9.1) Determina un modello per la compattificazione di Alexandroff di $(0,1]$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea in $\mathbf{R}$). Tale compattificazione è omeomorfa a S^1 (top. euclidea)?

9.2) Il sottospazio S^1 di $(\mathbf{R}^2, \mathit{top.euclidea})$ è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di $(-1,0) \cup (0,1]$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea in $\mathbf{R}$)?

9.3) Determina un modello per la compattificazione di Alexandroff della parabola $X = \{(x,y) \,|\, y = x^2\}$ e dell'iperbole $Y = \{(x,y) \,|\, xy = 1\}$.

9.4) Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua tra spazi topologici. Definiamo una applicazione $f^* : X^* \to Y^*$ tra le compattificazioni con un punto all'infinito, mediante la posizione : $f^*(x) = f(x)$ $\forall x \in X$, $f^*(\infty_X) = \infty_Y$. È vero che f^* è continua?

9.5) Siano X uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \to Y$ un'applicazione. Considera la famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{T}_f = \{V \subseteq Y \,|\, f^{-1}(V) \text{ aperto in } X\}$.

a) Mostra che $\mathcal{T}_f$ è una topologia su Y (detta topologia quoziente o topologia indotta da f) e discuti quale sia la topologia indotta su $Y \setminus f(X)$.

b) Mostra che, se f è suriettiva, un sottoinsieme C di Y è chiuso nella topologia $\mathcal{T}_f$ se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X.

9.6) Considera $(\mathbf{R}^2, \mathit{top.euclidea})$ e il suo sottospazio S^1. Considera inoltre l'applicazione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to S^1$ definita da $\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}$. Discuti se S^1 ha la topologia quoziente rispetto a f.

9.7) Considera una applicazione suriettiva $f : X \to (Y, \mathcal{T})$ tra spazi topologici.

a) Mostra che f è continua se e solo se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_f$.

b) Mostra che, se f è aperta e continua, allora $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$.

c) Mostra che, se f è chiusa e continua, allora $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$.

9.8) Considera i sottoinsiemi $X = [0,1] \cup [2,3]$ e $Y = [0,1]$ di $\mathbf{R}$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea). Su X considera la relazione $x \sim x'$ se e solo se $x = x'$ oppure $\{x, x'\} = \{1, 2\}$. Mostra che $X/\sim$ è omeomorfo a $[0,2]$, e dunque anche a Y.

9.9) Si considerino i sottoinsiemi X e Y di $\mathbf{R}^3$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea) così definiti:

$$X = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1\} \quad Y = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 = z^2, 0 \le z \le 1\}.$$

Su X si consideri la relazione $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ se e solo se $(x,y,z) = (x',y',z')$ oppure $z = z' = 0$. Mostrare che $X/\sim$ è omeomorfo a Y.