=\dfrac{\log(4^n(1+o(1)))}{2n(1+o(1))}=\dfrac{2n\log 2(1+o(1))}{2n(1+o(1))}\to\log 2$.

(12) Si ha $\dfrac{(3+n!+\pi^{3n})(n+\sqrt{n})}{(2\cdot n!+3)\log(1+n^n)}=\dfrac{n!(1+o(1))\cdot n(1+o(1))}{2\cdot n!(1+o(1))\cdot n\log n(1+o(1))}=\dfrac{1}{2\log n}(1+o(1))\to 0$.

(13) Si ha $\log(n+\sqrt{n^2+1})-\log n=\log\Big(\dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{n}\Big)=\log\Big(\dfrac{2n(1+o(1))}{n}\Big)\to\log 2$.

(14) Si ha $\log(n-\sqrt{n^2-1})+\log n=\log\Big(\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}\Big)+\log n=\log\Big(\dfrac{n}{n+\sqrt{n^2-1}}\Big)=\log\Big(\dfrac{n}{2n(1+o(1))}\Big)\to$ $-\log 2$.

(15) Si ha $\dfrac{\log(n^2+1)-\log n}{\log(2n)}\big(n^2+n^{3/2}\log n-2\sqrt{n}\big)=\dfrac{\log\frac{n^2+1}{n}}{\log n+\log 2}n^2(1+o(1))=\dfrac{\log n(1+o(1))}{\log n(1+o(1))}n^2(1+$ $o(1))=n^2(1+o(1))\to+\infty$.

(16) Si ha $\dfrac{\log((n+6)!)-\log(n!+n^7)}{\log(6n^8+\sin\frac{n\pi}{2})}=\dfrac{\log\frac{(n+6)!}{n!+n^7}}{8\log n(1+o(1))}=\dfrac{\log(n^6(1+o(1)))}{8\log n(1+o(1))}\to\dfrac{3}{4}$.

(17) Si ha $2^{n+1}-2^{\sqrt{n^2-1}}=2^{\sqrt{n^2-1}}\big(2^{n+1-\sqrt{n^2-1}}-1\big)$. Poiché $n+1-\sqrt{n^2-1}=\frac{(n+1)^2-n^2+1}{n+1+\sqrt{n^2-1}}=\frac{2n+2}{n+1+\sqrt{n^2-1}}=\frac{2n(1+o(1))}{2n(1+o(1))}=1+o(1)$, si ha $2^{n+1}-2^{\sqrt{n^2-1}}=2^{\sqrt{n^2-1}}(2^{1+o(1)}-1)=2^{n(1+o(1))}(1+o(1))\to$ $+\infty$.

(18) Si ha $\sqrt[n]{n^3}=e^{\frac{1}{n}\log n^3}\to 1$.

(19) Si ha $\sqrt[2n+1]{-n}=-\sqrt[2n+1]{n}=-e^{\frac{1}{2n+1}\log n}\to -1$.

(20) Si ha $\sqrt[n]{n^2+3}=e^{\frac{1}{n}\log(n^2+3)}\to 1$.

(21) Si ha $\sqrt[n]{2^n+n^2}=e^{\frac{1}{n}\log(2^n+n^2)}=e^{\log 2(1+o(1))}\to 2$.

(22) Intanto $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}(1+o(1))}\to\frac{1}{2}$. Inoltre, $\sqrt[n]{2^{n+1}+n^2}=e^{\frac{1}{n}\log(2^{n+1}+n^2)}=$ $e^{\log 2(1+o(1))}\to 2$. Quindi $\big(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\big)\sqrt[n]{2^{n+1}+n^2}\to 1$.

(23) Si ha $\Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)^{n/3}=\exp\Big(\dfrac{n}{3}\log\Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)\Big)=\exp\Big(\dfrac{n}{3}\log\Big(\dfrac{2}{3}(1+o(1))\Big)\Big)=\exp\Big(-\dfrac{n}{3}\log\dfrac{3}{2}(1+$ $o(1))\Big)\to 0$.

(24) Si ha $\Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)^{3/n}=\exp\Big(\dfrac{3}{n}\log\Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)\Big)=\exp\Big(\dfrac{3}{n}\log\Big(\dfrac{2}{3}(1+o(1))\Big)\Big)=\exp\Big(-\dfrac{3}{n}\log\dfrac{3}{2}(1+$ $o(1))\Big)\to 1$.

(25) Si ha $\Big(\dfrac{3n+4}{2n+1}\Big)^{n}=\exp\Big(n\log\Big(\dfrac{3n+4}{2n+1}\Big)\Big)=\exp\Big(n\log\Big(\dfrac{3}{2}(1+o(1))\Big)\Big)=\exp\Big(n\log\dfrac{3}{2}(1+$ $o(1))\Big)\to+\infty$.

(26) Si ha $(\sqrt[n]{2}-1)^n=\exp\big(n\log(\sqrt[n]{2}-1)\big)=\exp\big(n\log o(1)\big)\to 0$. Oppure, poiché $0<\sqrt[n]{2}-1<\frac{1}{2}$, definitivamente, si ha, definitivamente, $0<(\sqrt[n]{2}-1)^n<2^{-n}\to 0$.

(27) Si ha $\Big(1+\dfrac{1}{n!}\Big)^{n^n}=\exp\Big(n^n\log\Big(1+\dfrac{1}{n!}\Big)\Big)=\exp\Big(n^n\cdot\dfrac{1}{n!}(1+o(1))\Big)\to+\infty$.

(28) Si ha $\Big(1+\dfrac{1}{n^n}\Big)^{n!} = \exp\Big(n!\log\Big(1+\dfrac{1}{n^n}\Big)\Big) = \exp\Big(n!\cdot\dfrac{1}{n^n}(1+o(1))\Big) \to 1$.

(29) Poiché $n^n = o((2n+1)^n)$, e $n^n = o((2n+2)^n)$ [in quanto, ad esempio $\frac{n^n}{(2n+1)^n} = \exp\Big(n\cdot\log\frac{n}{2n+1}\Big) = \exp\Big(n\log\Big(\frac{1}{2}(1+o(1))\Big)\Big) = \exp\Big(-n\log 2(1+o(1))\Big) \to 0$], si ha $\dfrac{(2n+1)^n+n^n}{(2n+2)^n-n^n} = \dfrac{(2n+1)^n(1+o(1))}{(2n+2)^n(1+o(1))} = \exp\Big(n\cdot\log\dfrac{2n+1}{2n+2}\Big)(1+o(1)) = \exp\Big(n\log\Big(1-\dfrac{1}{2n+2}\Big)\Big)(1+o(1)) = \exp\Big(-\dfrac{n}{2n+2}(1+o(1))\Big)(1+o(1)) \to e^{-1/2}$.

(30) Si ha $n^2(2n+\sqrt{n})^{1/n} - \cos(n^3) = n^2\sqrt[n]{2n}\Big(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\Big)^{1/n} - \cos(n^3) = n^2(1+o(1)) - \cos(n^3) = n^2(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $(1+\frac{1}{2\sqrt{n}})^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{2\sqrt{n}})} \to 1$.

(31) Si ha $\big(4n^n-(n+1)^n\big)^{1/n} = n\Big\{4-\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^n\Big\}^{1/n} = n(4-e+o(1))^{1/n} = n(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $1 \le (4-e+o(1))^{1/n} \le 4^{1/n} \to 1$.

(32) Si ha $\big((n+1)^{n+1}-n^{n+1}\big)^{1/n} = n\sqrt[n]{n}\Big\{\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{n+1}-1\Big\}^{1/n} = n(1+o(1))(e+o(1)-1)^{1/n} = n(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $1 \le (e-1+o(1))^{1/n} \le e^{1/n} \to 1$.

(33) Si ha $\dfrac{(n^2-1)^n\,\sin(\frac{\pi n+1}{4n-1})}{(n-2)^{2n}+\operatorname{arctg}(n!-2^n)} = \dfrac{n^{2n}\exp\big(n\log(1-\frac{1}{n^2})\big)\,\sin\big(\frac{\pi}{4}(1+o(1))\big)}{n^{2n}\exp\big(2n\log(1-\frac{2}{n})\big)+\frac{\pi}{2}(1+o(1))} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\exp\Big(n\Big(-\dfrac{1}{n^2}\Big)(1+o(1)) - 2n\Big(-\dfrac{2}{n}\Big)(1+o(1))\Big)(1+o(1)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^4(1+o(1)) \to \dfrac{e^4\sqrt{2}}{2}$.

(34) Si ha $\dfrac{(3n^{2n^2}-(n^2+1)^{n^2})^2+4n^{n^2}}{(n^2+5)^{2n^2}+6(n^2)^{n^2+n}} = \dfrac{n^{4n^2}\big(3-(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\big)^2+4n^{n^2}}{n^{4n^2}\big(1+\frac{5}{n^2}\big)^{2n^2}+6n^{2n^2+n}} = \dfrac{(3-e+o(1))^2+4n^{-3n^2}}{\exp\big(2n^2\log(1+\frac{5}{n^2})\big)+6n^{-2n^2+n}} = \dfrac{(3-e)^2+o(1)}{\exp\big(2n^2\frac{5}{n^2}(1+o(1))\big)+6n^{-2n^2+n}} \to \dfrac{(3-e)^2}{e^{10}}$.

(35) Si ha $\dfrac{((n+1)!)^{2n}((7\cdot n!)^{3/n!}-1)}{n^{2n}\log((n!)^6)((n!)^{2n-1}+n^2)} = \dfrac{(n+1)^{2n}(n!)^{2n}\{\exp(\frac{3}{n!}\log(7\cdot n!))-1\}}{6n^{2n}\log(n!)\cdot(n!)^{2n-1}(1+o(1))} =$
$= \Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{2n}\dfrac{(n!)^{2n}\{\frac{3}{n!}\log(7\cdot n!)(1+o(1))\}}{6\log(n!)\cdot(n!)^{2n-1}(1+o(1))} = e^2(1+o(1))\dfrac{3\log(n!)(1+o(1))\}}{6\log(n!)(1+o(1))} \to \dfrac{e^2}{2}$.

(36) Si ha $\dfrac{\log((n!)^2)((n!)^{3n-1}+n^3)}{(n!)^{3n}((8\cdot n!)^{2/n!}-1)} = \dfrac{2\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}(1+o(1))}{(n!)^{3n}\{\exp(\frac{2}{n!}\log(8\cdot n!))-1\}} = \dfrac{2\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}(1+o(1))}{(n!)^{3n}\{\frac{2}{n!}\log(8\cdot n!)(1+o(1))\}} = \dfrac{2\log(n!)(1+o(1))\}}{2\log(n!)(1+o(1))} \to 1$.

(37) Si ha $\dfrac{n^{3n}\log((n!)^2)(n!)^{3n-1}}{(((n+1)!)^{3n}+n^3)((8\cdot n!)^{2/n!}-1)} = \dfrac{2n^{3n}\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}}{(n+1)^{3n}(n!)^{3n}(1+o(1))\{\exp(\frac{2}{n!}\log(8\cdot n!))-1\}} =$
$= \Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^{3n}\dfrac{2\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}(1+o(1))}{(n!)^{3n}\{\frac{2}{n!}\log(8\cdot n!)(1+o(1))\}} = e^{-3}(1+o(1))\dfrac{2\log(n!)(1+o(1))}{2\log(n!)(1+o(1))} \to \dfrac{1}{e^3}$.

(39) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, si ha $1 \le (n-1)! \le n! \le n^n$, per cui $1 \le ((n-1)!)^{1/n^3} \le n^{1/n^2} = \exp(\frac{\log n}{n^2}) \to 1$, cioè $((n-1)!)^{1/n^3} \to 1$. **Alternativamente**, per la formula di Stirling si ha $((n-$

$1)!)^{1/n^3} = \exp\Big(\dfrac{\log((n-1)!)}{n^3}\Big) = \exp\Big(\dfrac{\log((n-1)^{n-1}e^{1-n}\sqrt{2\pi(n-1)}(1+o(1)))}{n^3}\Big) = \exp\Big\{\dfrac{1}{n^3}\Big((n-$
$1)\log(n-1) - n + 1 + \dfrac{1}{2}\log(n-1) + \dfrac{1}{2}\log(2\pi) + \log(1+o(1))\Big)\Big\} = \exp\Big(\dfrac{n\log n(1+o(1))}{n^3}\Big) \to 1.$

(40) Si ha $\dfrac{((n+1)!)^{1/n^3} - ((n-1)!)^{1/n^3}}{\log(n^4+n)\,\mathrm{tg}(\frac{1}{2n^3})} = \dfrac{((n-1)!)^{1/n^3}((n^2+n)^{1/n^3}-1)}{4\log(n)\cdot\frac{1}{2n^3}(1+o(1))} =$
$= \dfrac{n^3(1+o(1))}{2\log n}\Big\{\exp\Big(\dfrac{\log(n^2+n)}{n^3}\Big) - 1\Big\} = \dfrac{n^3(1+o(1))}{2\log n}\,\dfrac{2\log n(1+o(1))}{n^3} \to 1.$

(38) Per la formula di Stirling si ha $\dfrac{\log(n!)}{n\log n} = \dfrac{\log\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))\right)}{n\log n} = \dfrac{n\log n - n + \frac{1}{2}\log(2\pi n) + o(1)}{n\log n} =$
$\dfrac{n\log n(1+o(1))}{n\log n} \to 1.$

$\square$