CORREZIONI

Esercizio 1

Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha x + y + (\alpha+1)z = \frac{2\alpha+1}{3} \\ 3y + (2\alpha+3)z = 2\alpha \\ x + \alpha z = 1 \end{cases}$$

dipendente dal parametro reale α. 1) Dire per quali valori del parametro α (se esistono) il sistema e' compatibile ed ammette una unica soluzione. 2) Dire per quali valori del parametro α (se esistono) il sistema e' incompatibile. 3) Dire per quali valori del parametro α (se esistono) il sistema e' compatibile ed ammette piu' soluzioni. 4) Nel caso 3) determinare una equazione parametrica ed una equazione cartesiana dell'insieme delle soluzioni del sistema.

Esercizio 2

Sia dato il sottoinsiemi $\beta = \{(1,1),(0,3)\}$ di $\mathbf{R}^2$. . Provare che β_1 e' una base di $\mathbf{R}^2$. Sia $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare tale che la matrice che rappresenta L rispetto alla base β sia in partenza che in arrivo sia la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^2$ sia in partenza che in arrivo. Determinare una equazione cartesiana di $ImmL$ ed una equazione parametrica di $KerL$.

Esercizio 3

Sia dato il sottospazio vettoriale V di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,1,1),(1,0,5)$. Sia P il punto di coordinate $(0,0,3)$. Sia Π il piano parallelo a V passante per P. Determinare una equazione parametrica ed una equazione cartesiana di Π. Sia r la retta passante per l'origine e perpendicolare a Π. Determinare le coordinate del punto di intersezione tra Π ed r.

CORREZIONE ESERCIZIO 1

Il sistema e' quadrato, calcolando il determinante della matrice del sistema, si vede che il determinante e' non zero se e solo se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1/3$. Quindi il sistema ammette una ed una sola soluzione per ogni α diverso da 0 e $1/3$. Se $\alpha = 0$ si vede subito direttamente (o attroverso il teorema di Ruuche'-Capelli) che il sistema non e' compatibile. Per $\alpha = 1/3$ si vede riducendo con l'algoritmo di Gauss che il rango della matrice completa e di quella incompleta, sono entrambi 2, quindi, per il teorema di Rouche'-Capelli il sistema e' compatibile e la dimensione dello spazio delle sue soluzioni e' numero delle incognite - rango, cioe' $3 - 2 = 1$. Dato che per $\alpha = 1/3$ le prime due righe della matrice incompleta sono linearmente indipendenti, quindi equazioni cartesiane dello spazio delle soluzioni del sistema per $\alpha = 1/3$ sono le

Date: September 25, 2018.

prime due equazioni del sistema stesso. Equazioni parametriche si ricavano risolvendo il sistema.

CORREZIONE ESERCIZIO 2

Sia $v_1 = (1,1), v_2 = (0,3)$. Il determinante della matrice che ha per colonne v_1, v_2 e' non nullo, quindi $\{v_1, v_2\}$ e' una base di $\mathbf{R}^2$. sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

. Quindi $A = M_\beta{}^\beta(L)$. Sia E la base canica di $\mathbf{R}^2$. SIA $B = M_E{}^E(L)$. E sia $C = M_E{}^\beta(Id_{\mathbf{R}^2})$. Dove $Id_{\mathbf{R}^2}$ e' la trasformazione lineare identita' da $\mathbf{R}^2$ in se'. Quindi C ha come prima colonna le componenti di $Id_{\mathbf{R}^2}(v_1) = v_1$ rispetto alla base canonica, e come seconda colonna le componenti di $Id_{\mathbf{R}^2}(v_2) = v_2$ rispetto alla base canonica, cioe'

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $M_\beta{}^E(Id_{\mathbf{R}^2}) = \left(M_E{}^\beta(Id_{\mathbf{R}^2})\right)^{-1}$, quindi $B = CAC^{-1}$. Il nucleo di L e' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $BX = 0$. Dato che A e' non nulla ed ha determinante zero, anche B e' u=non nulla ed ha determinante zero. In particolare B ha rango 1 e la dimensione di $KerL$ e' $2 - 1 = 1$. Quindi la prima equazione del sistema $BX = 0$ e' una equazione cartesiana di $KerL$. Per avere una eqazione parametrica di $KerL$ si puo' risolvere il sistema $BX = 0$ ed assegnare all'unico parametro libero il valore 1. Questo vettore che chiamiamo u e' una base di $Ker(L)$. Equazioni parametriche di $Ker(L)$ sono in forma vettoriale $X = tu$. Dove X e' il vettore colonna di componenti x ed y. Dato che il rango di B e' 1 una base di $ImmL$ e' una qualunque colonna non nulla di B, chiamiamo questa colonna w. Siano p e q le componenti di w. Le equazioni $x = tp,\ y = tq$ sono equazioni parametriche di $ImmL$. Ora ricavando t da una delle due equazioni e sostituendola nell'altra si trova una equazione cartesiana di $Imm(L)$.

CORREZIONE DELL ESERCIZIO 3 Posto $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,5)$. Una equazione parametrica di Π e' in forma vettoriale $X = tv_1 + sv_2 + P$, questo corrisponde a tre equazioni scalari, ricavando (ad esempio) s da una delle equazioni e sostituendo nelle altre, poi ricavando t e sostituendo si ricava una unica equazione cartesiana di Π della forma $ax + by + cz + d = 0$ dove il vettore colonna v di componenti a, b, c non e' zero. L'equazione $X = tv$ e' una equazione parametrica vettoriale di r. Sostituendo le coordinate del vettore $X = t_0 v$ che giace sulla retta nell'equazione del piano si ottiene$t_0 a^2 + t_0 b^2 + t_0 c^2 + d = 0$, cioe' $t_0 = \frac{-d}{a^2+b^2+c^2}$. Quindi il punto di intersezione ha coordinate $t_0 a, t_0 b, t_0 c$.