Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2011-12 — Esercizi sulla topologia quoziente

Una *applicazione quoziente* è una applicazione continua $f : X \to Y$ tra spazi topologici tale che la topologia del codominio Y sia la topologia indotta dall'applicazione f.

a.1) Siano X uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Considera la famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{T} = \{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \text{ aperto in } X\}$. Mostra che $\mathcal{T}$ è una topologia su Y e discuti quale sia la topologia indotta su $Y \setminus f(X)$.

a.2) Considera due applicazioni quoziente $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ tra spazi topologici. Mostra che la composizione $g \circ f : X \to Z$ è una applicazione quoziente.

a.3) Se X è uno spazio topologico compatto, Y è uno spazio topologico di Hausdorff e $f : X \to Y$ è una applicazione continua e suriettiva, mostra che f è un'applicazione quoziente.

a.4) Considera i sottoinsiemi $X = [0,1] \cup [2,3]$ e $Y = [0,1]$ di $\mathbf{R}$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea). Su X considera la relazione $x \sim x'$ se e solo se $x = x'$ oppure $\{x, x'\} = \{1, 2\}$. Controllare se $X/\sim$ è omeomorfo a Y.

a.5) Considera i sottoinsiemi X e Y di $\mathbf{R}^3$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea) così definiti:

$$X = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \quad Y = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

Su X si consideri la relazione $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ se e solo se $(x,y,z) = (x',y',z')$ oppure $z = z' = 0$. Mostra che $X/\sim$ è omeomorfo a Y.

a.6) Siano X e Z spazi topologici e $f : X \to Z$ una applicazione continua e suriettiva. Siano $\sim_f$ la relazione di equivalenza su X definita da f e $p : X \to X/\sim_f$ la proiezione canonica. Sia $g : (X/\sim_f) \to Y$ l'applicazione tale che $f = g \circ p$. Mostra che sono equivalenti le due proprietà seguenti:

a) g omeomorfismo.

b) V aperto in Y se e solo se $f^{-1}(V)$ aperto in X.

a.7) Sia $f : X \to Y$ una applicazione quoziente tra spazi topologici. Mostra che, se le componenti connesse di X sono aperte, anche le componenti connesse di Y sono aperte.

a.8) Sia $f : X \to Y$ una applicazione quoziente tra spazi topologici che sia una applicazione aperta. Diciamo che un sottoinsieme $A \subset X$ è saturo se $A = f^{-1}(B)$ per un opportuno sottoinsieme B di Y. Mostra che, se A è saturo, anche l'interno di A è saturo.

a.9) Sia X uno spazio topologico e sia A un suo sottoinsieme non vuoto. Sia $p : X \to Y = X/A$ la proiezione canonica (tramite la relazione $x\ y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in A$). Mostra che

i) Per ogni $S \subset X$, si ha $p^{-1}p(S) \subseteq S \cup A$.

ii) Se A è aperto in X, allora p è una applicazione aperta.

iii) Se A non è aperto in X e p è aperta, allora $\mathring{A} = \emptyset$.

iv) Se $X = \mathbf{R}$ e $A = \mathbf{Q}$, allora A ha interno vuoto, ma p non é aperta né chiusa.

v) Se X è compatto e di Hausdorff e A è chiuso, allora X/A è compatto e di Hausdorff

a.10) Se X è compatto e di Hausdorff, $p \in X$ e $U = X \setminus \{p\}$, la compattificazione di Alexandroff U^* è omeomorfa ad X.