1. COMPITO GEOMETRIA PER INGEGNERIA MEDICA TRAPANI 21-07-2021
SOLUZIONI

Esercizio 1

Sia data in $\mathbb{R}^3$ la retta r di equazione

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y-z-3=0 \end{cases}$$

determinare una equazione o parametrica o cartesiana del piano perpendicolare ad r passante per l'origine, determinare una base ortonormale di Π, e determinare le coordinate in $\mathbb{R}^3$ di un punto a vostra scelta appartenente a Π a distanza $\sqrt{2}$ dall'origine. Tale punto non e' unico.

Esercizio 2

Sia $A(t)$ la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ t-1 & t+3 & t+1 \\ -t & -t & 2-t \end{pmatrix}.$$

Dire se esistono valori reali di t per cui la matrice $A(t)$ e' diagonalizzabile sui reali, e in tal caso determinare per quei valori una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tali che $A = P^{-1}DP$. Determinare per ogni $t \in \mathbb{R}$ una base (dipendente da t) dell'immagine di $A(t)-2I$. (Si osservi che le sole radici distinte del polinomio caratteristico di $A(t)$ sono indipendenti da t e sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ e che la radice λ_2 ha molteplicita' algebrica 1).

Esercizio 3

Sia v il vettore in $\mathbb{R}^3$ di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

determinare le coordinate in $\mathbb{R}^3$ di un vettore w di modulo 1 tale che $v \wedge w = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Qui $v \wedge w$ indica il prodotto vettoriale di v e w.

Esercizio 4

Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare canonico. Sia, V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato dalle equazioni

$$\begin{cases} x+z+w=0 \\ x-y=0. \end{cases}$$

Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, l'applicazione lineare proiezione ortogonale su V. Determinare una base del nucleo, e una base dell'immagine di L. Provare che L e' diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, Determinare gli autovalori ed una base di autovettori di L. Provare che L e' una applicazione lineare simmetrica.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Ponendo $x = t$ otteniamo equazioni parametriche di r nella forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Il piano Π e' ortogonale al vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e passa per 0, quindi Π ha equazione $x-y+2z=0$. Assegnando ai parametri liberi x, z il valori 0 e 1 si ottiene la base di Π data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'ortogonalizzata di Gram schmidt e' $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1$. L'ortonormalizzata e' $u_1 = \frac{w_1}{|w_1|}$, $u_2 = \frac{w_2}{|w_2|}$. Un vettore $v \in \Pi$ si scrive $v = au_1 + bu_2$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Dato che $< u_1, u_1 >=< u_2, u_2 >= 1$ e $< u_1, u_2 >= 0$, si ha $|v|^2 =< v, v >= a^2 + b^2$. Se scegliamo quindi $a = b = 1$ otteniamo $|u_1 + u_2|^2 = 2$.

Esercizio 2

Sappiamo gia' che per ogni $t \in \mathbb{R}$ le radici del polinomio caratteristico di $A(t)$ sono 2 e 4, e sappiamo che 4 ha molteplicita' algebrica 1, ne segue che 2 ha molteplicita' algebrica 2. Inoltre dato che la molteplicita' geometrica dell'autovalore 4 e' almeno 1 e non piu' di 1, la molteplicita' geometrica di 4 e' 1. Vogliamo quindi sapere per quali t la molteplicita' geometrica di 2 e' 2. Questi sono i numeri t per i quali la dimensione del di $Ker(A(t) - 2I)$ e' 2, cioe' quelli per i quali il rango di $A(t) - 2I$ e' 1. Inoltre essendo 2 autovalore di $A(t)$ sappiamo che il rango di $A(t) - 2I$ non e' mai 3. Ora

$$A(t) - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ t-1 & t+1 & t+1 \\ -t & -t & -t \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che per $t \neq 0$ la prima e la terza riga sono linearmente indipendenti, quinidi per $t \neq 0$ $A(t)$ non e' diagonalizzabile, mentre per $t = 0$ il rango di $A(0) - 2I$ e' 1, quindi $A(0)$ e' diagonalizzabile. Si vede anche subito che per $t \neq 0$ le prime due colonne di $A(t) - 2I$ sono linearmente indipendenti, e sono percio' una base delll'immagine di $A(t) - 2I$. Mentre per $t = 0$ la prima colonna di $A(0) - 2I$ e' base della sua immagine. Scegliamo un vettore v_1 non nullo nello spazio delle soluzione del sistema $(A(0) - 4I)X = 0$. v_1 e' una base di tale spazio di soluzioni. Scegliamo poi una base v_2 v_3 dello spazio delle soluzioni del sistema $(A(0) - 2I)X = 0$. L'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ e' una base di autovattori di $A(0)$. Quindi si puo' scegliere come matrice P, la matrice che ha per colonne v_1, v_2, v_3. La corrispondente matrice diagonale D avra' sulla diagonale nell'ordine, i numeri $4, 2, 2$.

Esercizio 3

Risoluzione geometrica $|v \wedge w| = |v||w|sen\theta$ dove θ e' l'angolo compreso tra v e w con $0 \leq \theta \leq \pi$. Ma nel caso dell'esercizio $|v| = |v \wedge w|$ e $|w| = 1$. Quindi $sen(\theta) = 1$, da cui segue che v e w sono perpendicolari, ma $v \wedge w$ e' perpendicolare a w, quindi w e' perpendicolare a $span(v, v \wedge w)$.

$$w = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ma $|w| = 1$ quindi $w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $w_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se $det(v, w_1, v \wedge w_1) > 0$ il risultato e' w_1 altrimenti e' w_2. Risoluzione algebrica Se i, j, k sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, calcolo il determinante formale

$$det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}}(i - k)$$

Si ottiene un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, con uno spazio di soluzioni di dimensione 1, dove le soluzioni dipendono da un parametro diciamo t. Usando la condizione $|w| = 1$ si ottiene una equazione di secondo grado in t con due soluzioni coincidenti. Sostituendo queste soluzioni si ottiene il vettore w cercato.

Esercizio 4

Se $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e' la proiezione ortogonale su W abbiamo $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$. Se $v = v_1 + v_2$ con $v \in \mathbb{R}^4, v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$, abbiamo $L(v) = v_1$. Se $u = u_1 + u_2$ con $u \in \mathbb{R}^4, u_1 \in W$ e $u_2 \in W^\perp$, Dato che $< v_1, u_2 >=< v_2, u_1 >= 0$ abbiamo allora $< L(v), u >=< v_1, u_1 + u_2 >=< v_1, u_1 >=< v, u_1 >=< v, L(u) >$. Quindi L e' una applicazione lineare simmetrica. Inoltre $L(v) = 0$ se e solo se $v \in W^\perp$ e $L(v) = v$ se e solo se $v \in W$, e $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$. Percio' l'applicazione L e' diagonalizzabile con autovalori 1 e 0. Una base del nucleo di L e' una base di $W^\perp$, una base dell'immagine di L e' una base di W, e una base di autovetttori di L e' una base di W insieme ad una base di $W^\perp$. Quindi resta da determinare una base di W e una base di $W^\perp$. Una base di W si determina passando dalle equazioni cartesiane date per W a sue equazioni parametriche. Se v_1 e v_2 sono vettori di una base di W, allora equazioni cartesiane di $W^\perp$ sono date da $< v_1, X >= 0, < v_2, X >= 0$. Passando da queste equazioni cartesiane ad equazioni parametriche si ottiene una base di $W^\perp$.