NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Scienza dei Media e della Comunicazione, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 1, Test del 15.11.2007

1) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{2n^2+3}.$$

2) Dire se la funzione

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x>0\\ 1 & \text{per } x=0\\ e^{\sin x} & \text{per } x<0\end{cases}$$

è continua in 0.

3) Dire se la funzione $f : (0\,,+\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = \log x - \log(\sin x)$$

è monotona e verificare se è prolungabile con continuità in 0.

4) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\left[\log(1+x)\right]^2} - 1}{(\sin x)\,(\operatorname{tg} x)} \ .$$

5) Verificare se esiste un $x \in (2, 3)$ tale che

$$\sqrt{x} = x - 1 \ .$$

Soluzioni:

1) **:** Usando il limite notevole $\lim\limits_{t\to 0}\big(1+t\big)^{1/t}=e$, si deduce

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{2n^2+3} &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}\right]^{\frac{2}{n^2-1}\,(2n^2+3)} \\
&= \left[\lim_{t\to 0}\big(1+t\big)^{1/t}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+6}{n^2-1}} \\
&= e^4\ .
\end{aligned}$$

2) **:** Poiché

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0\,, \\
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} e^{\sin x} = e^0 \quad = 1\,,
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ esiste ed è uguale a $1=f(0)$, mentre $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ esiste ed è uguale a 0. Risulta che la funzione f non ha limite in 0, in particolare non è continua in 0. Notiamo però che f è continua a sinistra.

3) **:** Osserviamo che, poiché

$$f(x)=\log\frac{x}{\sin x}\,,$$

f è la composizione delle funzioni strettamente crescenti

$$(0\,,+\tfrac{\pi}{2})\ni x\longmapsto \frac{x}{\sin x}\in(0,+\infty)$$

e

$$(0\,,+\infty)\ni y\longmapsto \log y\in\mathbb{R}\ .$$

Di conseguenza f è strettamente crescente.

Ora verifichiamo che f ha limite in 0. Infatti, usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

e tenendo conto della continuità di $\log$ in 1, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \log \frac{x}{\sin x} = \log\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right) = \log 1 = 0 \, .$$

Risulta che, ponendo

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in (0\,, +\frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} ,$$

si ottiene una funzione continua $\widetilde{f} : [0\,, +\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ che estende f, cioè una estensione continua di f su $[0\,, +\frac{\pi}{2})$.

4) : Usando i limiti notevoli

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1\,,$$

si deduce

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^{\left[\log(1+x)\right]^2} - 1}{(\sin x)(\operatorname{tg} x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\left[\log(1+x)\right]^2} - 1}{\left[\log(1+x)\right]^2} \left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^2 \frac{x}{\sin x}\, \frac{x}{\operatorname{tg} x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\left[\log(1+x)\right]^2} - 1}{\left[\log(1+x)\right]^2} \left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^2 \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cos x \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \left[\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}\right]^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \cos 0 \\
&= 1 \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot 1 = 1 \, .
\end{aligned}$$

5) : La funzione continua

$$f : (0, +\infty) \ni x \longmapsto \sqrt{x} - (x-1)$$

prende

$$\text{in } x = 2 \text{ il valore } f(2) = \sqrt{2} - 1 > 0\,,$$
$$\text{in } x = 3 \text{ il valore } f(3) = \sqrt{3} - 2 < 0\,.$$

Perciò il teorema degli zeri implica che f ammette un zero nell'intervallo $(2,3)$.

Rimarco. È possibile risolvere l'equazione $\sqrt{x} = x - 1$ esplicitamente. Infatti,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} = x - 1 &\implies x = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\
&\implies x^2 - 3x + 1 = 0 \\
&\implies x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Poi si verifica che $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ non è soluzione dell'equazione iniziale $\sqrt{x} = x - 1$, perché allora

$$x - 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ non può essere uguale a } \sqrt{x} > 0\,,$$

mentre $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ è veramente soluzione.
Ora si vede subito che

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{3+\sqrt{4}}{2} = \frac{5}{2} > 2 \text{ e } \frac{3+\sqrt{5}}{2} < \frac{3+\sqrt{9}}{2} = 3\,,$$

cioè $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \in (2,3)$.