1 SOLUZIONI COMPITO 26-7-17 Geometria e Algebra informatica compito A

Esercizio 1

Mettendo per riga in una matrice i vettori $(1,1,1,1), (1,2,0,5), (2,0,4,-6)$ con l'eliminazione di Gauss si vede che tale matrice ha rango 2. Quindi il sottospazio vettoriale V di $\mathbf{R}^4$ generato da tali vettori ha dimensione 2. Dato che i vettori $(1,1,1,1)$ e $(1,2,0,5)$ non sono proporzionali, sono linearmente indipendenti, quindi essi formano una base dello spazio V. Se ne conclude che una equazione parametrica del sottospazio affine Σ e' data da $X = sv_1 + tv_2 + P$. Dove X e' il vettore colonna di componenti x, y, z, w, v_1 e' il vettore colonna di componenti $1,1,1,1$, v_2 e' il vettore colonna di componenti $1,2,0,5$, e P e' il vettore colonna di componenti $0,0,1,3$.

Esercizio 2

Il nucleo di F e' per definizione l'insieme dei vettori v tali che $F(v) = 0$. Quindi $Ker(F)$ e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 3y - w = 0 \\ y - w = 0 \\ x + w = 0 \end{cases}$$

Tali soluzioni sono i vettori della forma $(0,0,z,0) = z(0,0,1,0)$. Una base di $Ker(F)$ e' quindi il vettore colonna di componenti $0,0,1,0$. Dato che $dimKerF + dimImmF = dim\mathbf{R}^4 = 4$. Possiamo intanto dire che $dimImm(F) = 3$. Dato che $Imm(F)$ e' contenuta in $\mathbf{R}^3$ ne deduciamo che $Imm(F) = \mathbf{R}^3$. Percio' ad esempio la base canonica di $\mathbf{R}^3$ e' una base di $Imm(F)$. Se non si vuole usare la base canonica possiamo ricordare che se A e' la matrice associata all'applicazione F (rispetto alle basi canoniche in $\mathbf{R}^4$ ed $\mathbf{R}^3$ rispettivamente) cioe':

$$A = \begin{pmatrix} 2, -3, 0, -1 \\ 0, 1, 0, -1 \\ 1, 0, 0, -1 \end{pmatrix}.$$

Allora le colonne di A generano $Imm(F)$. Con l'eliminazione di Gauss si vede che il rango di A e' 3 quindi una base di $Imm(F)$ e' costituita da tre colonne linearmente indipendenti di A. Per estrarre tre colonne indipendenti dalle quattro colonne di A

facciamo l'eliminazione di Gauss, otteniamo una matrice a scala S guardiamo quali sono le 3 colonne di S che contengono i pivot, le corrispondenti colonne di A sono le 3 colonne cercate.

Esercizio 3 Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + \alpha y - 2z = 0 \\ (-\alpha + 1)x + 3\alpha y + (-2 + 3\alpha)z = 0 \end{cases}$$

se tale sistema e' compatibile, la dimensione dello spazio affine delle sue soluzioni e' numero di incognite - rango della matrice (incompleta) A del sistema. Dato che il numero di incognite e' 3, lo spazio Σ delle soluzioni del sistema e' una retta, se e solo se ha dimensione 1, se e solo se il rango della matrice A e' 2. Inoltre se il rango della matrice (incompleta) A e' 2, dato che la matrice completa ha due righe, anche il rango della matrice completa sar' 2, e il sistema risulter' compatibile per il teorema di Rouche'-Capelli. Quindi resta da stabilire quando il rango della matrice A e' 2. Lasciando inalterata la prima riga e sommando alla seconda $-(-\alpha+1)$ volte la prima si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1, \alpha, -2 \\ 0, \alpha^2 + 2\alpha, \alpha \end{pmatrix}.$$

Percio' il rango di A e' 1 se $\alpha = 0$ ed e' 2 altrimenti. In particolare l'insieme delle soluzioni del sistema e' una retta se e solo se $\alpha \neq 0$. Nel caso in cui sia una retta essa e' parallela al piano e non contenuta nel piano se e solo se, la retta non interseca il piano, cio' se e soltanto se il sistema

$$\begin{cases} -3x - y = 1 \\ x + \alpha y - 2z = 0 \\ (-\alpha + 1)x + 3\alpha y(-2 + 3\alpha)z = 0 \end{cases}$$

non e' compatibile. D'altra parte la retta e' contenuta nel piano se e solo se il sistema sopra e' compatibile e la dimensione dello spazio delle sue soluzioni e' 1. Cioe' la retta e' contenuta nel piano se e solo se il ranghi delle matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3, -1, 0 \\ 1, \alpha, -2 \\ (-\alpha + 1), +3\alpha, (-2 + 3\alpha) \end{pmatrix}.$$

e

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3, -1, 0, 1 \\ 1, \alpha, -2, 0 \\ (-\alpha + 1), +3\alpha, (-2 + 3\alpha), 1 \end{pmatrix}.$$

sono entrambi uguali a 2. Con l'eliminazione di Gauss, oppure calcolando il determinante si vede che il rango di A_1 e' 2 per $\alpha = 0$ oppure $\alpha = -5/4$ altrimenti il rango di A_1 e' 3. Ma se $\alpha = 0$ sappiamo che le soluzioni nel sistema

$$\begin{cases} x + \alpha y - 2z = 0 \\ (-\alpha + 1)x + 3\alpha y + (-2 + 3\alpha)z = 0 \end{cases}$$

non formano una retta, mentre per $\alpha = -5/4$ il rango di A_2 non e' 2 ma e' 3. Quindi in conclusione per $\alpha \neq 0$ $\alpha \neq 5/4$ si ottiene una retta che interseca il piano in un punto, per $\alpha = -5/4$ si ottiene una retta parallela al piano non contenuta nel piano, per $\alpha = 0$ non si ottiene una retta. In ogni caso non si ottiene mai una retta contenuta nel piano.

Il metodo per risolvere gli esercizi del compito B e' lo stesso