Facoltà di Ingegneria
Geometria ingegneria medica . Esame (21/07/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato** Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione B

1) DOMANDA FILTRO punti 6

Un insieme di vettori $v_1, \dots v_k$ in $\mathbb{R}^n$ e' un insieme di vettori linearmente indipendenti se e solo se

1) Tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots v_k$, con pesi tutti nulli producono come risultato il vettore nullo
2) Tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots v_k$, con pesi tutti non nulli producono come risultato un vettore non nullo
3) Tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots v_k$, con pesi non tutti nulli producono come risultato un vettore non nullo

Una sola delle risposte sopra e' quella giusta, quale ? Una sola delle condizioni sopra e' soddisfatta da qualunque famiglia di vettori $v_1, \dots, v_k$ quale ? La domanda filtro si compone di entrambe le domande. Soluzione La risposta giusta e' la 3), usualmente si dice che i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se l'unico modo di ottenere il vettore nullo come loro combinazione lineare e' scegliendo tutti i pesi nulli, il che equivale alla condizione 3). La condizione 1) e' soddisfatta da qualunque famiglia di vettori.

2) Esercizio 2. Punti 12

Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \\ 3x+y+3z \end{pmatrix}$$

Sia $\mathbf{b}$ la terna di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia $\mathbf{b}^*$ la terna di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Provare che $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}^*$ sono basi di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata all'applicazione lineare L rispetto alle basi $\mathbf{b}$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{b}^*$ di $\mathbb{R}^3$. Determinare una base del nucleo di L ed una base dell immagine di L. Soluzione Le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe determinante non nullo, ne segue che $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}^*$ sono basi di $\mathbb{R}^3$.

Per determinare la matrice associata ad L rispetto alle basi $\mathbf{b}$ in partenza e $\mathbf{b}^*$ in arrivo, calcoliamo $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ Scriviamo

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Risolvendo il corrispondente sistema lineare troviamo $\alpha = 4, \beta = 0, \gamma = -2$. Similmente $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Scriviamo

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Risolvendo il corrispondente sistema lineare troviamo $a = \frac{17}{4}, b = \frac{-3}{4}, c = \frac{-9}{4}$. In fine $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Scriviamo come prima

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Risolvendo il corrispondente sistema lineare troviamo come prima $p = a = \frac{17}{4}, q = b = \frac{-3}{4}, r = c = \frac{-9}{4}$.

In conclusione la matrice associata ad L rispetto alle basi date e'

$$\begin{pmatrix} 4 & \frac{17}{4} & \frac{17}{4} \\ 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-3}{4} \\ -2 & \frac{-9}{4} & \frac{-9}{4} \end{pmatrix}$$

. Il nucleo di L e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

. Cioe' $z = -x, y = 0$, quindi se scegliamo x come parametro libero e poniamo $x = 1$ troviamo che una base del nucleo e' il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A associata ad L rispetto alla base canonica nell' $\mathbb{R}^3$ di partenza ed alla base canonica dell' $\mathbb{R}^3$ di arrivo (cioe' la matrice A tale che $L(X) = AX$) e' data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

. Le colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono non proporzionali, quindi sono linearmente indipendenti. D'altra parte abbiamo visto sopra che il nucleo di L non e' ridotto al solo zero, quindi $det(A) = 0$. Ricordando quindi che l'immagine di L e' il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dalla colonne della matrice associata ad L rispetto alla base canonica in partenza ed alla base canonica in arrivo, troviamo che una base dell'immagine di L e' data dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

3 Esercizio 3 punti 8

Si consideri il piano Π di equazione $x - y + z = 6$ in $\mathbb{R}^3$ e il punto p di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Verificare che p non appartiene a Π e determinare sia una equazione parametrica che una equazione cartesiana della retta r passante per p e ortogonale a Π. Soluzione Dato che $1 + 2 \neq 6$ il punto non appartiene al piano. Dall'equazione cartesiana di Π si vede che il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e' ortogonale a Π, quindi una equazione parametrica di r e' $X = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se scriviamo questo come un sistema lineare di incognita t e termini noti espressi in termini di x, y e z troviamo il sistema $\begin{cases} t = x - 1 \\ -t = y \\ t = z - 2. \end{cases}$ che ridotto con l'eliminazione di Gauss diventa $\begin{cases} t = x - 1 \\ 0 = y + z - 2 \\ 0 = x - z + 1. \end{cases}$ La compatibilita' del sistema fornisce quindi le equazioni cartesiane della retta che sono $\begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$

4) Domanda delicata punti 6

Sia A una matrice 2×2 a coefficienti complessi, si supponga che $tr(A)^2 - 4det(A) = 0$ e che A sia diagonalizzabile, si dimostri che allora A e' diagonale. Suggerimento studiate le molteplicita' algebriche e geometriche di A.

Soluzione

Dire che $tr(A)^2 - 4det(A) = 0$ e'dire che il discriminante del polinomio caratteristico di A e' zero, cioe' e' dire che il polinomio caratteristico ha due radici coincidenti, in altri termini e' dire che A un unico autovalore λ di molteplicita' algebrica 2. Se A e' diagonalizzabile la sua molteplicita' algebrica coincide con quella geometrica, quindi λ ha moltepicita' geometrica 2, dato che la matrice e' 2×2 questo vuol dire che l'autospazio corrispondente e' tutto $\mathbf{C}^2$, ma allora $A = \lambda I$ che e' diagonale. (Qui I e' la matrice identita').