Facoltà di Ingegneria
Geometria ingegneria medica . Esame (27/02/2014)

• Non sono ammessi libri, quaderni o altri fogli. **una risposta errata o non data alla DOMANDA FILTRO comportera' il fallimento della prova La risposta alla domanda filtro e ai due esercizi comportera' un voto massimo di 26/30, si consiglia quindi di affrontare prima la domanda filtro poi gli esercizi piu' semplici in fine l'esercizio piu' delicato** Le domande o gli esercizi vanno svolti in bella copia soltanto nelle due facciate della pagina che contiene l'esercizio o la domanda

Giustificare le risposte

Cognome:	
Nome:	

1	
2	
3	
4	
TOTALE	

Versione C

1) DOMANDA FILTRO punti 6 Completare la frase seguente

Sia Σ un sottospazio affine di dimensione 2 in $\mathbb{R}^4$, allora una equazione cartesiana di Σ in $\mathbb{R}^4$ e' un sistema lineare non omogeneo $AX = b$ tale che Σ sia l'insieme delle sue soluzioni. In tale sistema b e' un vettore colonna in $\mathbb{R}^2$ ed A e' una matrice reale 2×4, perche' sia effettivamente una equazione cartesiana la matrice A deve inoltre soddisfare la condizione ... Soluzione

Perch' sia una equazione cartesiana il rango di ha deve essere dimensione dello spazio ambiente - dimensione del sottospazio affine $= 4 - 2 = 2$.

2) Esercizio 2. Punti 14

Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ x-4y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

Sia $\mathbf{e}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, e sia $\mathbf{f}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathbf{c}$ la coppia di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sia $\mathbf{d}$ la terna di vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Provare che $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$ sono basi di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ rispettivamente

Determinare la matrice associata ad L rispetto alla coppia di basi $\mathbf{e}$ in partenza ed $\mathbf{f}$ in arrivo

Determinare la matrice associata ad L rispetto alla coppia di basi $\mathbf{c}$ in partenza ed $\mathbf{d}$ in arrivo

Determinare una base del nucleo di L ed una base dell immagine di L. Soluzione

Soluzione

I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono non nulli e non proporzionali ed essendo due vettori di $\mathbb{R}^2$ ne formano una base, in altri termini $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} =\neq 0$ quindi i due vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$. Similmente $det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} =\neq 0$ quindi i suoi vettori colonna formano una base di $\mathbb{R}^3$. In generale se $L : V \to W$ e' una applicazione lineare, se $\mathbf{b} = v_1 \ldots v_n$ e' una base di V e $\mathbf{c} = w_1 \ldots w_m$ e' una base di W, allora la matrice $M_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}}$ associata all'applicazione lineare rispetto a questa coppia di basi si costruisce nel modo seguente: Si prende v_1 primo vettore della base di partenza $\mathbf{b}$, si considera $L(v_1)$ e si scrive $L(v_1)$ come combinazione lineare dei vettori della base di arrivo $\mathbf{c}$, i coefficienti di questa combinazione lineare saranno la prima colonna della matrice associata, poi si prende il secondo vettore v_2 della base $\mathbf{b}$ si considera $L(v_2)$ e lo si scrive come combinazione lineare dei vettori della base $\mathbf{c}$, i coefficienti di questa combinazione lineare formano il secondo vettore colonna della matrice associata, poi si considera il terzo vettore v_3 della base $\mathbf{b}$ ecc... Nel nostro caso particolare se $\mathbf{e} = e_1, e_2$ ed $\mathbf{f} = f_1, f_2, f_3$ sono le basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ rispettivamente, allora $L(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1f_1 + 1f_2 + 2f_3$, $L(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = 3f_1 - 4f_2 - 1f_3$, quindi

$$M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{e}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Facendo l'eliminazione di Gauss si vede che questa matrice ha rango 2 percio' le sue colonne sono linearmente indipendenti e sono una base di $ImmL$, inoltre dalla formula $dimKerL + dimImmL =$ dimensione dello spazio di partenza, quindi nel nostro caso, $dimKerL + dimImmL = 2$ si vede che $KerL = 0$. Calcoliamo ora la matrice associata ad L rispetto alle basi $\mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$. Il primo vettore della base $\mathbf{c}$ e' $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}$. Risolviamo ora il sistema lineare $\begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ si trova $x = 102, y = -92, z = -31$. In modo simile il secondo vettore della base $\mathbf{c}$ e' $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $L\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$. Risolviamo il sistema lineare $\begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ si trova $x = 108, y = -97, z = -32$. In conclusione abbiamo

$$M_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}(L) = \begin{pmatrix} 102 & 108 \\ -92 & -97 \\ -31 & -32 \end{pmatrix}.$$

In alternativa si potrebbe usare la formula $M_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}(L) = M_{\mathbf{d}}^{\mathbf{f}}(Id_{\mathbb{R}^3}) M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{e}}(L) M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{c}}(Id_{\mathbb{R}^2})$ Osservando che $(M_{\mathbf{d}}^{\mathbf{f}}(Id_{\mathbb{R}^3})) = (M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{d}}(Id_{\mathbb{R}^3}))^{-1}$ e che $(M_{\mathbf{f}}^{\mathbf{d}}(Id_{\mathbb{R}^3})) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. mentre $(M_{\mathbf{e}}^{\mathbf{c}}(Id_{\mathbb{R}^2})) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

3 Esercizio 3 punti 5

Determinare una forma canonica affine della conica $x^2 - y^2 + 4xy + 6x + 6y + 6 = 0$ Soluzione

La matrice completa della conica e' $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. e la matrice della parte quadratica e' $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Si ha $det(A^*) \neq 0$ e la conica e' non degenere, d'altra parte $det(A) < 0$ quindi la conica e' una iperbole la cui forma canonica affine e' $x^2 - y^2 = 1$. Avremmo potuto anche ricavare una forma canonica metrica e poi la corrispondente forma canonica affine, oppure avremmo potuto utilizzare l'algoritmo di Gauss Lagrange per ricavare direttamente una forma canonica affine

4) Domanda delicata punti 6

Siano A e B matrici $n \times n$ tali che $AB = BA$, consideriamo applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $L_A(X) = AX$, e similmente sia $L_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $L_B(X) = BX$. Sia λ un autovalore di L_A e sia V_λ il relativo autospazio. Dimostrare che $L_B(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$. Soluzione

Se $X \in V_\lambda$ si ha $AX = \lambda X$, devo dimostrare che BX e' in V_λ cioe' che $ABX = \lambda BX$. Ma $ABX = BAX = B\lambda X = \lambda BX$.

Svolgimento