9.1) Dimostrare che, se $f : V \to V$ è diagonalizzabile, allora $V = Imf \oplus Kerf$.

9.2) Nel piano euclideo, sia assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, con coordinate (x, y). Si assegni, nel completamento proiettivo del piano, il sistema di coordinate omogenee associato $[X_0, X_1, X_2]$.

a) Determina le coordinate omogenee di $P(3, 2)$.

b) Determina l'equazione omogenea del completamento proiettivo della retta affine s di equazione $5x - 7y + 12 = 0$ e calcola le coordinate omogenee del suo punto improprio.

c) Determina l'equazione omogenea della retta passante per P e avente lo stesso punto improprio del completamento proiettivo della retta s definita nel punto precedente.

d) Determina l'equazione affine della retta il cui completamento proiettivo ha equazione $2X_0 - X_1 + 4X_2 = 0$.

9.3) Nel piano euclideo reale, sia fissato un sistema di coordinate (x, y). Determinare un sistema di coordinate omogenee sul completamento proiettivo della retta $x = 0$.

9.4) Nel piano euclideo reale, sia fissato un sistema di coordinate (x, y). Sia r la retta di equazione $3x - 2y = 0$.

a) Sul completamento proiettivo di r, determina il sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ associato al riferimento affine di r dato da $(O, \vec{v} = (2, 3))$.

b) Determinare il sistema di coordinate omogenene $[X'_0, X'_1]$ associato al riferimento di r dato da $(A(4, 6), \vec{w} = (-12, -18))$.

c) Determinare il cambio di coordinate omogenee che lega le coordinate $[X_0, X_1]$ e $[X'_0, X'_1]$ definite ai punti precedenti.

9.5) Nella retta euclidea r, sia fissato un riferimento e siano $A(a)$ e $B(b)$ due punti distinti. Detto M il punto medio di A e B, calcolare il birapporto $(AB\, r_\infty M)$ nel completamento proiettivo di r.

Calcolare, infine, il birapporto $(Ar_\infty BM)$.

Test 1 *Nello spazio vettoriale $V = \mathbf{R}[x]_3$ dei polinomi di grado al più 3 e coefficienti reali, considera il sottospazio U generato da $x^3 - 1$ e denota con $\pi : V \to V/U$ l'applicazione quoziente definita da $p(x) \mapsto [p(x)]$.*

VF (a) lo spazio V/U ha dimensione 2;

VF (b) la posizione $[p(x)] \mapsto p(1)$ definisce una applicazione lineare $f : V/U \to V$;

VF (c) $[3 - x + 2x^2] = [1 - x + 2x^2 + 2x^3]$.

Cenni di soluzione

9.1) Poichè f è diagonalizzabile, V è somma diretta degli autospazi relativi ad f. Il sottospazio $Kerf$ è uno degli autospazi. Basta dimostrare che Imf coincide con la somma diretta degli autospazi di f di autovalore non nullo. A questo fine, basta osservare che se α è un autovalore non nullo di f, l'immagine tramite f del corrispondente autospazio V_α coincide con il sottospazio V_α: infatti, per ogni $\vec{v} \in V_\alpha$, l'immagine $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ generano lo stesso sottospazio.

9.2) a) $P[1, 3, 2]$.

b) $5X_1 - 7X_2 + 12X_0 = 0$; il punto improprio è $[0, 7, 5]$ (è l'unico punto della retta con la prima coordinata omogenea nulla).

c) La retta cercata ha equazione

$$det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = -5X_1 + 7X_2 + X_0 = 0.$$

Notare che tale retta è esattamente il completamento proiettivo della retta affine s' passante per P e parallela ad s (s' ha equazione affine $-5x + 7y + 1 = 0$)

d) $2x - y + 4 = 0$.

9.3) La retta $x = 0$ è parametrizzata dalla coordinata y. Il sistema di coordinate omogenee associato assegna al punto $P(0, y)$, di coordinata affine y, le coordinate $[1, y]$. Al punto improprio, restano associate le coordinate $[1, 0]$.

9.4) a) Il punto $P(x, y) = (0, 0) + t(2, 3)$ corrisponde al parametro affine t; le coordinate omogenee corrispondenti sono $[X_0, X_1] = [1, t]$. Osserviamo che $t = x/2 = y/3$, nei termini delle coordinate piane di P. Al punto improprio, restano associate le coordinate $[1, 0]$.

b) Utilizzando la parametrizzazione $P(x, y) = (4, 6) + s(-12, -18)$, al punto $P(x, y)$ risultano associate le coordinate omogenee $[1, s]$. Osserviamo che $s = \frac{4-x}{12} = \frac{16-y}{18}$, nei termini delle coordinate piane di P. Al punto improprio, restano associate le coordinate $[1, 0]$.

Il confronto tra i parametri affini t ed s è dato da $t(2, 3) = (4, 6) + s(-12, -18)$, cioè $t = 2 - 6s$. Il corrispondente cambio di coordinate omogenee è dato quindi da $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$ sui punti propri, e, più in generale $\begin{pmatrix} X_0' \\ X_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} \quad \rho \in \mathbf{R}, \rho \neq 0.$

9.5) Sul completamento proiettivo di r, assegno le coordinate omogenee associate al riferimento scelto: al punto $Q(q) \in r$ assegno le coordinate $[1, q]$, mentre a r_∞ assegno le coordinate $[1, 0]$. Ottengo $A[1, a]$, $B[1, b]$, $M[2, a + b]$. Ora calcolo il birapporto in modo esplicito:

$$(ABr_\infty M) = [det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & a+b \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a+b \end{pmatrix}].$$

Ricavo che $(ABr_\infty M) = [a-b, b-a] = [1, -1]$ (dove l'uguaglianza segue osservando che $a-b \neq 0$ perché ho supposto distinti i due punti A e B). Si noti che tale birapporto NON dipende da A e B.

Osserviamo anche che $(Ar_\infty BM) = [2, 1] = [1, 1/2]$. Infatti, tale birapporto mi deve fornire le coordinate del punto medio tra l'origine e il punto di coordinate affini 1; è possibile anche svolgere direttamente i conti:

$$(Ar_\infty BM) = [det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a+b \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & a+b \end{pmatrix}] = [2, 1].$$