UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 1 a.a. 2013-14 esercizi per le vacanze di Natale

N.1) Nel piano affine $\mathbf{E}$, sia fissato un sistema di riferimento $R = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$, con coordinate x, y. Considera il punto $O''(1,3)$ e il riferimento $R'' = \{O', (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$, con coordinate x'', y''.

Determina le coordinate in R' del punto A di coordinate $(1, -1)$ in R.

Determina le coordinate (x'', y'') in R'' del punto P che ha in R le coordinate (x, y).

Esistono punti che hanno le stesse coordinate nei due sistemi di riferimento?

N.2) Ora considera il riferimento $R'' = \{O, (\vec{v}_1', \vec{v}_2')\}$, con coordinate x', y', ove $\vec{v}_1' = 2\vec{v}_2$, $\vec{v}_2' = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Determina le coordinate in R' del punto A di coordinate $(1, -1)$ in R.

Determina le coordinate (x', y') in R' del punto P che ha in R le coordinate (x, y).

N.3) Nello spazio affine numerico $\mathbf{A}^4$, considera il riferimento (O, E), ove $O = (0, 0, 0, 0)$ e E è il riferimento canonico.

a) Determina le componenti del vettore libero $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$ di primo estremo $A(1, 0, -1, 4)$ e secondo estremo $B(-1, 2, 2, 1)$.

b) Posto $C = (5, 1, 0, 0)$, determinare le componenti di ciascuno dei vettori $\mathbf{AB} + \mathbf{BC}$, $\mathbf{AB} - \mathbf{BC}$.

c) Considera un punto Q tale che $\mathbf{AQ} = 2\mathbf{QB}$. Tale punto esiste ed è unico? In caso, puoi calcolarne le coordinate?

d) Considera il sistema di riferimento (C, E) di coordinate (x_1', x_2', x_3', x_4'). Calcola le coordinate in tale riferimento del punto P avente coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) nel riferimento originario.

N.4) Considera lo spazio affine numerico $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$. Scrivi l'immagine del punto $P = (1, 2, 3)$ tramite la traslazione per il vettore (1, -3, 5).

N.5) Considera lo spazio affine numerico $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$. Qual è l'applicazione composta delle due traslazioni $\tau_{(1,2,0)}$ e $\tau_{(1,5,-3)}$?

N.6) Considera lo spazio affine numerico $\mathbf{A}^2_{\mathbf{Q}}$. Qual è l'applicazione inversa della traslazione $\tau_{(1/2,4/3)}$?

N.7) In uno spazio affine numerico, è assegnato un sistema di punti indipendenti $P_0, \ldots, P_t$. Mostra che i vettori $\mathbf{P_t P_0}$, $\mathbf{P_t P_1}$, $\ldots$, $\mathbf{P_t P_{t-1}}$ sono indipendenti.

N.8) Considera in $\mathbf{A}^2$ i punti $P = (0, 7)$, $Q = (3, -5)$. Descrivi (ricavando dimensione e giacitura, equazioni parametriche e equazione cartesiana) il sottospazio affine $P \vee Q$.

N.9) Considera in $\mathbf{A}^3$ i punti $P = (1, 2, 5)$, $Q = (0, 0, 1)$, $R = (2, 5, 1)$, $S = (0, 0, 0)$. Descrivi (ricavando dimensione e giacitura, equazioni parametriche e possibilmente equazioni cartesiane) i sottospazi affini $P \vee P$, $P \vee Q$, $P \vee R$, $P \vee Q \vee R$, $P \vee Q \vee R \vee S$.

I punti P, Q, R, S sono indipendenti tra loro?

N.10) Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine e ne siano P e Q punti. Discuti quali delle seguenti asserzioni sono vere:

(a) si ha sempre $P \vee Q = \{P, Q\}$;

(b) si ha sempre $P \vee Q \neq \{P, Q\}$;

(c) se $P \neq Q$ la giacitura di $P \vee Q$ ha dimensione 1.

N.11) Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine e ne siano S e S' sottospazi affini. Discuti quali delle seguenti asserzioni sono false:

(a) $S \cap S'$ è un sottospazio affine che ha per giacitura l'intersezione delle giaciture di S e S';

(b) $S \vee S'$ è un sottospazio affine che ha per giacitura la somma delle giaciture di S e S';

(c) $S \vee S'$ non è detto sia un sottospazio affine;

(d) $S \vee S' = S \cup S'$;

(e) se $S \vee S' \neq \emptyset$ allora $S \cap S'$ è un sottospazio affine che ha per giacitura l'intersezione delle giaciture di S e S' e $S \vee S'$ è un sottospazio affine che ha per giacitura la somma delle giaciture di S e S'.

N.12) Nel piano affine numerico reale, determina dei numeri direttori della retta di equazioni parametriche $x = 2 + 4t, y = 7 + 24t, t \in \mathbf{R}$.

N.13) Determina dei numeri direttori (in un dato riferimento cartesiano) della retta dello spazio affine numerico reale di dimensione tre, di equazioni parametriche $x = t, y = 0, z = 4 + 5t,\ t \in \mathbf{R}$.

N.14) Determina dei numeri direttori (in un dato riferimento cartesiano) della retta r di un piano affine reale di equazione cartesiana $3x + 2y + 7 = 0$.

N.15) Dire quale delle seguenti affermazioni sono vere:

a) ogni sottospazio affine di uno spazio affine è uno spazio affine;

b) ogni sottospazio affine di uno spazio affine è uno spazio vettoriale;

c) ogni famiglia di sottospazi affini ha intersezione vuota;

d) l'unione di una famiglia di sottospazi affini è un sottospazio affine.

N.16) In un dato riferimento cartesiano in un piano affine, considera la retta r di un piano affine reale di equazione cartesiana $3x + 2y + 7 = 0$. Scrivi equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela a r passante per il punto $P(0, 2)$.

N.17) Determina dei numeri direttori (in un dato riferimento cartesiano) della retta di un piano affine reale passante per i punti $P(0, 1)$, $Q(6, 7)$. Determinane anche equazioni parametriche e cartesiane, nonchè equazioni parametriche e cartesiana della retta parallela a questa passante per il punto $P(4, 7)$.

N.18) Determina dei numeri direttori (in un dato riferimento cartesiano) della retta di un spazio affine reale di dimensione tre passante per i punti $P(9, 1, 0)$, $Q(1, 1, 0)$. Determinane anche equazioni parametriche, nonchè equazioni parametriche della retta parallela a questa passante per l'origine.

N.19) Considera uno spazio affine **A** reale di dimensione 3 in cui si è introdotto un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Considera il piano π di equazioni parametriche $x = s + t, y = 2 + t - 4s,\ z = -1 + 6t - 5s, s, t \in \mathbf{R}$. Scrivi l'equazione del fascio dei piani paralleli a π e determina l'equazione del piano parallelo a π passante per l'origine.

N.20) Considera uno spazio affine **A** reale di dimensione 4 in cui si è introdotto un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Determina equazioni cartesiane del piano di equazioni parametriche $x_1 = 1 + 5s + t,\ x_2 = 4 - s - t,\ x_3 = 1 - 2t + 4s,\ x_4 = -t,\ s, t \in \mathbf{R}$.

N.21) Considera un piano affine reale A in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Controlla se la retta di equazioni $2x - y + 1 = 0$ e la retta passante per $P(-2, -3)$ e avente numeri direttori $(3, 5)$ appartengono o meno ad un fascio. Nel caso di risposta affermativa, controlla se si tratta di un fascio proprio o improprio.

N.22) In uno spazio affine **A** reale di dimensione 3, considera un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Considera il piano π di equazioni cartesiane $x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$ e la retta r passante per $A(1, 0, -1)$ e $B(0, 1, 1)$.

i) Controlla se la retta r e il piano π sono incidenti o paralleli.

ii) Controlla la mutua posizione tra r e la retta s di equazioni cartesiane $3x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0$.

iii) Descrivi le equazioni cartesiane dei piani del fascio di piani passanti per la retta r.

i) Determina equazioni parametriche per una retta t incidente sia r che s.