

# Programma del corso di introduzione alle variet' differenziabili

Trapani primo semestre anno accademico 2015-16

February 9, 2016

## 1 Varieta' differenziabili

Nozione di variet' topologica e variet' differenziabile, , esempi, aperti di  $R^n$ , sfere, proiezione stereografia, spazi proiettivi reali e complessi, grasmanniane, carte locali standard del proiettivo e della grasmanniana, Spazio tangente ad una variet' differenziabile, applicazioni differenziabili, differenziale di una applicazione, teorema di inversione locale, teorema del rango, teorema della funzione implicita. Immersioni e embeddings, esempi. Sottovarieta' immerse e embedded, sottovarieta' embedded come luogo di zeri locale, esempi. Sottovarieta' immerse dense nel toro. Partizione dell'unita'. Embedding in  $R^N$  di variet' compatte. Nozione di fibrato vettoriale, operazioni algebriche su fibrati, il fibrato tangente e cotangente. Campi vettoriali  $C^\infty$ , flusso associato ad un campo vettoriale  $C^\infty$ , diffeomorfismi locali associati ad un campo vettoriale  $C^\infty$ , campi vettoriali completi. bracket di campi vettoriali, distribuzioni, distribuzioni involutive, Teorema di Frobenius, foglie integrali, foglie integrali massimali, foliazioni lisce, corrispondenza foliazioni distribuzioni involutive. Formulazione del teorema di Frobenius in termini di equazioni differenziali.

## 2 Rivestimenti

Definizione di rivestimento di spazi puntati, esempi, sollevamento di cammini, sollevamento di omotopie, criterio per il sollevamento di mappe continue, esistenza del rivestimento universale (senza dimostrazione). Corrispondenza rivestimenti sottogruppi del gruppo fondamentale. Azioni di gruppi, azioni propriamente discontinue, rivestimenti regolari. Struttura di variet' indotta sul rivestimento di una variet' data, struttura di variet' sul quoziente di una variet' per una azione di gruppo libera e propriamente discontinua.

## 3 Algebra multilineare

Prodotto tensoriale di spazi vettoriali, propriet' universale, applicazioni multilineari, isomorfismi canonici di  $V$  tensor  $W$  con  $Hom(V^*, W)$ . Algebra tensoriale, contrazioni, alternatore, algebra esterna, prodotto wedge, dualit' varie, prodotti scalari indotti su

algebra tensoriale ed algebra esterna da un prodotto dato sullo spazio vettoriale. Orientazione di spazi vettoriali, volume di poliedri orientati rispetto ad un prodotto scalare positivo, in termini di matrici associate al prodotto scalare e come norma del prodotto esterno di vettori. Mappa indotta sulla algebra tensoriale e algebra esterna da una applicazione lineare. Forme differenziali su una variet'. Differenziale esterno. Orientazione su una variet'. Definizione della coomologia di De Rham, campi vettoriali  $C^\infty$  su sfere di dimensioni pari e dispari.

## 4 Integrazione su variet'

Integrazione di forme differenziali su variet' orientabili, variet' con bordo, orientazione indotta sul bordo da una variet' con bordo orientata, Teorema di Stokes, derivazione de teoremi classici su aperti di  $R^n$  dal teorema di Stokes su variet'.

## 5 Cenni sui gruppi di Lie

Definizione di gruppo di Lie, esempi di gruppi di matrici, l'applicazione esponenziale, algebra di Lie di un gruppo di Lie, definizione di sottogruppo di Lie, corrispondenza sottoalgebra sottogruppo di Lie, corrispondenza algebra di Lie, gruppo di Lie semplicemente connesso (senza dimostrazione). Equivalenza tra sottogruppo chiusi e sottogruppi embedded (senza dimostrazione). Spazi omogenei e loro struttura differenziabile indotta, esempi (senza dimostrazione).

## 6 Cenni di geometria Riemanniana

Nozione di variet' Riemanniana, nozione di connessione, connessione di Levi Civita, definizione della curvatura, definizione della curvatura sezionale, definizione di geodetica, definizione della distanza indotta da una metrica Riemanniana.

Testi di riferimento

Boothby "An introduction to differentiable manifold and Riemannian geometry"

Warner "Fondation of Differentiable manifolds and Lie groups"