Analisi Matematica I
Preliminari (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $x^2 - 10x + 16 \leq 0 \iff 2 \leq x \leq 8$, si ha $\inf A = \min A = 2$, $\sup A = \max A = 8$.

(2) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $x^2 - x - 6 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, si ha $A = (-\infty, -2)$, per cui $\inf A = -\infty$, $\sup A = -2$.

(3) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $1 \leq x^2 - 3x + 3 \leq \frac{7}{4} \iff \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x + \frac{5}{4} \leq 0 \end{cases} \iff$ $\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \iff x \in [\frac{1}{2}, 1] \cup [2, \frac{5}{2}]$, si ha $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$, $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$.

(4) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $-x^2 + 4 \geq 0 \iff x \in [-2, 2]$, e $2x^2 - x - 1 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$, si ha $A = [-2, -\frac{1}{2}) \cup (1, 2]$, per cui $\inf A = \min A = -2$, $\sup A = \max A = 2$.

(5) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $-x^2 - x + 2 \geq 0 \iff x \in [-2, 1]$, e $x^2 - 9 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, si ha $A = (-\infty, -3) \cup [-2, 1] \cup (3, +\infty)$, per cui $\inf A = -\infty$, $\sup A = +\infty$.

(6) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto

$$\sqrt{3(x^2-1)} < 5 - x \iff \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \\ 3x^2 - 3 < (5-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \leq 5 \\ x^2 + 5x - 14 < 0 \end{cases} \iff x \in (-7, -1] \cup [1, 2).$$

Quindi, si ha $\inf A = -7$, $\sup A = 2$.

(7) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto

$$\sqrt{2x+4} > x - 2 \iff \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 2x + 4 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x + 4 > (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\iff x \in [-2, 2) \bigvee \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x < 0 \end{cases} \iff x \in [-2, 6).$$

Quindi, si ha $\inf A = \min A = -2$, $\sup A = 6$.

(8) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto

$$\sqrt{x^2-1} > x + 3 \iff \begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 1 > (x+3)^2 \end{cases}$$

$$\iff x \in (-\infty, -3) \bigvee \begin{cases} x \geq -3 \\ 3x + 5 < 0 \end{cases} \iff x \in \Big(-\infty, -\frac{5}{3}\Big).$$

Quindi, si ha $\inf A = -\infty$, $\sup A = -\frac{5}{3}$.

(9) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto

$$\sqrt{5x-2}-\sqrt{x}<\frac{3x-1}{\sqrt{x}} \iff \begin{cases} x>0 \\ 5x-2\geq 0 \\ \sqrt{x(5x-2)}-x<3x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq \frac{2}{5} \\ \sqrt{x(5x-2)}>4x-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geq \frac{2}{5} \\ 4x-1\geq 0 \\ x(5x-2)<(4x-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq \frac{2}{5} \\ 11x^2+10x-1>0 \end{cases} \iff x\in \Big[\frac{2}{5},+\infty\Big).$$

Quindi, si ha $\inf A=\min A=\frac{2}{5}$, $\sup A=+\infty$.

(10) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=x^2-5x+6$, corrispondenti alle ascisse $x\in[0,4]$. Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[-\frac{1}{4},6]$, per cui $\inf A=\min A=f(\frac{5}{2})=\frac{1}{4}$, $\sup A=\max A=f(0)=6$.

(11) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=|x-1|+2|x|$, corrispondenti alle ascisse $x\in[-4,2]$. Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[1,13]$, per cui $\inf A=\min A=f(0)=1$, $\sup A=\max A=f(-4)=13$.

(12) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=x^2-5x+6$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $x^2-5x+4<0$, cioè $x\in(1,4)$. Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[\frac{1}{4},2)$, per cui $\inf A=\min A=f(\frac{5}{2})=-\frac{1}{4}$, $\sup A=2$.

(13) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=x^2-5x+4$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $\sqrt{2x+4}>x-2$, cioè $x\in[-2,6)$ (vedi lo svolgimento dell'esercizio 7). Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[-\frac{9}{4},18]$, per cui $\inf A=\min A=f(\frac{5}{2})=-\frac{9}{4}$, $\sup A=\max A=f(-2)=18$.

(14) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=\frac{1}{x}$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $\frac{x^2+x-2}{x^2-9}\leq 0$, cioè $x\in(-3,-2]\cup[1,3)$. Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1]$, per cui $\inf A=\min A=f(-2)=-\frac{1}{2}$, $\sup A=\max A=f(1)=1$.

(15) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto, essendo $z\mapsto \log_3 z$ (strettamente) crescente, si ha $3^x>\frac{1}{27} \iff x>\log_3\frac{1}{27}=-3$. Quindi, si ha $\inf A=-3$, $\sup A=+\infty$.

(16) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=4^x$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $2^x<40$. Intanto, essendo $z\mapsto\log_2 z$ (strettamente) crescente, si ha $2^x<40 \iff x<\log_2 40$, cioè $\operatorname{dom} f=(-\infty,\log_2 40)$. Inoltre, essendo $z\mapsto 4^z$ (strettamente) crescente, si ha $x<\log_2 40 \iff 4^x<4^{\log_2 40}=2^{2\log_2 40}=40^2$. Quindi, essendo $A=\operatorname{im} f=(-\infty,40^2)$, si ha $\inf A=-\infty$, $\sup A=40^2=1600$.

(17) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=x^2-1$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $(\frac{1}{4})^{x^2+2}\leq 15$. Poiché $z\mapsto\log_{1/4} z$ è (strettamente) decrescente, si ha $(\frac{1}{4})^{x^2+2}\leq 15 \iff x^2+2\geq\log_{1/4}15=-\log_4 15 \iff x^2\geq -2-\log_4 15<0$, cioè $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$. Quindi, essendo $A=\operatorname{im} f=[-1,+\infty)$, si ha $\inf A=\min A=-1$, $\sup A=+\infty$.

(18) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto \log_2 z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\begin{aligned} 2^{|x-1|} < 2^x &\iff |x-1| < x \\ &\iff \begin{cases} x-1<0 \\ -(x-1)<x \end{cases} \bigvee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1<x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x<1 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq 1 \\ x \text{ qualunque} \end{cases} \\ &\iff x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi, si ha $\inf A = \frac{1}{2}$, $\sup A = +\infty$.

(19) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto \log_3 z$ è (strettamente) crescente, si ha $3^{|x-1|} > 1 \iff |x-1| > 0 \iff x \neq 1$. Quindi, essendo $A = (0,1) \cup (1,+\infty)$, si ha $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$.

(20) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto \log_{1/2} z$ è (strettamente) decrescente, si ha $(\frac{1}{2})^{x-2} > (\frac{1}{2})^{x^2} \iff x-2 < x^2 \iff x^2-x+2>0$, e poiché $x^2-x+2=0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2} \notin \mathbb{R}$, si ha $x^2-x+2>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi la disequazione proposta ha soluzione per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, essendo $A = [-1,3)$, si ha $\inf A = \min A = -1$, $\sup A = 3$.

(21) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\frac{2^x-1}{2^x-3} > 2^x \iff \begin{cases} z = 2^x \\ \dfrac{z-1}{z-3} > z. \end{cases}$$

Poiché

$$\frac{z-1}{z-3} > z \iff \frac{z-1-z(z-3)}{z-3} > 0 \iff \frac{z^2-4z+1}{z-3} < 0$$

e $z^2-4z+1=0 \iff z = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$, si ha

$$\frac{z-1}{z-3} > z \iff z < 2-\sqrt{3} \bigvee 3 < z < 2+\sqrt{3}.$$

Poiché $z \mapsto \log_2 z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\begin{aligned} \frac{2^x-1}{2^x-3} > 2^x &\iff 2^x < 2-\sqrt{3} \bigvee 3 < 2^x < 2+\sqrt{3} \\ &\iff x < \log_2(2-\sqrt{3}) \bigvee \log_2 3 < x < \log_2(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Quindi, essendo $A = \big(-\infty, \log_2(2-\sqrt{3})\big) \cup \big(\log_2 3, \log_2(2+\sqrt{3})\big)$, si ha $\inf A = -\infty$, $\sup A = \log_2(2+\sqrt{3})$.

(22) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x) = x+4$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $(\frac{1}{2})^{3+x^2} \geq (\frac{1}{2})^{4x}$. Poiché $z \mapsto \log_{1/2} z$ è (strettamente) decrescente, si ha $(\frac{1}{2})^{3+x^2} \geq (\frac{1}{2})^{4x} \iff 3+x^2 \leq 4x \iff x^2-4x+3 \leq 0$, e poiché $x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$, si ha $x^2 - 4x + 3 \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 3$. Quindi la disequazione proposta ha soluzione $\iff 1 \leq x \leq 3$. Quindi, essendo $A = \operatorname{im} f = [5, 7]$, si ha $\inf A = \min A = 5$, $\sup A = \max A = 7$.

(23) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x) = x^2 - 3$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $(\frac{1}{2})^{3+x^2} \geq (\frac{1}{2})^{4x}$. Poiché $z \mapsto \log_5 z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\begin{aligned}
\log_5(4|x| - x^2) < 1 &\iff 0 < 4|x| - x^2 < 5 \\
&\iff \begin{cases} z = |x| \\ z^2 - 4z < 0 \\ z^2 - 4z + 5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = |x| \\ 0 < z < 4 \\ z \text{ qualunque} \end{cases} \\
&\iff x \in (-4, 0) \cup (0, 4).
\end{aligned}$$

Quindi, essendo $A = \operatorname{im} f = (-3, 13]$, si ha $\inf A = -3$, $\sup A = \max A = 13$.

(24) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto 10^z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\begin{aligned}
0 < \log_{10} \frac{x+2}{x+1} < 1 &\iff 1 < \frac{x+2}{x+1} < 10 \iff \begin{cases} \frac{x+2}{x+1} - 1 > 0 \\ \frac{x+2}{x+1} - 10 < 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{x+1} > 0 \\ \frac{-9x-8}{x+1} < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 1 > 0 \\ -9x - 8 < 0 \end{cases} \\
&\iff x > -\frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Quindi, essendo $A = (-\frac{8}{9}, +\infty)$, si ha $\inf A = -\frac{8}{9}$, $\sup A = +\infty$.

(25) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x) = 2^x$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $\log_{11}(x + 5) + \log_{11}(x - 2) < \log_{11}(3x - 1)$. Poiché $z \mapsto 11^z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\log_{11}(x + 5) + \log_{11}(x - 2) < \log_{11}(3x - 1) \iff \begin{cases} x + 5 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \\ (x + 5)(x - 2) < 3x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \begin{cases} x > 2 \\ x^2 + 5x - 2x - 10 - 3x + 1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases} \\
&\iff 2 < x < 3.
\end{aligned}$$

Quindi, essendo $A = \operatorname{im} f = (4, 8)$, si ha $\inf A = 4$, $\sup A = 8$.

(26) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto (0,7)^z$ è (strettamente) decrescente, si ha

$$2\log_{0,7}(x+1) - \log_{0,7}(x-1) > \log_{0,7}(3x-1) \iff \begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \\ 3x-1>0 \\ (x+1)^2 < (3x-1)(x-1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>1 \\ x^2+2x+1-3x^2+x+3x-1<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>1 \\ -2x^2+6x<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>1 \\ x<0 \vee x>3 \end{cases} \iff x>3.$$

Quindi, essendo $A = (3, +\infty)$, si ha $\inf A = 3$, $\sup A = +\infty$.

(27) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto 10^z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\log_{10}\frac{2x+1}{x+3} > 1 \iff \frac{2x+1}{x+3} > 10 \iff \frac{-8x-29}{x+3} > 0 \iff x \in \Big(-\frac{29}{8}, -3\Big).$$

Quindi, si ha $\inf A = -\frac{29}{8}$, $\sup A = -3$.

(28) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto 10^z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\log_{10}(2x+1) - \log_{10}(x+3) \le 1 \iff \begin{cases} 2x+1>0 \\ x+3>0 \\ \dfrac{2x+1}{x+3} \le 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \\ \dfrac{-8x-29}{x+3} \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ -8x-29 \le 0 \end{cases}$$

$$\iff x > -\frac{1}{2}.$$

Quindi, si ha $\inf A = -\frac{1}{2}$, $\sup A = +\infty$.

(29) Indichiamo con A l'insieme proposto. Osserviamo dapprima che il dominio naturale della funzione $x \mapsto \log_{(x+1)}(x^2-4x+5)$ è $\begin{cases} x^2-4x+5>0 \\ x+1>0 \end{cases} \iff x > -1$, e quindi, per ogni $x > -1$, si ha

$$\log_{(x+1)}(x^2-4x+5) > 1 \iff \frac{\log_2(x^2-4x+5)}{\log_2(x+1)} > 1$$

$$\iff \frac{\log_2(x^2-4x+5) - \log_2(x+1)}{\log_2(x+1)} > 0 \iff \frac{\log_2 \dfrac{x^2-4x+5}{x+1}}{\log_2(x+1)} > 0.$$

Ora $\log_2 \dfrac{x^2-4x+5}{x+1} \geq 0 \iff \dfrac{x^2-4x+5}{x+1} \geq 1 \iff \dfrac{x^2-5x+4}{x+1} \geq 0 \iff -1 < x \leq 1 \bigvee x \geq 4$, e $\log_2(x+1) > 0 \iff x+1 > 1 \iff x > 0$, per cui

$$\log_{(x+1)}(x^2-4x+5) > 1 \iff 0 < x < 1 \bigvee x > 4.$$

Quindi, si ha $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$.

(30) Indichiamo con A l'insieme proposto. Ricordando che $\sin x = \sin(\pi - x)$, si ha $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ Quindi, $A = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = \frac{\pi}{4}$, $\sup A = \max A = \frac{19\pi}{4}$.

(31) Indichiamo con A l'insieme proposto. Ricordando che $\cos x = \cos(-x)$, si ha $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Quindi, $A = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{3}$, $\sup A = \max A = \frac{17\pi}{3}$.

(32) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Quindi, $A = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}, \frac{19\pi}{3}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = \frac{\pi}{3}$, $\sup A = \max A = \frac{19\pi}{3}$.

(33) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned} &\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x - 2 = 0 \iff -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \\ &\iff \begin{cases} z = \sin x \\ 2z^2 - z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \sin x \\ z = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases} \end{cases} \\ &\iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \bigvee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \bigvee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi, $A = \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{6}$, $\sup A = \max A = \frac{23\pi}{6}$.

(34) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned} &\cos 2x + 2\sin^2 x + \cos^3 x - 2\cos x - 1 = 0 \\ &\quad\iff 2\cos^2 x - 1 + 2 - 2\cos^2 x + \cos^3 x - 2\cos x - 1 = 0 \\ &\quad\iff \cos^3 x - 2\cos x = 0 \iff \begin{cases} z = \cos x \\ z^3 - 2z = 0 \end{cases} \\ &\quad\iff \begin{cases} z = \cos x \\ z = 0 \vee z = \pm\sqrt{2} \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi, $A = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{2}$, $\sup A = \max A = \frac{17\pi}{2}$.

(35) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned} 1+\cos^2 x-\sin x=0 &\iff 2-\sin^2 x-\sin x=0 \\ &\iff \begin{cases} z=\sin x \\ z^2+z-2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=\sin x \\ z=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases} \end{cases} \\ &\iff x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi, $A=\left\{-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{13\pi}{2}\right\}$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{3\pi}{2}$, $\sup A=\max A=\frac{13\pi}{2}$.

(36) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned} &\cos(2x)\big(\cos^2 x-\sin x-2\big)=0 \iff \cos(2x)=0 \bigvee -\sin^2 x-\sin x-1=0 \\ &\iff 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \bigvee \begin{cases} z=\sin x \\ z^2+z+1=0 \end{cases} \iff x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \bigvee \begin{cases} z=\sin x \\ z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\notin\mathbb{R}, \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi l'equazione proposta ha solo le soluzioni $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. Quindi, $A=\{\frac{(2k+1)\pi}{4}:k\in\mathbb{Z},k=-3,\dots,9\}$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{7\pi}{4}$, $\sup A=\max A=\frac{19\pi}{4}$.

(37) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned} \cos x+\sin x=\sqrt{2} &\iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=1 \\ &\iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)=1 \iff x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ &\iff x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi, $A=\left\{-\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right\}$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{7\pi}{4}$, $\sup A=\max A=\frac{9\pi}{4}$.

(38) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned} \cos x+\sqrt{3}\sin x=0 &\iff \frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0 \\ &\iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)=0 \iff x+\frac{\pi}{6}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ &\iff x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi, $A=\left\{\frac{(6k-1)\pi}{6}:k\in\mathbb{Z},k\geq -3\right\}$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{19\pi}{6}$, $\sup A=+\infty$.

(39) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha $|\cos x-1|<\cos x \iff 1-\cos x<\cos x \iff \cos x>\frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$, mod 2π. Quindi, $A=\big(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\big)$, per cui si ha $\inf A=-\frac{\pi}{3}$, $\sup A=\frac{\pi}{3}$.

(40) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x+1\geq 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\geq -\frac{1}{2} \iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)\geq -\frac{1}{2}$$
$$\iff -\frac{\pi}{6}\leq x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{7\pi}{6},\quad \mathrm{mod}\ 2\pi \iff -\frac{\pi}{3}\leq x\leq \pi,\quad \mathrm{mod}\ 2\pi.$$

Quindi, $A=\big[-\frac{\pi}{3},\pi\big]$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{\pi}{3}$, $\sup A=\max A=\pi$.

(41) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha $\cos x+\sin 2x>0 \iff \cos x(1+2\sin x)>0$.
Ora $\cos x\geq 0 \iff -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, $\ \mathrm{mod}\ 2\pi$, e
$1+2\sin x\geq 0 \iff \sin x\geq -\frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{7\pi}{6}$, $\ \mathrm{mod}\ 2\pi$.
Quindi $\cos x+\sin 2x>0 \iff -\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}\bigvee\frac{7\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{2}$, $\ \mathrm{mod}\ 2\pi$.
Quindi, $A=\big(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\big)$, per cui si ha $\inf A=\frac{7\pi}{6}$, $\sup A=\frac{3\pi}{2}$.

(42) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$2-\sin x-\sin^2 x>0 \iff \begin{cases} z=\sin x \\ z^2+z-2<0\end{cases} \overset{(a)}{\iff} \begin{cases} z=\sin x \\ -2<z<1\end{cases}$$
$$\iff x\neq\frac{\pi}{2}\quad \mathrm{mod}\ 2\pi,$$

dove in (a) si è usato il risultato $z^2+z-2=0 \iff z=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}-2\\ 1.\end{cases}$
Inoltre $\sin x\cos x>0 \iff \sin 2x>0 \iff 0<2x<\pi$, $\ \mathrm{mod}\ 2\pi \iff 0<x<\frac{\pi}{2}$, $\ \mathrm{mod}\ \pi$.
Quindi

$$\frac{2-\sin x-\sin^2 x}{\cos x\sin x}>0 \iff 0<x<\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{mod}\ \pi.$$

Quindi, $A=\big(-\pi,-\frac{\pi}{2}\big)\cup\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$, per cui si ha $\inf A=-\pi$, $\sup A=\frac{\pi}{2}$.

(43) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\sin^2 x+3\cos^2 x+\sin x-2\geq 0 \iff \sin^2 x+3-3\sin^2 x+\sin x-2\geq 0$$
$$\iff -2\sin^2 x+\sin x+1\geq 0 \iff 2\sin^2 x-\sin x-1\leq 0$$
$$\iff \begin{cases} z=\sin x \\ 2z^2-z-1\leq 0\end{cases} \overset{(a)}{\iff} \begin{cases} z=\sin x \\ -\frac{1}{2}\leq z\leq 1\end{cases}$$
$$\iff -\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{7\pi}{6},\quad \mathrm{mod}\ 2\pi,$$

dove in (a) si è usato il risultato $2z^2-z-1=0 \iff z=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\\ 1.\end{cases}$ Quindi, $A=\big[-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\big]\cup\big[\frac{11\pi}{6},\frac{19\pi}{6}\big]\cup\big[\frac{23\pi}{6},\frac{31\pi}{6}\big]$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{\pi}{6}$, $\sup A=\max A=\frac{31\pi}{6}$.

(44) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned}
2\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2}+1 &\iff 1+\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}+1 \\
&\iff \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = 1 \\
&\iff \cos\Big(2x+\frac{\pi}{4}\Big) = 1 \iff 2x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\
&\iff x = -\frac{\pi}{8} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Quindi, $A = \big\{-\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \frac{23\pi}{8}, \frac{31\pi}{8}, \frac{39\pi}{8}\big\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{8}$, $\sup A = \max A = \frac{39\pi}{8}$.

(45) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned}
3\sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 0 &\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \geq 0 \iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big) \geq 0 \\
&\iff 0 \leq x+\frac{\pi}{6} \leq \pi, \quad \mathrm{mod}\ 2\pi \iff -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}, \quad \mathrm{mod}\ 2\pi.
\end{aligned}$$

Quindi, $A = \big[-\frac{13\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}\big] \cup \big[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\big] \cup \big[\frac{11\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\big]$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{13\pi}{6}$, $\sup A = \max A = \frac{17\pi}{6}$.

(46) Indichiamo con A l'insieme proposto. Usando le espressioni di seno e coseno in funzione della tangente dell'arco-metà (e avendo verificato che $x = \pi \mod 2\pi$ non è soluzione dell'equazione assegnata), si ha

$$\begin{aligned}
\sin x + (2-\sqrt{3})\cos x - 1 \geq 0 &\iff \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} + (2-\sqrt{3})\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} - 1 \geq 0 \\
&\iff 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + (2-\sqrt{3})(1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}) - 1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2} \geq 0 \\
&\iff (3-\sqrt{3})\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2} - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \sqrt{3} - 1 \leq 0 \\
&\overset{(a)}{\iff} \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \leq 1 \iff \frac{\pi}{6} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{mod}\ \pi \\
&\iff \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{mod}\ 2\pi,
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il risultato $(3-\sqrt{3})z^2 - 2z + \sqrt{3} - 1 = 0 \iff z = \frac{1\pm\sqrt{1-(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1\pm\sqrt{1-3\sqrt{3}+3+3-\sqrt{3}}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1\pm\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1\pm(2-\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 1. \end{cases}$

Quindi, $A = \big[-\frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{2}\big] \cup \big[-\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}\big] \cup \big[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big] \cup \big[\frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}\big]$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{11\pi}{3}$, $\sup A = \max A = \frac{5\pi}{2}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x^2+5x+4 \geq 0 \iff x \in (-\infty,-4] \cup [-1,+\infty)$.

(2) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x^2-2x+1 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}$.

(3) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 2-x^2 \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(4) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \frac{4-x^2}{2x^2-x-1} \geq 0 \iff x \in [-2,-\frac{1}{2}) \cup (1,2]$.

(5) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x-2|x|+2 \geq 0 \iff \begin{cases} x<0 \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x<0 \\ x \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \iff -\frac{2}{3} \leq x \leq 2.$

(6) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{2x+4} \geq x-2 \iff \begin{cases} x-2<0 \\ 2x+4 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x+4 \geq (x-2)^2 \end{cases}$

$\iff x \in [-2,2) \bigvee \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-6x \leq 0 \end{cases} \iff x \in [-2,6].$

(7) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 40-2^x \geq 0 \iff x \leq \log_2 40$.

(8) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 3\sin x+\sqrt{3}\cos x \geq 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x \geq 0 \iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big) \geq 0 \iff 0 \leq x+\frac{\pi}{6} \leq \pi, \mod 2\pi \iff -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}, \mod 2\pi$.

(9) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{3}\sin x+\cos x+1 \geq 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x \geq -\frac{1}{2} \iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big) \geq -\frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{6} \leq x+\frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}, \mod 2\pi \iff -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi, \mod 2\pi$.

(10) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 4x-1>0 \iff x>\frac{1}{4}$.

(11) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x^2-2>0 \iff x \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},+\infty)$.

(12) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \log_3(x^2-2) \geq 0 \iff x^2-2 \geq 1 \iff x \in (-\infty,-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3},+\infty)$.

(13) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{x^2-2}>0 \iff x^2-2>0 \iff \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},+\infty)$.

(14) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff |x+3|-2>0 \iff \begin{cases} x+3<0 \\ -(x+3)-2>0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ (x+3)-2>0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x<-3 \\ x<-5 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq -3 \\ x>-1 \end{cases} \iff x<-5 \vee x>-1.$

(15) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x^2-2|x|-3>0 \iff \begin{cases} z=|x| \\ z^2-2z-3>0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=|x| \\ z<-1 \vee z>3 \end{cases} \iff$

$|x|>3$.

(16) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{x^2-1}>x+3 \iff \begin{cases} x+3<0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-1>(x+3)^2. \end{cases}$

Poiché $x^2-1>(x+3)^2 \iff x^2-1-x^2-6x-9>0 \iff 3x+5<0$, si ha $\sqrt{x^2+1}<x+3 \iff \begin{cases} x<-3 \\ x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq -3 \\ x<-\frac{5}{3} \end{cases} \iff x<-\frac{5}{3}$.

(17) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{3(x^2-1)} < 5-x \iff \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 3x^2-3 < (5-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \leq 5 \\ x^2+5x-14 < 0 \end{cases}$
$\iff x \in (-7,-1] \cup [1,2)$.

(18) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 3^x > \frac{1}{27} \iff x > -3$.

(19) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 2^x - 2^{|x-1|} > 0 \iff 2^{|x-1|} < 2^x \iff |x-1| < x \iff$
$\begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) < x \end{cases} \bigvee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < x \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq 1 \\ x \text{ qualunque} \end{cases} \iff x > \frac{1}{2}$.

(20) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff |\cos x - 1| < \cos x \iff 1 - \cos x < \cos x \iff \cos x > \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}, \mod 2\pi$.

(21) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

(22) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq \frac{x}{x+2} \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{2x+2}{x+2} \geq 0 \\ \frac{2}{x+2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \iff x \geq -1$.

(23) Osserviamo che $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x-1}\right), x \neq -1$. Si ha, per ogni $x \neq -1$, che $x \in \operatorname{dom} f \iff$
$-1 \leq \frac{1}{x-1} \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{x}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x-2}{x-1} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty) \\ x \in (-\infty,1) \cup (2,+\infty) \end{cases} \iff x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$,
e quindi $\operatorname{dom} f = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (2,+\infty)$.

(24) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x \neq \pm 2$.

(25) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq x^2-5x+5 \leq 1 \iff \begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0 \\ x^2-5x+4 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty,2] \cup [3,+\infty) \\ x \in [1,4] \end{cases}$
$x \in [1,2] \cup [3,4]$.

(26) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq x^2+|x+1| \leq 1 \iff \begin{cases} x+1 < 0 \\ x^2-(x+1) \leq 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+(x+1) \leq 1 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} x < -1 \\ x^2-x-2 \leq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \iff x \in [-1,0]$.

(27) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq |2x^2-16x+31| \leq 1 \iff -1 \leq 2x^2-16x+31 \leq 1 \iff$
$\begin{cases} 2x^2-16x+32 \geq 0 \\ 2x^2-16x+30 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-4)^2 \geq 0 \\ 2(x^2-8x+15) \leq 0 \end{cases} \iff x \in [3,5]$.

(28) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq 3^{|x-1|} \leq 1 \iff |x-1| \leq 0 \iff x = 1$.

(29) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq \log_5(4|x|-x^2) \leq 1 \iff \frac{1}{5} \leq 4|x|-x^2 \leq 5 \iff$
$\begin{cases} z = |x| \\ z^2-4z+\frac{1}{5} \leq 0 \\ z^2-4z+5 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = |x| \\ 2-\sqrt{\frac{19}{5}} \leq z \leq 2+\sqrt{\frac{19}{5}} \\ z \text{ qualunque} \end{cases} \iff x \in \left[-2-\sqrt{\frac{19}{5}}, -2+\sqrt{\frac{19}{5}}\right] \cup$
$\left[2-\sqrt{\frac{19}{5}}, 2+\sqrt{\frac{19}{5}}\right]$.

(30) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \le \log_{10} \frac{x+2}{x+1} \le 1 \iff \frac{1}{10} \le \frac{x+2}{x+1} \le 10 \iff \begin{cases} \frac{x+2}{x+1} - \frac{1}{10} \ge 0 \\ \frac{x+2}{x+1} - 10 \le 0 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} \frac{9x+19}{10(x+1)} \ge 0 \\ \frac{9x+8}{x+1} \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, -\frac{19}{9}] \cup (-1, +\infty) \\ x \in (-\infty, -1) \cup [-\frac{8}{9}, +\infty) \end{cases} \iff x \in (-\infty, -\frac{19}{9}] \cup [-\frac{8}{9}, +\infty).$

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Si ha $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2} = \frac{1+4i-4-1+3i+3-i}{27+54i-36-8i-4-4i+1} = \frac{-1+6i}{-12+42i} = \frac{(1-6i)(2+7i)}{6 \cdot 53} = \frac{44-5i}{318}$.

(2) Poiché $|-1+i\sqrt{3}| = 2$, $\operatorname{Arg}(-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$, si ha $(-1+i\sqrt{3})^{60} = 2^{60}\big(\cos(60\frac{2\pi}{3}) + i\sin(60\frac{2\pi}{3})\big) = 2^{60}$.

(3) Poiché $|2-2i| = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(2-2i) = -\frac{\pi}{4}$, si ha $(2-2i)^7 = 2^{10}\sqrt{2}\big(\cos(-\frac{7\pi}{4}) + i\sin(-\frac{7\pi}{4})\big) = 2^{10}\sqrt{2}\big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\big)$.

(4) Poiché $|\sqrt{3}-3i| = 2\sqrt{3}$, $\operatorname{Arg}(\sqrt{3}-3i) = -\frac{\pi}{3}$, si ha $(\sqrt{3}-3i)^6 = 2^6 \cdot 3^3\big(\cos(-\frac{6\pi}{3}) + i\sin(-\frac{6\pi}{3})\big) = 2^6 \cdot 3^3$.

(5) Poiché $\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$, si ha $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40} = 2^{20}\big(\cos(40\frac{7\pi}{12}) + i\sin(40\frac{7\pi}{12})\big) = -2^{20}\big(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\big)$.

(6) Poiché $\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = 1$, $\operatorname{Arg}\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$, si ha $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = \big(\cos(-\frac{8\pi}{2}) + i\sin(-\frac{8\pi}{2})\big) = 1$.

(7) Poiché $|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$, si ha $(1+i)^9 = 2^{9/2}\big(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\big) = 2^{9/2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big)$, e $(1-i)^7 = 2^{7/2}\big(\cos(-\frac{7\pi}{4}) + i\sin(-\frac{7\pi}{4})\big) = 2^{7/2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big)$, per cui $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = 2$.

(8) Poiché $|\sqrt{2}+i\sqrt{6}| = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(\sqrt{2}+i\sqrt{6}) = \frac{\pi}{3}$, si ha $\frac{(1+i)(3-3i)}{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^5} = \frac{6}{2^7\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})} = \frac{3\sqrt{2}}{2^7}\big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\big) = \frac{3\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})}{2^8}$.

(9) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt{i} = \{\cos(\frac{\pi}{4}+k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4}+k\pi) : k = 0,1\} = \{\pm\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big)\} = \{\pm\big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\big)\}$.

(10) Poiché $|2-2i\sqrt{3}| = 4$, $\operatorname{Arg}(2-2i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt{2-2i\sqrt{3}} = \{2\big(\cos(-\frac{\pi}{6}+k\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{6}+k\pi)\big) : k = 0,1\} = \{\pm 2\big(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\big)\} = \{\pm(\sqrt{3}-i)\}$.

(11) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[3]{i} = \{\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}) : k = 0,1,2\} = \{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}, -i\}$.

(12) Poiché $|-1+i| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$, dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[3]{-1+i} = \{\sqrt[6]{2}\big(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})\big) : k = 0,1,2\} = \{\sqrt[6]{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big), \sqrt[6]{2}\big(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\big), \sqrt[6]{2}\big(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\big)\}$.

(13) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{-1} = \{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}) : k = 0,1,2,3\} = \{\pm\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big), \pm\big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\big)\} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)\}$.

(14) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{-i} = \{\cos(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) : k = 0,1,2,3\} = \{\pm\big(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\big), \pm\big(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\big)\}$.

(15) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{1} = \{\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2} : k = 0,1,2,3\} = \{\pm 1, \pm i\}$.

(16) Poiché $|1-i| = \sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$, dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{1-i} = \{\sqrt[8]{2}\big(\cos(-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})\big) : k = 0,1,2,3\} = \{\pm\sqrt[8]{2}\big(\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\big), \pm\sqrt[8]{2}\big(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\big)\}$.

(17) Poiché $|\sqrt{3}+i| = 2$, $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$, dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \{\sqrt[5]{2}\big(\cos(\frac{\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5})\big) : k = 0,1,2,3,4\} = \{\sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{\pi}{30}+i\sin\frac{\pi}{30}\big), \sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{13\pi}{30}+i\sin\frac{13\pi}{30}\big), \sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\big), \sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{37\pi}{30}+i\sin\frac{37\pi}{30}\big), \sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{49\pi}{30}+i\sin\frac{49\pi}{30}\big)\}$.

□

Svolgimento esercizio 4

(1) Si ha $z = -2 + \sqrt{-1} = -2 \pm i$.

(2) Si ha $z = -i + \sqrt{-4} = -i \pm 2i = \begin{cases} -3i, \\ i. \end{cases}$

(3) Si ha $z = 1 + \sqrt{i} = 1 \pm \big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big) = \begin{cases} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

(4) Si ha $z = 1 + \sqrt{1+i\sqrt{3}}$. Poiché $|1+i\sqrt{3}| = 2$, $\mathrm{Arg}(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, si ha $z = 1 \pm \sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\big) = \begin{cases} 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

(5) Si ha $z = -2\sqrt{3} + i + 2\sqrt{1-i\sqrt{3}}$. Poiché $|1-i\sqrt{3}| = 2$, $\mathrm{Arg}(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, si ha $z = -2\sqrt{3} + i \pm 2\sqrt{2}\big(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\big) = \begin{cases} -2\sqrt{3} - \sqrt{6} + (1+\sqrt{2})i, \\ -2\sqrt{3} + \sqrt{6} + (1-\sqrt{2})i. \end{cases}$

(6) Si ha $z = \sqrt[3]{-1} = \{\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) : k = 0,1,2\} = \{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}), -1\}$.

(7) Poiché $z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(z^2+1)$, si ha $z = -1 \vee z = \pm i$.

(8) Si ha $z^4 - 4z^2 + 8 = 0 \iff z^2 = 2 \pm 2i \iff z = \sqrt{2+2i} = \pm\sqrt[4]{8}\big(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\big) \vee z = \sqrt{2-2i} = \pm\sqrt[4]{8}\big(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\big)$.

(9) Si ha $z^4 - 2iz^2 - 2 = 0 \iff z^2 = i \pm 1 \iff z = \sqrt{i-1} = \pm\sqrt[4]{2}\big(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\big) \vee z = \sqrt{i+1} = \pm\sqrt[4]{2}\big(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\big)$.

(10) Si ha $\big(\frac{2z+1}{2z-1}\big)^4 = 1 \iff \frac{2z+1}{2z-1} = \sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\} \iff z = 0 \vee z = \pm\frac{i}{2}$.

(11) Si ha $z = \sqrt[5]{1} = \{\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{3} : k = 0,1,2,3,4\}$.

(12) Si ha $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0 \iff \big(\frac{z+1}{z-1}\big)^5 = 1 \iff \frac{z+1}{z-1} = \sqrt[5]{1} = \{\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{3} : k = 0,1,2,3,4\} \iff z = \big\{\frac{\cos\frac{2k\pi}{5}+1+i\sin\frac{2k\pi}{5}}{\cos\frac{2k\pi}{5}-1+i\sin\frac{2k\pi}{5}} : k = 1,2,3,4\big\}$.

(13) Si ha $z = \sqrt[6]{-27} = \left\{\sqrt{3}\left(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3})\right) : k=0,1,2,3,4,5\right\} \iff z = \pm i\sqrt{3} \vee z = \frac{\pm 3 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

(14) Poiché $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$, si ha $z = \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}} = \left\{\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos(\frac{5\pi}{96}+\frac{k\pi}{4})+i\sin(\frac{5\pi}{96}+\frac{k\pi}{4})\right) : k=0,1,2,3,4,5,6,7\right\}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 5

(1) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{1}{2}\, n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}\,(n+1)(n+2)$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(2) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}\,(n+1)(2n^2+7n+6) = \frac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(2n+3)$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(3) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}\,(n+1)^2(n^2+4n+4) = \frac{1}{4}\,(n+1)^2(n+2)^2$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(4) Fissiamo $q \neq 1$. Per $n=1$ l'uguaglianza è vera, in quanto $1+q = \frac{q^2-1}{q-1}$. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=0}^{n+1} q^n = \sum_{k=0}^{n} q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(5) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1}(8k-5) = \sum_{k=1}^{n}(8k-5) + (8n+3) = n(4n-1) + 8n + 3 = 4n^2 + 7n + 3 = (n+1)(4n+3)$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(6) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1}(2n+2+2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2n+2k-1+2) + (4n+3) = \sum_{k=1}^{n}(2n+2k-1) + \sum_{k=1}^{n} 2 + (4n+3) = 3n^2 + 2(n+1) + 4n + 3 = 3n^2 + 6n + 3 = 3(n+1)^2$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Alternativamente, $\sum_{k=1}^{n}(2n+2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2n-1) + 2\sum_{k=1}^{n} k = n(2n-1) + n(n+1) = 3n^2$, usando l'esercizio (1).

(7) Per $n=2$ la disuguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $(n+1)! = (n+1)\cdot n! \geq 2^{n-1}(n+1) \geq 2^n$, che è la disuguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, la disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(8) Per $n = 2$ la disuguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e dimostriamola vera per $n + 1$. Infatti $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! \geq 2 \cdot 3^{n-2}(n + 1) \geq 2 \cdot 3^{n-1}$, che è la disuguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, la disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\square$